

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ**

**Национальный аэрокосмический университет**

**им. Н.Е. Жуковского**

**"Харьковский авиационный институт"**

**В.Б. Минтюк**

**УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГИХ СИСТЕМ**

**Часть I**

**ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ УПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ**

Учебное пособие

**ХАРЬКОВ "ХАИ" 2008**

УДК 004.434.5

Минтюк В. Б. Устойчивость упругих систем : учеб. пособие / В. Б. Минтюк. – Х. : Нац. аэрокосм. ун-т "Харьк. авиац. ин-т", 2008. – Ч. I: Введение в теорию упругой устойчивости. – 40 с.

Систематически и иллюстративно изложены базовые понятия теории упругой устойчивости систем. Детально описаны механизмы, виды потери устойчивости, подходы к решению задач, их различия и сходства, используемые упрощения и допущения.

Для студентов высших и средних учебных заведений машиностроительных и строительных специальностей.

Ил. 23. Библиогр.: 10 назв.

Рецензенты: канд. техн. наук, доц. Е.Т. Василевский,  
канд. техн. наук, доц. М.И. Несвит

© Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского  
"Харьковский авиационный институт", 2008

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Практически для любой силовой конструкции существует проблема устойчивости ее равновесия, особенно если конструкция тонкостенная и высоконагруженная. Сегодня определение критических значений нагрузок является неотъемлемой частью любого прочностного расчета. Во всех современных пакетах программного обеспечения, предназначенных для выполнения этих расчетов, есть блоки, выполняющие расчет на устойчивость.

Проблеме устойчивости посвящено достаточно много литературы. Особенно выделяются монографии, которые считаются энциклопедиями устойчивости: С.П. Тимошенко [1], А.С. Вольмира [2], Ф. Блейха [3], В.З. Власова [4], Э.И. Григолюка, В.В. Кабанова [5] и др. Количество же научных публикаций увеличивается с каждым годом. Но все они рассчитаны на подготовленного читателя. Среди учебников можно назвать работы Н.А. Алфутова [6], Г. Циглера [7], В.Д. Ключникова [8], В.Л. Бидермана [9], Я.Г. Пановко [10] и др.

Данное учебное пособие ориентировано на студентов начальных курсов технических университетов. От читателя этой части пособия требуются элементарные знания высшего анализа и теоретической механики. Здесь рассматриваются системы с абсолютно жесткими элементами, консервативными силами, идеальными пружинами и связями. Задачи устойчивости именно таких систем благодаря своей простоте наиболее наглядно демонстрируют механизм, виды потери устойчивости, подходы к решению задач, их различия и сходства, используемые упрощения и допущения.

Изложенный здесь материал призван, прежде всего, объяснить читателю физику процесса (или состояния) потери устойчивости, в то время как в литературе, описаниях программного обеспечения, посвященных проблемам устойчивости, допущения, гипотезы и подходы используются без объяснения, как само собой разумеющиеся.

Каждый раздел завершается выводами. Хотя в разделе, как правило, рассматриваются частные простые примеры и задачи для систем с конечным числом степеней свободы, приведенные выводы носят самый общий характер: их можно распространить на любые деформируемые системы с бесконечным числом степеней свободы.

Автор ставил своей целью создать пособие, призванное стать для неподготовленного читателя первым шагом в освоении дисциплины устойчивости деформируемых систем как одного из самых актуальных и трудных разделов механики деформируемого твердого тела.

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить С.А. Халилова за конструктивную критику и полезные обсуждения, которые позволили улучшить данное пособие.

# 1. ПОНЯТИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

**Устойчивость системы** (совокупности элементов, сил, реакций и т.д.) – это ее способность сохранять исходное состояние или возвращаться в него из какого-либо возмущенного.

Наглядной общепринятой иллюстрацией устойчивого, неустойчивого и безразличного состояний является система "шарик-поверхность" (рис. 1).

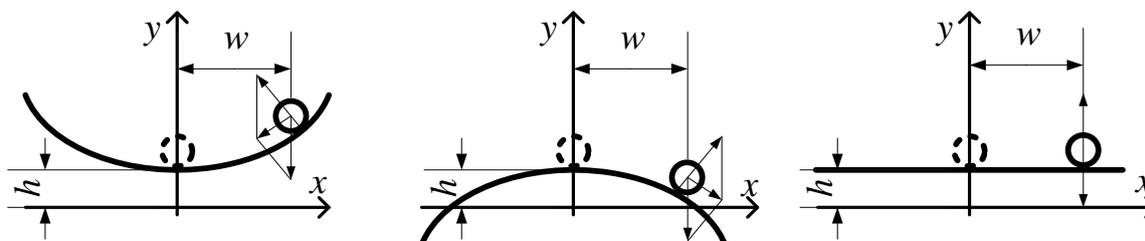


Рис. 1. Устойчивое, неустойчивое и безразличное состояния

Рассмотрим его более подробно. Во всех трех случаях изначально шарик находится в равновесии. Рассмотрев силы, действующие на шарик, или даже интуитивно можно заключить, что шарик на вогнутой поверхности (рис. 1, а) находится в устойчивом равновесии, на выпуклой поверхности (рис. 1, б) – в неустойчивом и на ровной поверхности (рис. 1, в) – в безразличном.

Чтобы найти критерий, который характеризовал бы устойчивость системы, поставим задачу так.

Модель шарика – это материальная точка массой  $m$ , которая скользит по линии, заданной графиком функции  $y(x) = ax^2 + h$ , где  $a$  и  $h$  – произвольные параметры. Какой вид должна иметь парабола  $y(x)$ , чтобы исходное равновесное состояние шарика было устойчивым, неустойчивым или безразличным?

В данном простом примере, зная свойства параболы и рассмотрев равновесие шарика в отклоненном (возмущенном) состоянии, элементарно заключим: если коэффициент  $a > 0$ , т.е. ветви параболы направлены вверх, то состояние устойчиво, если  $a < 0$  (ветви параболы направлены вниз), то состояние неустойчиво, и при  $a = 0$  – безразличное. Это первый подход к решению проблемы устойчивости.

Второй подход базируется на основополагающем принципе механики – *принципе минимума полной потенциальной энергии* [7]:

***В положении равновесия полная потенциальная энергия консервативной системы имеет стационарное значение, причем положение равновесия устойчиво тогда и только тогда, когда это стационарное значение – минимум.***

### Примечание.

**Консервативная система** – это система, все элементы которой обладают потенциалом: связи идеальные, т.е. трение в шарнирах (рассеивание энергии) отсутствует, упругие элементы подчиняются закону Гука, внешние силы в процессе перемещения точек, к которым они прикладываются, не меняют своей величины и направления, их работа зависит только от начального и конечного положений и не зависит от пути перехода (отсутствует “подкачка” энергии).

Потенциальная энергия исходного состояния системы, когда шарик находится в положении  $x=0$ , равна  $U_0 = mgh$ , где  $g$  – ускорение свободного падения. Это состояние равновесно независимо от значения параметра  $a$ . Чтобы исследовать его на устойчивость, используя принцип минимума, выражение полной потенциальной энергии необходимо составить для некоторого возмущенного состояния. Например, отклоним шарик от исходного состояния на величину  $w$  (см. рис. 1), тогда

$$U = mg(aw^2 + h) = mgaw^2 + U_0.$$

Из условия стационарности (экстремальности)  $U' = 0$ , где штрих обозначает производную по  $w$ , получим

$$2mgaw = 0.$$

Поскольку  $2mg \neq 0$  всегда, то или  $w = 0$ , или  $a = 0$ , т.е. в исходном состоянии  $w = 0$  система находится в равновесии независимо от коэффициента  $a$ , и при  $a = 0$ , независимо от возмущения  $w$  система также находится в равновесии.

Чтобы определить, когда реализуется минимум, необходимый для устойчивого равновесия, возьмем вторую производную по  $w$  от функции полной потенциальной энергии, она, как известно, должна быть больше нуля:

$$U'' = 2mga > 0.$$

Поскольку  $2mg > 0$  всегда, то приходим к тому же результату:

- при  $a > 0$  реализуется минимум полной потенциальной энергии, и система устойчива;
- при  $a < 0$  минимума нет, система неустойчива;
- при  $a = 0$  состояние безразличное, т.е. при этом значении параметра  $a$  устойчивое равновесие сменяется неустойчивым (или наоборот). Такое значение параметра называется **критическим**.

В сформулированных выше подходах рассматривалось некоторое состояние (исходное или возмущенное). В действительности при внесении в систему некоторых возмущений, как правило, происходит движение ее эле-

ментов. По своему характеру это движение может неограниченно увеличиваться, носить колебательный характер с затухающей или увеличивающейся амплитудой и т.д., но в любом случае потеря устойчивости – это процесс. Анализируя характер движения, можно сделать вывод об устойчивости или неустойчивости системы. Такие подходы называются динамическими. Они являются более общими, вследствие чего более сложными, чем статические.

Ниже будет показано, что в случае консервативных систем, а именно такие системы далее и будут рассматриваться, оба подхода приводят к одному и тому же результату.

### **Выводы:**

1. Зачастую для систем, находящихся изначально в равновесии, необходимо выяснить: устойчиво ли это равновесие?

2. *Критическим* значением какого-либо параметра системы называется такое его значение, при котором происходит качественное изменение поведения или состояния системы.

3. Существует два типа принципиально различных подходов: *статический* и *динамический*. В рамках статических подходов рассматривается состояние системы, в рамках динамических – ее движение.

4. Из возможных статических подходов в дальнейшем будем использовать подходы, основанные на:

- анализе уравнений равновесия (подход Эйлера);
- принципе минимума полной потенциальной энергии (энергетический подход).

Известны и другие подходы: метод малого параметра, метод неидеальностей, деформационный и др.

## **2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД И ПОДХОД ЭЙЛЕРА**

Рассмотрим два подхода на примере задачи, приведенной на рис. 2. Упругим элементом здесь является пружина жесткостью  $c$ , препятствующая изменению угла наклона  $\varphi$  шарнирно опертого стержня длиной  $l$ . В исходном состоянии (рис. 2, а) пружина не напряжена, стержень расположен строго вертикально, сила действует вдоль оси стержня. Если величина не меняющей своего направления силы  $P$  незначительна, то при отклонениях (рис. 2, б) система будет возвращаться в исходное состояние, но при некотором достаточно большем значении силы  $P$  жесткости пружины будет недостаточно, чтобы вернуть систему в исходное состояние.

Ставится задача определения критического значения силы  $P$ , т.е. такого значения, при котором исходное состояние равновесия перестает быть

устойчивым<sup>1)</sup>.

## 2.1. Энергетический подход

Полная потенциальная энергия данной системы в возмущенном состоянии (рис. 2, б) состоит из потенциальной энергии пружины

$$U_{np} = \frac{c\varphi^2}{2}$$

и потенциала силы  $P$

$$\begin{aligned} U_P &= -Pu = -P(l - l \cos \varphi) = \\ &= -Pl(1 - \cos \varphi). \end{aligned}$$

Здесь использованы известные соотношения для потенциальной энергии сжатой (закрученной) пружины и потенциала силы  $U_P = -A$ , где  $A$  – работа, совершаемая силой  $P$  на перемещении  $u = l - l \cos \varphi$ .

Окончательно полная потенциальная энергия имеет вид

$$U = U_{np} + U_P = \frac{c\varphi^2}{2} - Pl(1 - \cos \varphi). \quad (1)$$

Согласно принципу минимума полной потенциальной энергии состояния равновесия характеризуются стационарными значениями энергии. Исследование ее как функции перемещения  $\varphi$  на стационарность ( $U' = 0$ , здесь штрих обозначает производную по координате  $\varphi$ ) приводит к уравнению

$$c\varphi - Pl \sin \varphi = 0. \quad (2)$$

Отсюда можно заключить, что при любых параметрах системы исходное состояние ( $\varphi = 0$ ) равновесно, т.е. уравнение (2) выполняется тождественно, но возможны и другие положения равновесия, например, если значение силы равно  $P = 2\frac{c}{l}$ , то состояние равновесия возможно при величине угла  $\varphi \approx 1.895494$ .

Чтобы ответить на вопрос, какое состояние равновесия будет устойчивым согласно тому же принципу, необходимо определить, в каких точках реализуется минимум, т.е.  $U'' > 0$ :

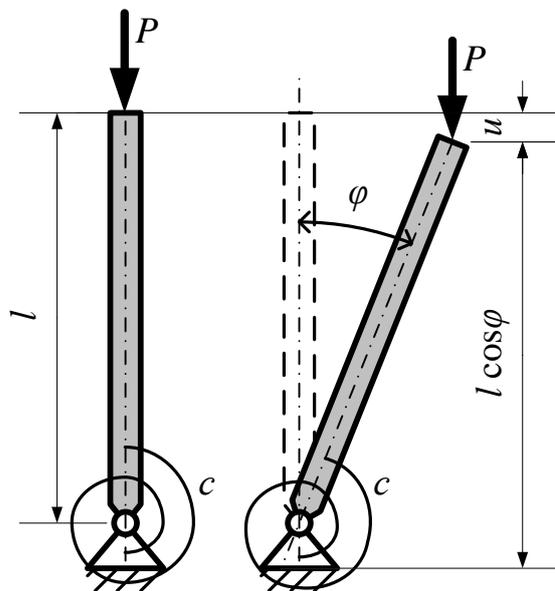


Рис. 2. Система с одной степенью свободы

<sup>1)</sup> Обычно ставится задача определения критических значений внешних нагрузок, в данном случае силы, но ничто не мешает определить критическое значение любого другого параметра, например, длины стержня или жесткости пружины.

$$U'' = c - Pl \cos \varphi > 0.$$

Теперь понятно, что исходное равновесное состояние ( $\varphi = 0$ ,  $\cos \varphi = 1$ ) будет устойчивым при  $c - Pl > 0$ , т.е. при значении силы  $P < \frac{c}{l}$ . При больших значениях силы исходное состояние хоть и равновесно, но неустойчиво. Например, при величине силы  $P = 2\frac{c}{l}$  значение второй производной равно  $U''|_{\varphi=0, P=2\frac{c}{l}} = -c < 0$ . При таком значении силы становится возможным и устойчивым состояние системы со стержнем, отклоненным на угол  $\varphi \approx 1.895494$ :

$$U''|_{\varphi \approx 1.895494, P=2\frac{c}{l}} = 1.638045c > 0.$$

Критическим значением силы для исходного состояния является сила

$$P_{кр} = \frac{c}{l}. \quad (3)$$

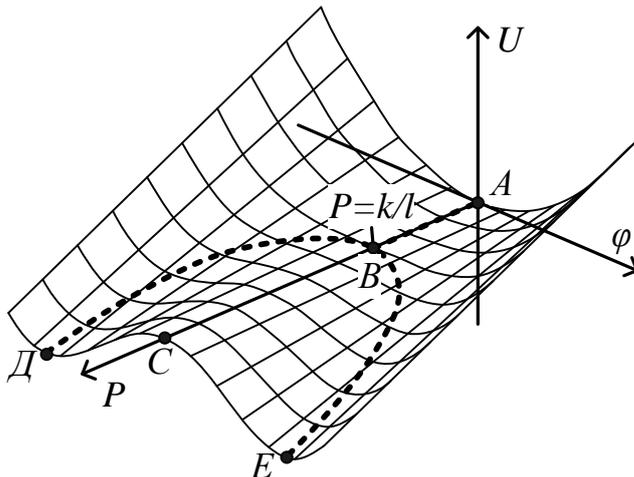


Рис. 3. Полная потенциальная энергия  $U$  как функция силы  $P$  и угла поворота  $\varphi$

На рис. 3 полная потенциальная энергия данной системы (1) изображена в виде графика функции двух переменных силы  $P$  и угла поворота  $\varphi$ . Здесь видно, как изменяются положения минимума функции полной потенциальной энергии (отмечено пунктиром) при изменении величины внешней силы  $P$ .

Вначале ( $P=0 \dots P_{кр}$ , отрезок  $AB$ ) возможно только одно состояние равновесия  $\varphi = 0$ . При переходе точки  $B$  исходное равновесие возможно, но оно неустойчиво (линия  $BC$  – линия точек стационарности, но, как видно из рисунка, – это линия максимумов). Устойчивые положения равновесия отмечены участками  $BD$  и  $BE$ .

## 2.2. Подход Эйлера

Решим эту же задачу, используя подход Эйлера, который основывается на анализе уравнений равновесия. Уравнения равновесия необходимо составлять в возмущенном состоянии (рис. 4).

Освободим стержень от связей и рассмотрим моменты относительно шарнира  $A$ :

$$M - Pw = 0.$$

С учетом того, что момент в шарнире пропорционален углу поворота и жесткости пружины

$$M = c\varphi,$$

а величина плеча силы  $P$

$$w = l \sin \varphi,$$

окончательно приходим к уравнению

$$c\varphi - Pl \sin \varphi = 0, \quad (4)$$

которое в точности совпадает с уравнением (2) – условием минимума полной потенциальной энергии системы.

Таким образом, принцип минимума полной потенциальной энергии эквивалентен уравнениям равновесия.

Анализ уравнения (4) заключается в следующем.

При значении угла  $\varphi = 0$  имеем тривиальное решение уравнения (4), соответствующее невозмущенному состоянию. Предполагаем наличие соседних форм равновесия, отличных от исходной ( $\varphi \neq 0$ ), тогда

$$P = \frac{c\varphi}{l \sin \varphi}, \quad (5)$$

и значение силы  $P$ , когда наряду с исходной формой равновесия становится возможной другая (смежная) форма, соответствует, естественно, тому же критическому значению силы  $P$  (3):

$$P_{кр} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} P(\varphi) = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{c\varphi}{l \sin \varphi} = \frac{c}{l}.$$

### Выводы:

1. При исследовании систем на устойчивость как выражение полной потенциальной энергии, так и уравнения равновесия необходимо составлять в отклоненном (возмущенном) состоянии.

2. Если в качестве возмущений выступают перемещения, то принцип минимума полной потенциальной энергии эквивалентен уравнениям равновесия.

3. Энергетический подход и подход Эйлера приводят к одинаковому результату.

4. По знаку второй производной полной потенциальной энергии можно определить, устойчива или неустойчива та или иная форма равновесия.

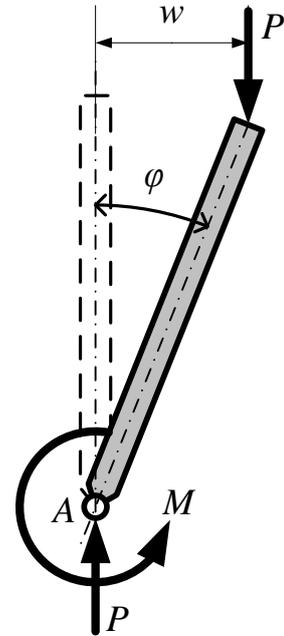


Рис. 4. Равновесие стержня системы

### 3. ДИАГРАММЫ РАВНОВЕСНЫХ СОСТОЯНИЙ

*Диаграммой (кривой) равновесных состояний* называется зависимость исследуемого параметра системы от характерного перемещения.

Исследуемым параметром является, как правило, число, характеризующее величину внешней нагрузки. Его зависимость определяется от перемещения какой-либо точки, угла поворота и др.

Диаграммы равновесных состояний позволяют качественно оценить поведение упругих систем под действием внешних нагрузок.

Построим такую диаграмму для примера, рассмотренного выше. В качестве параметра возьмем значение силы  $P$  и исследуем его зависимость от

величины угла отклонения стержня  $\varphi$ . Эта зависимость описывается уравнением (5) и представлена на рис. 5.

Сравнивая рис. 5 и 3 видим, что диаграмма равновесных состояний полностью совпадает с графиком экстремумов полной потенциальной энергии. Рассмотрим характерные участки диаграммы.

Если увеличивать силу  $P$  от 0 до  $P_{кр} = \frac{c}{l}$  (рис. 5, участок АВ), то возможно только одно состояние равновесия, и оно устойчиво – это исходное неотклоненное.

Если при этом значении силы вносить возмущения в систему, то она всегда будет возвращаться в исходное состояние.

Точка  $B$  – это особая точка, *точка бифуркации*<sup>1)</sup>, или *точка ветвления равновесных форм*. Эта точка характеризует критические параметры системы.

Дальнейшее увеличение нагрузки приводит к тому, что исходная форма равновесия становится неустойчивой (на диаграмме рис. 5 зачеркнута, участок  $BC$ ). Любое малое возмущение переводит систему в новое отклоненное устойчивое равновесное состояние (рис. 5, участок  $BD$  или  $BE$ ).

При уменьшении силы до нуля система тем же путем возвращается в

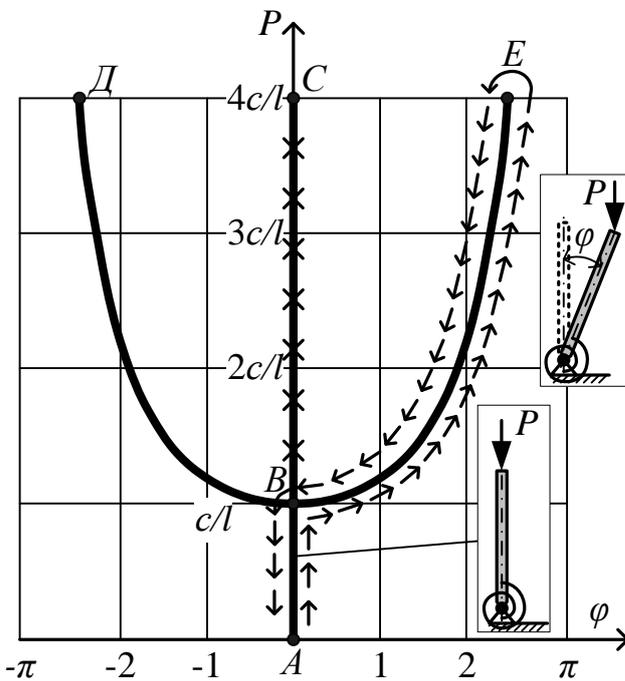


Рис. 5. Диаграмма равновесных состояний

<sup>1)</sup> Бифуркация – от лат. *bifurcus* – раздвоенный.

исходное состояние (на диаграмме рис. 5 отмечено стрелочками).

Рассмотрим другой пример (рис. 6). Та же система, но с дополнительной пружиной жесткости  $k = \frac{2c}{l^2}$ .

К энергии (1) добавится потенциальная энергия второй пружины

$$U_{np1} = \frac{k w^2}{2}.$$

С учетом того, что  $k = \frac{2c}{l^2}$  и  $w = l \sin \varphi$ ,

$$U_{np1} = c \sin^2 \varphi.$$

Окончательно полная потенциальная энергия примет вид

$$U = U_{np} + U_{np1} + U_P = \frac{c \varphi^2}{2} + c \sin^2 \varphi - Pl(1 - \cos \varphi). \quad (6)$$

Условие ее стационарности  $U' = 0$  приводит к уравнению

$$c \varphi + 2c \sin \varphi \cos \varphi - Pl \sin \varphi = 0, \quad (7)$$

которое является также и уравнением равновесия всех моментов относительно точки А (рис. 7).

Исходное состояние ( $\varphi = 0$ ) по-прежнему является тривиальным решением уравнения (7). Оно будет устойчивым, пока вторая производная в окрестности этого положения будет положительной  $U'' > 0$ :

$$c + 2c \cos 2\varphi - Pl \cos \varphi \Big|_{\varphi=0} > 0; \quad 3c - Pl > 0;$$

$$P < \frac{3c}{l}.$$

$$P_{кр} = \frac{3c}{l} \text{ — критическое значение силы.}$$

К этому же результату приходим, подразумевая наличие соседних форм равновесия, отличных от исходной ( $\varphi \neq 0$ ). Из (7) полу-

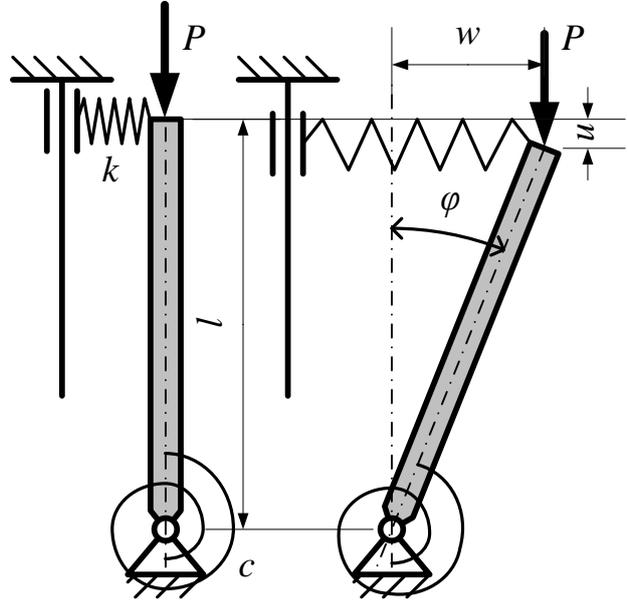


Рис. 6. Система с двумя упругими элементами

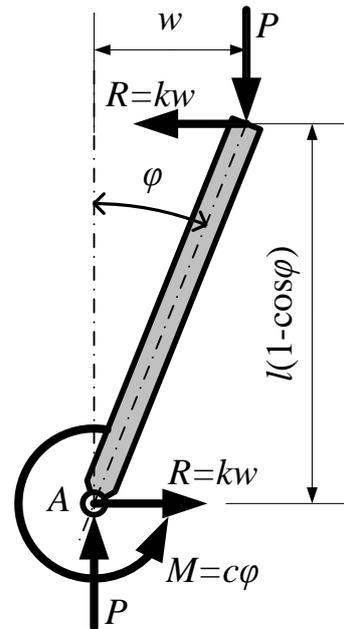


Рис. 7. Равновесие стержня

ЧИМ

$$P = \frac{c(\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi)}{l\sin\varphi}. \quad (8)$$

Точку бифуркации, характеризующую критическое значение силы  $P$ , определим как

$$P_{кр} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} P(\varphi) = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{c(\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi)}{l\sin\varphi} = \frac{3c}{l}.$$

Диаграмма равновесных состояний (график функции  $P(\varphi)$ ), определяемая соотношением (8), в данном случае имеет качественно иной вид (рис. 8).

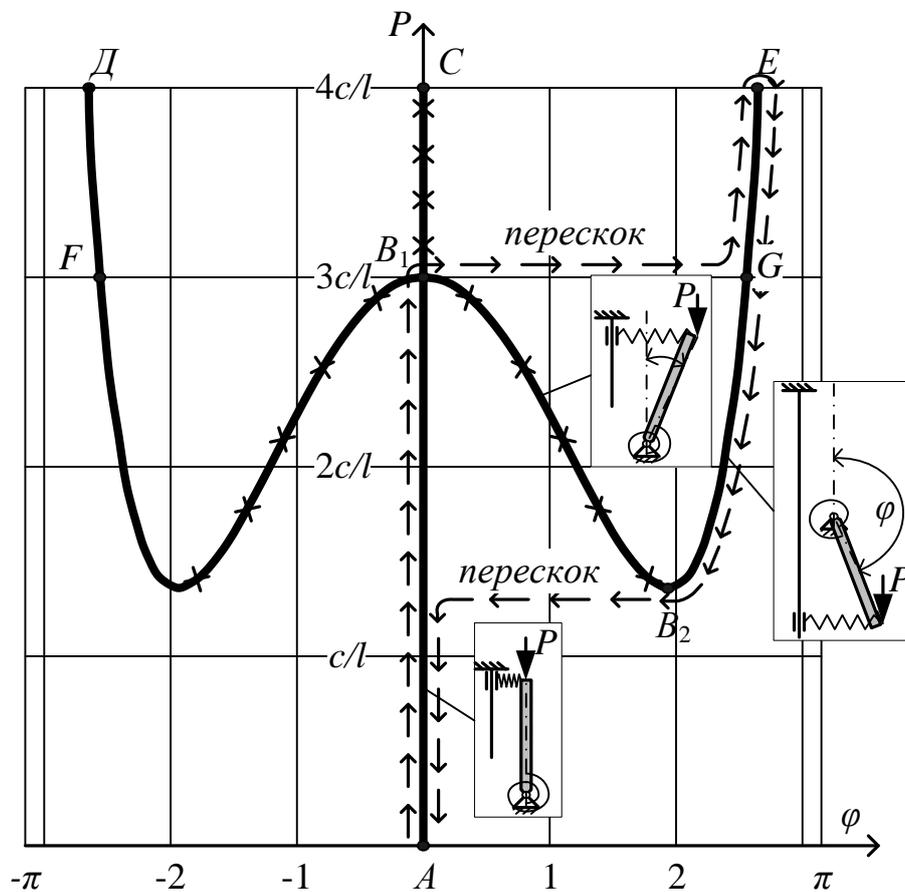


Рис. 8. Диаграмма равновесных состояний системы с перескоком

При нагружении данной системы исходное вертикальное положение стержня остается устойчивым вплоть до критического значения силы  $P_{кр} = \frac{3c}{l}$  (рис. 8, участок  $AB_1$ ). Далее это равновесное состояние становится неустойчивым (рис. 8, участок  $B_1C$ ). Соседнее равновесное состояние с незначительно отклоненным стержнем (рис. 8, участок  $B_1 B_2$ ) реализоваться не

может, потому что оно соответствует меньшему значению силы. Ближайшее равновесное состояние, соответствующее большему значению силы, – это участок  $GE$ . Переход в это состояние происходит скачкообразно ("хлопком"). Угол наклона стержня меняется от  $0$  до  $\sim 147^\circ$ . Дальнейшее увеличение силы ведет к плавному увеличению угла до  $180^\circ$ .

Разгрузка системы будет происходить по линии  $EGB_2$ . В точке  $B_2$  ( $\varphi \approx 111^\circ$ ,  $P \approx 1.36 \frac{C}{l}$ ) незначительное уменьшение силы приводит к тому, что происходит перескок в исходное состояние ("выхлоп").

На диаграмме (рис. 8) поведение системы при нагружении и разгрузке изображено стрелочками, неустойчивые ветви равновесных состояний зачеркнуты.

Диаграмма такого типа имеет две точки бифуркации  $B_1$  и  $B_2$ , которым соответствуют две критические силы: верхняя  $P_{кр}^s$  (точка  $B_1$ ) и нижняя  $P_{кр}^n$  (точка  $B_2$ ).

Хотя диаграммы равновесных состояний построены для простых систем с абсолютно жестким стержнем и одной степенью свободы, качественно они сходны с диаграммами, построенными для более сложных деформируемых систем: стержней, пластин, оболочек. Диаграмма равновесных состояний, представленная на рис. 5, характерна для поведения сжатых стержней и пластин, диаграмма на рис. 8 – для оболочек.

На рис. 9 представлены некоторые другие возможные виды диаграмм равновесных состояний.

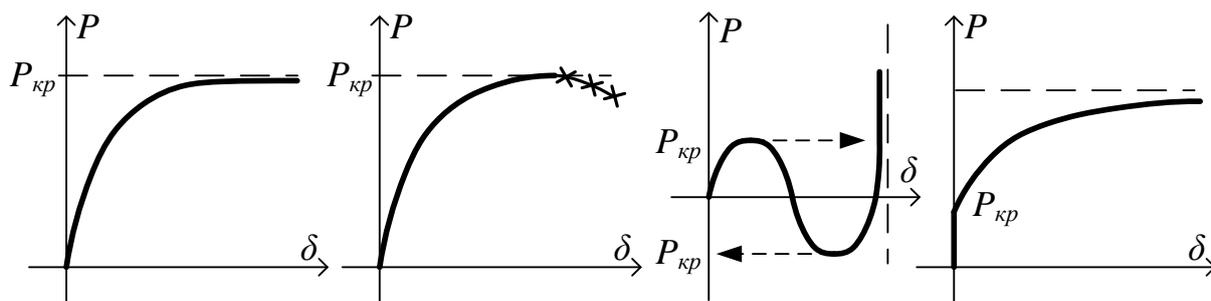


Рис. 9. Некоторые виды диаграмм равновесных состояний

### Выводы:

1. Диаграмма равновесных состояний является линией экстремумов полной потенциальной энергии и позволяет качественно оценить поведение упругих систем под действием внешних нагрузок.

2. Точка ветвления равновесных форм называется точкой бифуркации и

характеризует критические параметры системы.

3. Диаграмма, представленная на рис. 5, характерна для поведения продольно сжатых стержней и пластин, а диаграмма, приведенная на рис. 8, характерна для оболочек.

4. Системы с перескоком характеризуются двумя значениями критических нагрузок: верхней и нижней.

#### 4. СИСТЕМЫ С НАЧАЛЬНЫМИ НЕСОВЕРШЕНСТВАМИ

В двух предыдущих примерах начальное положение стержня, когда пружины не напряжены, было строго вертикальным. Это предположение является некоторой идеализацией системы. На практике обычно изначально в системе присутствуют некоторые несовершенства геометрии. Возникает вопрос, как повлияют эти геометрические несовершенства системы на ее поведение.

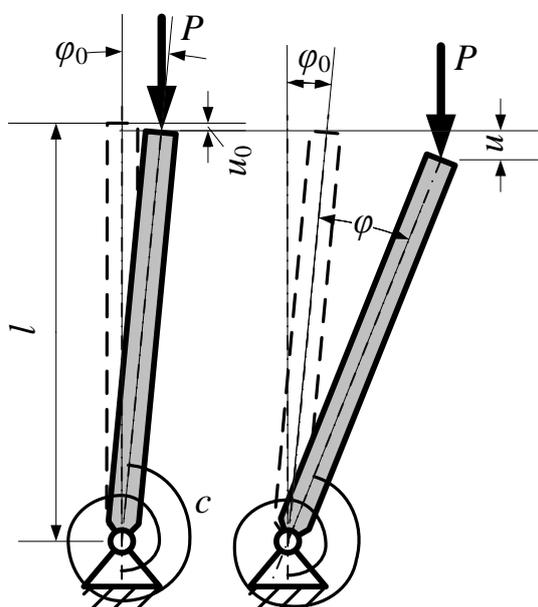


Рис. 10. Система с начальным несовершенством

Если вернуться к первому примеру, то в качестве несовершенства можно ввести начальное (до приложения нагрузки и с ненапряженной пружиной) отклонение стержня на некоторый угол  $\varphi_0$  (рис. 10).

Потенциальная энергия пружины в возмущенном состоянии имеет такой же вид:

$$U_{np} = \frac{c\varphi^2}{2}.$$

Потенциал силы  $P$  в данном случае имеет вид (рис. 10)

$$U_P = -Pu = -P(l - l \cos(\varphi + \varphi_0) - l \cos \varphi_0) = -Pl(1 - \cos(\varphi + \varphi_0) - \cos \varphi_0).$$

Условие стационарности  $U' = 0$  приводит к уравнению равновесия

$$c\varphi - Pl \sin(\varphi + \varphi_0) = 0.$$

Диаграмма равновесных состояний для данной системы ( $P(\varphi) = \frac{c\varphi}{l \sin(\varphi + \varphi_0)}$ ) с несовершенством в виде начального отклонения угла  $\varphi_0 = 15^\circ$  представлена на рис. 11.

Точка бифуркации как таковая отсутствует. Здесь отклонение системы начинается сразу же при приложении силы, и угол отклонения системы мо-

нотонно растет (ветвь  $AE$ ). Ветвь  $CE$  характеризует неустойчивые равновесия, что можно определить по знаку второй производной от потенциальной энергии. На ветви  $CD$  расположены точки устойчивого равновесия, но попасть на эту ветвь можно при достижении силой определенного значения (для данного примера  $P \approx 1,479539 \frac{c}{l}$ ) и только принудительно переведя

стержень в левое положение. Критическим значением силы здесь считается точка перегиба кривой<sup>1)</sup> равновесного состояния – это точка

$B$  на ветви  $AE$ . Для данного примера критическое значение силы составляет

$P_{кр} \approx 0,8576841 \frac{c}{l}$  при угле отклонения стержня  $\varphi \approx 40,5^\circ$ ,

т.е. меньше значения критической силы идеализированной системы на

$(1 - 0.8576841)100\% \approx 14\%$ .

При меньших значениях начальных несовершенств системы (а они на самом деле, как правило, значительно меньше) кривые равновесных состояний приближаются к кривой идеализированной системы ( $\varphi_0 = 0$ ), и значение

критической силы мало отличается от критической силы, которая соответствует точке бифуркации идеальной системы. На рис. 12 показаны только правые ветви диаграмм равновесных состояний при различных значениях угла  $\varphi_0$ .

Рассмотрим влияние наличия начального угла в системе из второго примера.

Диаграмма равновесных состояний в этом случае описывается функцией

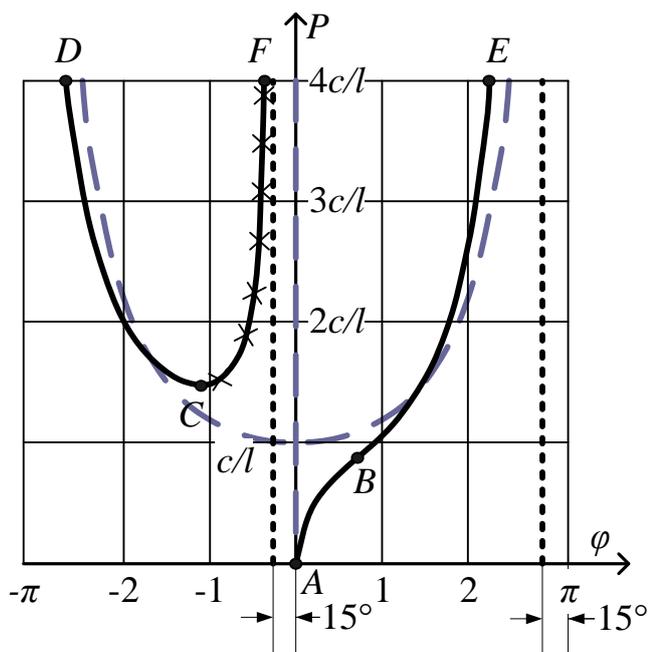


Рис. 11. Диаграмма равновесных состояний системы с начальным несовершенством

<sup>1)</sup> точка перегиба кривой – это точка изменения знака кривизны, т.е. до этой точки одинаковым приращениям угла соответствуют уменьшающиеся приращения силы и увеличивающиеся после этой точки.

$$P = \frac{c(\varphi + 2 \sin \varphi \cos \varphi)}{l \sin(\varphi + \varphi_0)}$$

и при угле  $\varphi_0 = 15^\circ$  имеет вид, представленный на рис. 13. Поведение системы здесь примерно такое же, как и в предыдущем примере: с увеличением силы сразу же увеличивается угол наклона стержня (участок  $AB_1$ ). Затем происходит перескок и дальнейшее увеличение силы по ветви  $B_2E$ . Разгрузка системы происходит с выхлопом в точке  $B_2$ .

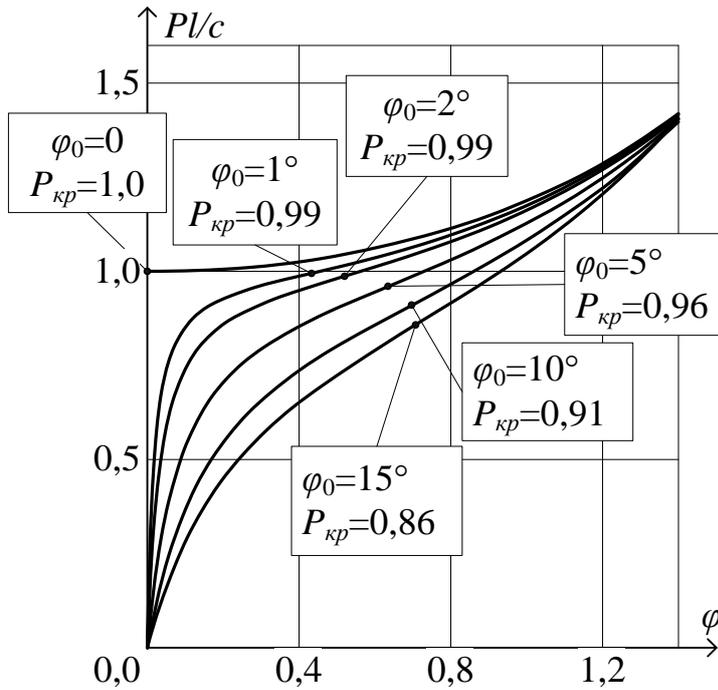


Рис. 12. Влияние величины несовершенства на критическую силу

личается от критической силы этой же предельно идеализированной системы на 8,2%.

$$P_{кр}^e = 2.754931 \frac{c}{l}, \text{ т.е. от}$$

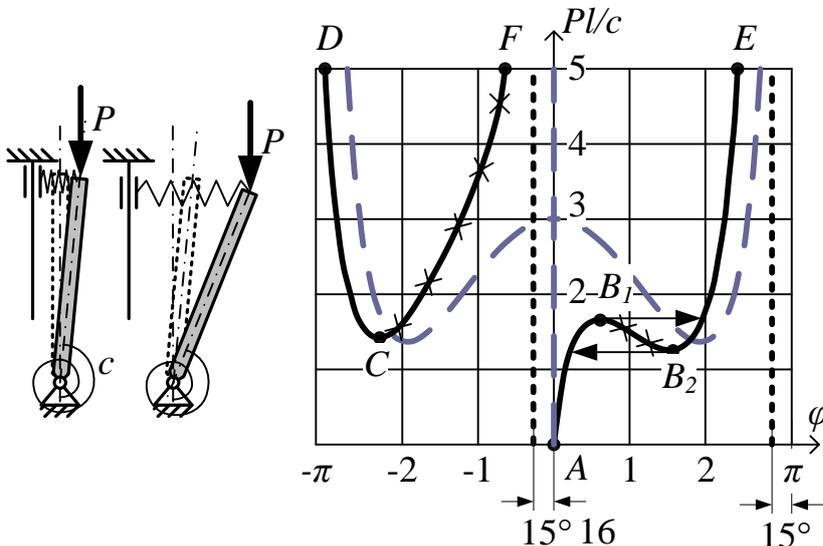


Рис. 13. Диаграмма равновесных состояний системы с начальным несовершенством

ка системы происходит с выхлопом в точке  $B_2$ . Существенное отличие от предыдущего случая заключается в том, что верхняя критическая сила, а она в расчетах систем на устойчивость является наиболее важным параметром, даже при малых начальных дефектах значительно отличается от критической силы предельно идеализированной системы. Например, даже при начальном угле  $\varphi_0 = 1^\circ$  верхняя критическая сила составляет

### Выводы:

1. При наличии начальных несовершенств деформация систем начинается сразу же после приложения нагрузки и точки бифуркации как таковые отсутствуют.

2. Значения критических пара-

метров различных систем по-разному чувствительны к начальным несовершенствам. Для систем с диаграммой, представленной на рис. 11 (характерной для балок и пластин), начальными несовершенствами можно пренебречь. Системы с перескоком (оболочки) очень чувствительны к начальным несовершенствам.

## 5. БИФУРКАЦИОННЫЙ ПОДХОД

Выявление ветвления и определение соседних форм равновесия во всех рассмотренных выше примерах было возможным, потому что для описания поведения этих систем были использованы *нелинейные уравнения*. Это – выражения полной потенциальной энергии (1), (6), уравнения равновесия (2), (4), (7) и, как следствие, выражения функции критического параметра от характерного перемещения, в наших примерах – силы  $P$  от угла поворота  $\varphi$  (5), (8). В этих выражениях угол  $\varphi$  входит во второй степени и (или) является аргументом тригонометрической функции.

Полный анализ нелинейных уравнений, который был сделан для достаточно простых систем, для более сложных систем становится затруднительным, зачастую невозможным. Но этот анализ может оказаться и ненужным. В большинстве случаев для практически важных задач требуется определить *только точку бифуркации*, характеризующую критические параметры системы, без определения соседних к исходной равновесных форм, т.е. без определения *закритического поведения системы*. Такой подход называется **бифуркационным**. Если задачу ставить так, то неважно, по какой кривой на диаграмме равновесных состояний отходят ветви соседних равновесных форм (см. рис. 5, ветви  $BD$ ,  $BE$ ), а важно только положение точки ветвления. Такая формулировка позволяет заменить нелинейные функции, входящие в уравнения устойчивости, на линейные, т.е. провести *линеаризацию*.

В первом рассмотренном примере нелинейное уравнение равновесия имело вид  $c\varphi - Pl \sin \varphi = 0$ . Нелинейную здесь функцию  $\sin \varphi$  можно заменить более простой, например, ее разложением в ряд Тейлора. Поскольку ищется точка бифуркации исходного состояния, то раскладываясь функция  $\sin \varphi$  в ряд Тейлора будет в окрестности  $\varphi = 0$ :

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots \quad (9)$$

Если удерживать в разложении (9) одно слагаемое  $\sin \varphi = \varphi$ , то уравнение равновесия (4) принимает вид

$$c\varphi - Pl\varphi = 0,$$

а это уже линейное уравнение.

Теперь, проводя анализ этого уравнения, т.е. подразумевая наличие нетривиальных решений  $\varphi \neq 0$ , сразу же приходим к значению критической

СИЛЫ

$$P_{кр} = \frac{c}{l},$$

что полностью совпадает со значением (3), полученным ранее.

Если в разложении (9) удержать два слагаемых

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!},$$

то получим хоть и нелинейное, но более простое уравнение

$$c\varphi - Pl \left( \varphi - \frac{\varphi^3}{6} \right) = 0.$$

Критическая сила в этом случае, естественно, такая же:

$$P_{кр} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} P(\varphi) = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{c\varphi}{l \left( \varphi - \frac{\varphi^3}{6} \right)} = \frac{c}{l}.$$

При замене функции  $\sin \varphi$  ее тейлоровским приближением изменяется

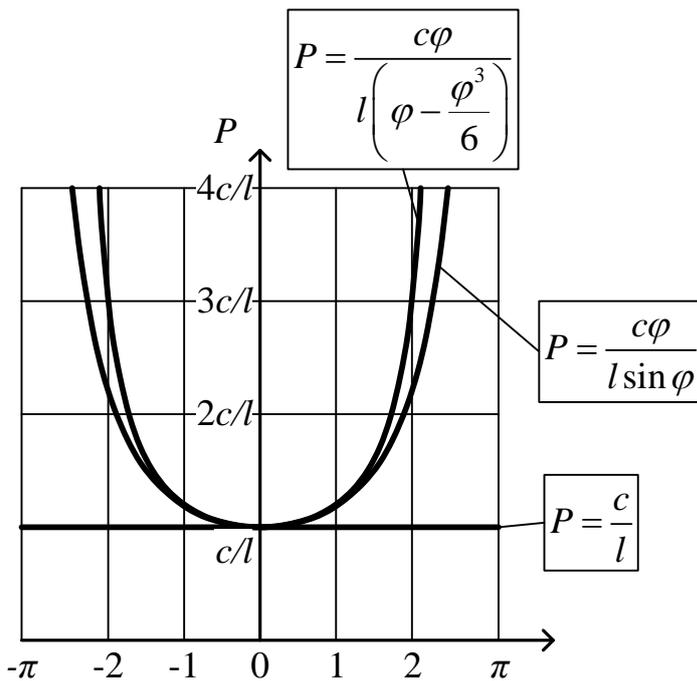


Рис. 14. Изменение диаграммы равновесных состояний при линейаризации

вид кривой, по которой происходит ветвление равновесных форм, но точка ветвления остается та же (рис. 14).

Заметим, что если редукция нелинейных функций до линейных в уравнениях равновесия приводит к правильному значению критических параметров, то для использования энергетического подхода в выражении полной потенциальной энергии необходимо удержать хотя бы одно нелинейное слагаемое в разложении типа (9). Так, в рассматриваемом примере, если выражение полной потенциальной энергии (1)

линеаризовать, используя разложение функции  $\cos \varphi$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $\varphi_0 = 0$

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots,$$

и удерживать только линейное слагаемое  $\cos \varphi = 1$ , то приходим к противоречивому выводу, что потенциальная энергия от силы не зависит:

$$U = \frac{c\varphi^2}{2},$$

поэтому в выражении энергии функции должны быть как минимум квадратичные. Тогда

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!};$$

$$U = \frac{c\varphi^2}{2} - Pl \left( 1 - \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) \right) = (c - Pl) \frac{\varphi^2}{2}.$$

Стационарные значения

$$U' = (c - Pl)\varphi = 0.$$

Условие минимума

$$U'' = c - Pl > 0.$$

Критическое значение силы

$$P = \frac{c}{l}.$$

**Выводы:**

1. По своей природе задачи устойчивости изначально *нелинейные*.
2. Бифуркационный подход – это подход, который позволяет определить точку бифуркации, а значит, и критические параметры системы, но не позволяет определить формы соседние, смежные к исходной форме равновесия (закритическое поведение системы).
3. Бифуркационный подход в задачах устойчивости позволяет значительно упростить исходные соотношения и зачастую дает возможность получить искомый результат.

## 6. СИСТЕМЫ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Все рассмотренные выше системы имели одну степень свободы, для описания положения стержня достаточно было одной координаты – угла поворота  $\varphi$ . В такой системе заранее известно, как будет терять устойчивость стержень, т.е. известна форма потери устойчивости. Для систем с большим числом степеней свободы (в частности, для деформируемых систем число степеней свободы равно бесконечности) форма потери устойчивости опре-

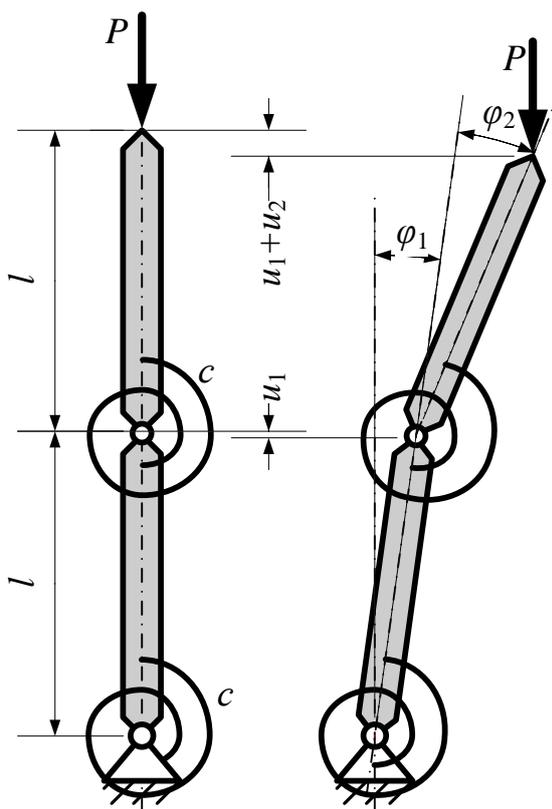


Рис. 15. Система с двумя степенями свободы

деляется после определения критических нагрузок. Причем, если решаются полные нелинейные уравнения, то перемещения точек системы в точности известны для нагрузок, превышающих критические. В этом случае говорят о **закритическом** поведении систем. Если используется бифуркационный подход, то становится возможным определить только форму потери устойчивости, т.е. перемещения точек системы с точностью до постоянного множителя, количественные значения перемещений остаются неизвестными.

Рассмотрим систему с двумя степенями свободы (рис. 15).

Выражение полной потенциальной энергии в отклоненном состоянии состоит из энергий нижней и верхней пружин

$$U_{np1} = \frac{c\varphi_1^2}{2}, \quad U_{np2} = \frac{c\varphi_2^2}{2}$$

и потенциала внешней силы, который равен работе внешней силы на перемещениях системы, взятой с обратным знаком:

$$\begin{aligned} U_P &= -P(u_1 + u_2) = -P(l - l \cos \varphi_1 + l - l \cos(\varphi_1 + \varphi_2)) = \\ &= -Pl(2 - \cos \varphi_1 - \cos(\varphi_1 + \varphi_2)), \end{aligned}$$

$$U = U_{np1} + U_{np2} + U_P = \frac{c\varphi_1^2}{2} + \frac{c\varphi_2^2}{2} - Pl(2 - \cos \varphi_1 - \cos(\varphi_1 + \varphi_2)). \quad (10)$$

Заметим, что на рис. 15 отклонение углов по часовой стрелке принято за положительное направление и введены в качестве отклонений два положительных угла. На самом деле наперед неизвестно, как произойдет поворот стержней.

Выражение полной потенциальной энергии теперь является функцией двух переменных  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , поэтому для нахождения стационарных точек необходимо приравнять к нулю частные производные по каждой из координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \varphi_1} &= 0; \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi_2} &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

что приводит к системе двух уравнений (уравнений равновесия для двух стержней)

$$\begin{cases} c\varphi_1 - Pl(\sin \varphi_1 + \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = 0; \\ c\varphi_2 - Pl \sin(\varphi_1 + \varphi_2) = 0. \end{cases}$$

Эта система уравнений имеет тривиальное решение  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ , описывающее исходное состояние равновесия. При этом возможны соседние равновесные состояния. Если из второго уравнения исключить угол

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{c\varphi_2}{Pl} - \varphi_2$$

и подставить его в первое уравнение, то после некоторых преобразований получим

$$c \arcsin \frac{c\varphi_2}{Pl} + \sin \varphi_2 \sqrt{P^2 l^2 - c^2 \varphi_2^2} - c\varphi_2 (2 + \cos \varphi_2) = 0.$$

Выразить отсюда в явном виде силу  $P$  не представляется возможным. Диаграмма равновесных состояний как график неявно заданной функции (рис. 16) похожа на диаграмму, полученную ранее и представленную на рис. 5, только на ней присутствуют две точки бифуркации и две пары ветвей соседних равновесных состояний.

Определение самих значений критических сил из полученных уравнений сопряжено со значительными вычислительными трудностями.

Воспользуемся **бифуркационным подходом**.

В выражении полной потенциальной энергии (10) заменим тригономет-

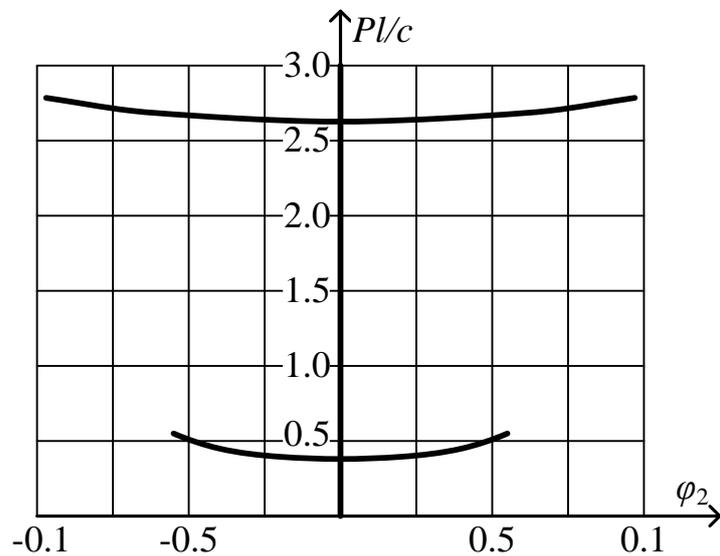


Рис. 16. Диаграмма равновесных состояний системы с двумя степенями свободы

рические функции их разложением в ряд Тейлора и удержим квадратичные слагаемые

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!}.$$

С учетом этого выражение энергии принимает вид

$$U = \frac{c\varphi_1^2}{2} + \frac{c\varphi_2^2}{2} - Pl \left( \frac{\varphi_1^2}{2} + \frac{(\varphi_1 + \varphi_2)^2}{2} \right).$$

Условия минимума (11) приводят к системе двух линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} c\varphi_1 - Pl(2\varphi_1 + \varphi_2) = 0; \\ c\varphi_2 - Pl(\varphi_1 + \varphi_2) = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (c - 2Pl)\varphi_1 - Pl\varphi_2 = 0; \\ -Pl\varphi_1 + (c - Pl)\varphi_2 = 0. \end{cases} \quad (12)$$

$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  по-прежнему является тривиальным решением этой системы; если отбросить это решение и, например, с первого уравнения найти

$$\varphi_2 = \left( \frac{c}{Pl} - 2 \right) \varphi_1,$$

то, подставив это значение во второе уравнение, получим

$$\left( P^2 - \frac{3c}{l}P + \frac{c^2}{l^2} \right) \frac{\varphi_1 l}{P} = 0.$$

Поскольку  $\frac{\varphi_1 l}{P} \neq 0$ , то решение квадратного уравнения

$P^2 - \frac{3c}{l}P + \frac{c^2}{l^2} = 0$  относительно  $P$  приводит к двум значениям силы

$$P_{1,2} = \frac{c}{2l} (3 \pm \sqrt{5}). \quad (13)$$

**Замечание.**

Систему уравнений (12) можно записать в матричном виде

$$\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} - P \begin{bmatrix} 2l & l \\ l & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = 0$$

или в общем виде

$$[A]\{\varphi\} - P[B]\{\varphi\} = 0,$$

что называется *обобщенной задачей на собственные значения* (см. приложение А).

Условие существования нетривиального решения можно записать как условие равенства нулю определителя матрицы, составленной из коэффициентов при координатах  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  в уравнениях (12):

$$\det([A] - P[B]) = \begin{vmatrix} c - 2Pl & -Pl \\ -Pl & c - Pl \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим то же квадратное уравнение относительно  $P$

$$(c - 2Pl)(c - Pl) - (Pl)^2 = 0; \quad P^2 - \frac{3c}{l}P + \frac{c^2}{l^2} = 0.$$

Эти два значения силы (13) соответствуют двум точкам бифуркации на диаграмме рис. 16:

$$P_1 \approx 2.618 \frac{c}{l};$$

$$P_2 \approx 0.3820 \frac{c}{l}.$$

В действительности всегда реализуется *наименьшее положительное значение силы*, т.е.

$$P_{кр} = P_2 = \frac{c}{2l} (3 - \sqrt{5}) \approx 0.3820 \frac{c}{l}.$$

Уже отмечалось, что бифуркационный подход не позволяет узнать поведение системы со значениями нагрузок больше критических, но позволяет вычислить форму потери устойчивости. Для этого из первого уравнения (12) (или из второго) найдем, например, угол

$$\varphi_1 = -\frac{Pl\varphi_2}{2Pl - c}.$$

Подставив сюда значение силы  $P = P_1 = \frac{c}{2l} (3 + \sqrt{5})$  и положив, например, угол  $\varphi_2 = 10^\circ$ , получим значение угла

$$\varphi_1 = -\frac{5(3 + \sqrt{5})}{2 + \sqrt{5}} \approx -6.2.$$

Это говорит только о том, что при указанном значении силы потеря устойчивости происходит при соотношении углов  $\frac{\varphi_1}{\varphi_2} \approx -0.62$ .

Подставив значение второй силы, получим при  $\varphi_2=10^\circ$

$$\varphi_1 = \frac{10(\sqrt{5}-1)}{3-\sqrt{5}} \approx 16.2, \text{ т.е. для}$$

этого значения силы потеря устойчивости реализуется при соотношении углов

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} \approx 1.618. \text{ Формы потери}$$

устойчивости представлены на рис. 17.

### Выводы:

1. Бифуркационный подход позволяет свести задачу устойчивости системы с большим числом степеней свободы, описываемую нелинейной системой уравнений, к задаче на собственные значения для систем линейных алгебраических уравнений.

2. Из всего спектра значений внешних нагрузок критической считается наименьшее положительное значение.

3. В рамках бифуркаци-

онного подхода можно определить только качественную картину (форму) потери устойчивости. Она определяется с точностью до постоянного множителя.

## 7. ДИНАМИЧЕСКИЙ ПОДХОД

В разд. 1 уже было отмечено, что потеря устойчивости – это прежде всего процесс, т.е. для суждения об устойчивости системы необходимо рассмотреть ее движение. При отклонении шарика из первого примера он будет или совершать колебательное движение, или скатываться, или оставаться в отклоненном положении.

Так же и стержень во втором примере при внесении возмущения будет совершать в зависимости от величины силы  $P$  различные по своему характеру движения. Рассмотрим этот пример более подробно. Чтобы получить

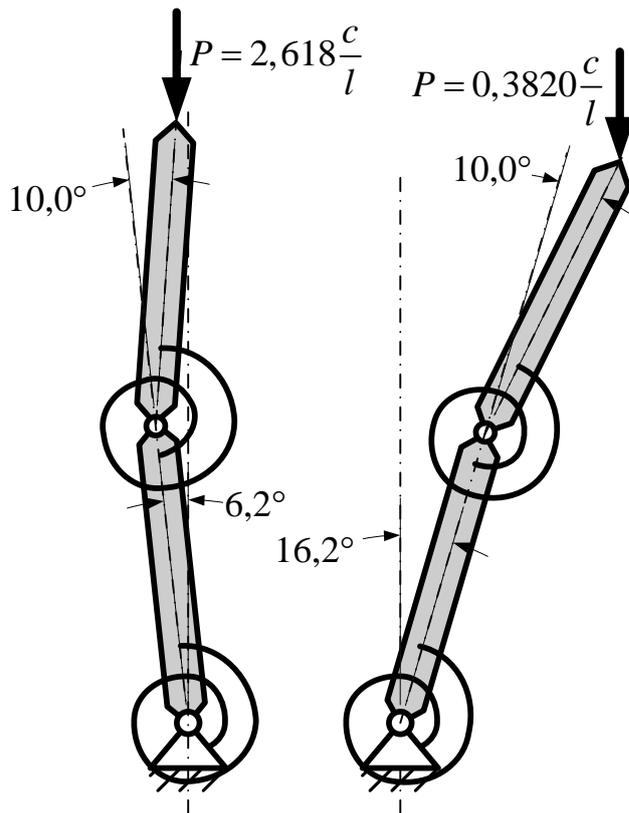


Рис. 17. Формы потери устойчивости

уравнения движения стержня, его необходимо наделить массой. Пусть стержень имеет постоянное сечение площадью  $F$  и изготовлен из материала плотностью  $\rho$ . Тогда к потенциальной энергии пружины и силы (1) добавится энергия массовой силы

$$U = U_{np} + U_P + U_G = \frac{c\varphi^2}{2} - Pl(1 - \cos\varphi) - G\frac{l}{2}(1 - \cos\varphi), \quad (14)$$

где  $G = g\rho Fl$  – массовая сила, которая приложена в центре тяжести стержня (рис. 18);  $g$  – ускорение свободного падения.

Потенциальная энергия будет находиться в балансе с кинетической энергией стержня. При вращении стержня элемент длины  $dx$  будет иметь кинетическую энергию

$$dT = \frac{dmv^2}{2},$$

где  $dm = \rho F dx$  – масса элемента стержня длиной  $dx$ ;

$v = \omega x$  – скорость данного элемента ( $x$  – расстояние от элемента до центра вращения);

$\omega = \dot{\varphi}$  – угловая скорость, точка обозначает дифференцирование

по времени  $t$ :  $\dot{\varphi} \equiv \frac{d\varphi}{dt}$ .

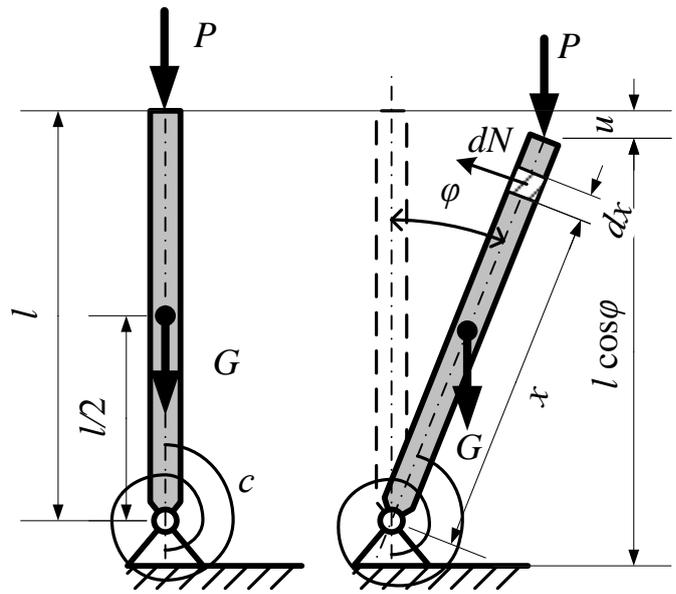


Рис. 18. Стержень, имеющий массу

Кинетическую энергию всего стержня определим так:

$$T = \int dT = \int_0^l \frac{\rho F (\dot{\varphi} x)^2}{2} dx = \frac{\rho F \dot{\varphi}^2 x^3}{6} \Big|_0^l = \frac{\rho F \dot{\varphi}^2 l^3}{6}.$$

С учетом того, что  $G = g\rho Fl$ , окончательно запишем выражение кинетической энергии

$$T = \frac{Gl^2 \dot{\varphi}^2}{6g}. \quad (15)$$

Уравнение движения получим, подставив выражение потенциальной (14) и кинетической (15) энергий в известное из курса теоретической механики уравнение Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{dU}{dq}. \quad (16)$$

Здесь  $q \equiv \varphi$  – обобщенная координата,  $\dot{q} \equiv \dot{\varphi}$  – обобщенная скорость,  $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$  обозначает частную производную по скорости.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{Gl^2 \dot{\varphi}}{3g}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{Gl^2 \ddot{\varphi}}{3g}; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

$$\frac{dU}{d\varphi} = c\varphi - Pl \sin \varphi - G \frac{l}{2} \sin \varphi = c\varphi - \left( P + \frac{G}{2} \right) l \sin \varphi.$$

С учетом полученных производных уравнение Лагранжа (16) примет вид

$$\frac{Gl^2 \ddot{\varphi}}{3g} = - \left( c\varphi - \left( P + \frac{G}{2} \right) l \sin \varphi \right). \quad (17)$$

Это уравнение можно получить, непосредственно приравняв нулю сумму моментов всех сил относительно шарнира:

$M_P = Pl \sin \varphi$  – момент, создаваемый внешней силой  $P$ ;

$M_G = G \frac{l}{2} \sin \varphi$  – момент силы  $G$ ;

$M_{np} = c\varphi$  – момент, создаваемый закрученной пружиной;

$$M_{ин} = \int x dN = \left| \begin{array}{l} dN = dma; \\ dm = \rho F dx; \\ a = \varepsilon x = \ddot{\varphi} x \end{array} \right| = \int_0^l \rho F \ddot{\varphi} x^2 dx = \frac{\rho F l^3 \ddot{\varphi}}{3} = \frac{Gl^2 \ddot{\varphi}}{3g} \quad - \text{ момент сил}$$

инерции, здесь  $dN$  – сила, возникающая в элементе длиной  $dx$  (рис. 18), определяется по второму закону Ньютона,  $a$  – ускорение элемента, оно равно угловому ускорению  $\varepsilon$ , умноженному на расстояние от элемента до центра вращения.

С учетом направления действия сил имеем

$$\sum M = M_P + M_G - M_{np} - M_{ин} = 0.$$

Подставляя значения моментов, приходим к уравнению (17):

$$Pl \sin \varphi + G \frac{l}{2} \sin \varphi - c\varphi - \frac{Gl^2 \ddot{\varphi}}{3g} = 0.$$

Для упрощения определения критического значения силы и формы потери устойчивости линеаризуем данное нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, а именно ввиду малости угла  $\varphi$  можно принять  $\sin \varphi = \varphi$ , и уравнение (17) принимает вид

$$\frac{Gl^2 \ddot{\varphi}}{3g} = \left( P + \frac{G}{2} \right) l \varphi - c\varphi,$$

которое можно записать более компактно:

$$\ddot{\varphi} - K\varphi = 0, \quad (18)$$

здесь  $K = \frac{3g}{lG} \left( \left( P + \frac{1}{2}G \right) - \frac{c}{l} \right)$  – константа, введенная для сокращения записи.

Согласно методу Эйлера частные решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (18) можно найти в виде  $\varphi = e^{kt}$ , где  $k$  – постоянная. Характеристическое уравнение принимает вид  $k^2 - K = 0$ , оно определяет два корня  $k_{1,2} = \pm\sqrt{K}$  и общее решение

$$\varphi(t) = A_1 e^{\sqrt{K}t} + A_2 e^{-\sqrt{K}t}, \quad (19)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий. Для упрощения дальнейшего изложения в качестве таких условий зададим угол отклонения в начальный момент времени  $\varphi_0$  и нулевую угловую скорость.

Выполнение функцией (19) начальных условий

$$\begin{cases} \varphi|_{t=0} = \varphi_0; \\ \dot{\varphi}|_{t=0} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 + A_2 = \varphi_0; \\ A_1 - A_2 = 0 \end{cases}$$

приводит к значениям постоянных интегрирования

$$A_1 = A_2 = \frac{\varphi_0}{2}$$

и следующему виду функции:

$$\varphi(t) = \frac{\varphi_0}{2} \left( e^{\sqrt{K}t} + e^{-\sqrt{K}t} \right). \quad (20)$$

Если  $K > 0$ , то  $\sqrt{K}$  – действительное число, и с течением времени угол, определяемый зависимостью (20), неограниченно растет.

Если константа  $K < 0$ , то корни характеристического уравнения мнимые:  $\sqrt{K} = \sqrt{(-1) \cdot (-K)} = i\sqrt{-K}$ , здесь  $i = \sqrt{-1}$  – мнимая единица. Используя формулу Эйлера  $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ , решение (20) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{\varphi_0}{2} \left( e^{i\sqrt{-K}t} + e^{-i\sqrt{-K}t} \right) = \\ &= \frac{\varphi_0}{2} \left( \cos \sqrt{-K}t + i \sin \sqrt{-K}t + \cos \sqrt{-K}t - i \sin \sqrt{-K}t \right) = \\ &= \varphi_0 \cos \sqrt{-K}t. \end{aligned}$$

Этот закон описывает уже колебательные движения с частотой  $\sqrt{-K}$

(периодом  $\frac{1}{\sqrt{-K}}$ ) и амплитудой  $\varphi_0$ .

Графики движения стержня для различных значений параметра  $K$  изображены на рис. 19. Из него наглядно видно, что при положительных значениях  $K$  (частота  $k$  – действительное положительное число) с течением времени происходит неограниченное отклонение стержня, т.е. система неустойчива, при отрицательных

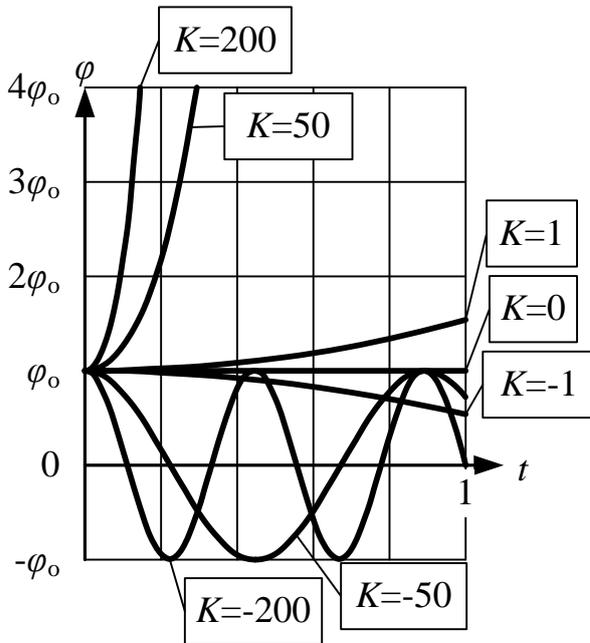


Рис. 19. Графики колебаний стержня с различными частотами

(нет положительных действительных значений частоты  $k$ ) – происходит колебательное движение вокруг положения равновесия, т.е. система устойчива. В данном случае смена устойчивого равновесия неустойчивым (или наоборот) происходит при обращении частоты в ноль, т.е. критическое значение параметра  $K=0$ . С учетом введенного выше обозначения имеем критическое значение силы

$$\frac{3g}{lG} \left( \left( P + \frac{1}{2}G \right) - \frac{c}{l} \right) = 0;$$

$$P = \frac{c}{l} - \frac{1}{2}G.$$

Если вес стержня незначителен и им можно пренебречь, то приходим к ранее определенному с помощью статического подхода значению критической силы (3)

$$P_{кр} = \frac{c}{l}.$$

Ситуация существенно меняется для неконсервативных систем. Рассмотрим в качестве такой системы двухзвенный перевернутый маятник из разд. 6, только в отличие от рассмотренного примера будем считать, что активная сила  $P$  поворачивается вместе со вторым стержнем, и линия ее действия всегда совпадает с осью второго стержня (рис. 20), т.е. это “следящая” сила, так как она “следит” за осью стержня. Здесь задача усложняется тем, что сила  $P$  является неконсервативной, т.е. она не обладает потенциалом. Это следует из того, что при переходе из исходного положения в какое-нибудь отклоненное, работа силы будет зависеть от пути этого перехода, и путей может быть бесконечно много.

Подразумевая использование динамического подхода к решению этой

задачи, снабдим систему массовым элементом. Пусть это будет сосредоточенная масса  $m = \frac{G}{g}$  в точке приложения силы (см. рис. 20).

Сначала решим эту задачу, используя статический подход, причем исходить будем из уравнений равновесия ввиду невозможности записать потенциал силы. Для этого составим уравнения равновесия верхнего и нижнего стержней, вырезая их из системы в отклоненном состоянии (рис. 21). Для верхнего стержня имеем

$$\sum M_A = c\varphi_2 - Gl \sin(\varphi_1 + \varphi_2) = 0.$$

Для нижнего с учетом значения реакции  $N = P \sin \varphi_2 - G \sin \varphi_1$

$$\begin{aligned} \sum M_B = c\varphi_1 - c\varphi_2 + \\ + l(P \sin \varphi_2 - G \sin \varphi_1) = 0. \end{aligned}$$

Линеаризованной системе можно придать вид

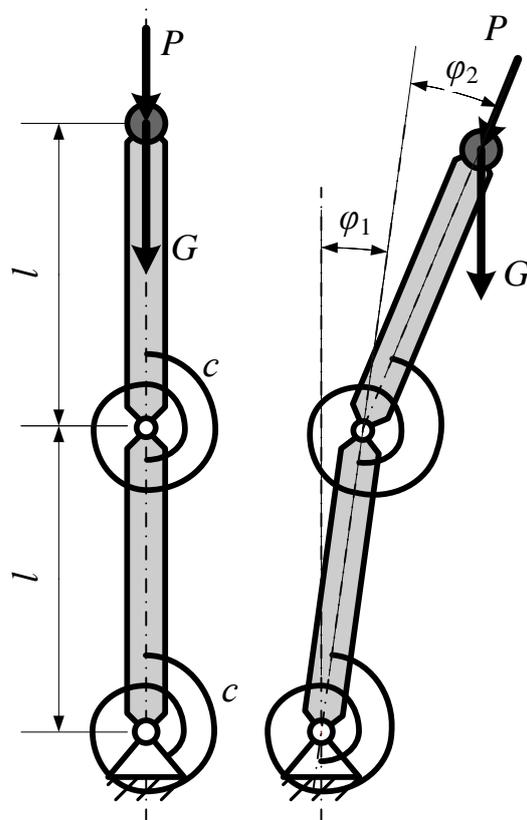


Рис. 20. Неконсервативная система

$$\begin{cases} -Gl\varphi_1 + (c - Gl)\varphi_2 = 0; \\ (c - Gl)\varphi_1 + (Pl - c)\varphi_2 = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Наличие нетривиальных решений приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -Gl & c - Gl \\ c - Gl & Pl - c \end{vmatrix} = \\ = -PGl^2 + 3Glc - G^2l^2 - c^2 = 0, \end{aligned}$$

откуда определяется единственное значение критической силы

$$P_{кр} = \frac{3c}{l} - G - \frac{c^2}{Gl^2}. \quad (22)$$

Чтобы упростить анализ полученного результата, введем безразмерные значения сил и веса:  $P = P \frac{l}{c}$  и  $G = G \frac{l}{c}$ . С учетом этого выражение (22) примет вид

$$P_{кр} = 3 - G - \frac{1}{G}.$$

Зависимость  $P(G)$  представлена на рис. 22.

Согласно полученному результату имеем для веса  $G > \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx 2.618$

отрицательное значение критической силы, т.е. для устойчивого равновесия необходимо поменять направление силы. Если вес уменьшается, то критическое значение силы увеличивается. Это логически понятно. Но

почему только до точки  $G = 1$ ,  $P = 1$ ? С дальнейшим уменьшением веса значение критической силы уменьшается. При

$G < \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0.3820$  оно становится отрицательным, а при стремлении веса к нулю и вовсе стремится к  $-\infty$ . Таким образом, приходим к противоречивому выводу: при нулевом весе устойчивое равновесие невозможно.

Разобраться в ситуации поможет решение этой задачи с помощью динамического подхода. Моменты инерционной силы в уравнениях равновесия (21) определим как производную кинетической энергии  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \omega_i} \right)$ . Выражение кинетической энергии с точностью до квадратов скоростей имеет вид

$$T = \frac{Gl^2}{2g} (\omega_1 + \omega_2)^2,$$

где  $\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt}$ ;  $\omega_2 = \frac{d(\varphi_1 + \varphi_2)}{dt}$  – угловые скорости стержней.

Определив необходимые производные

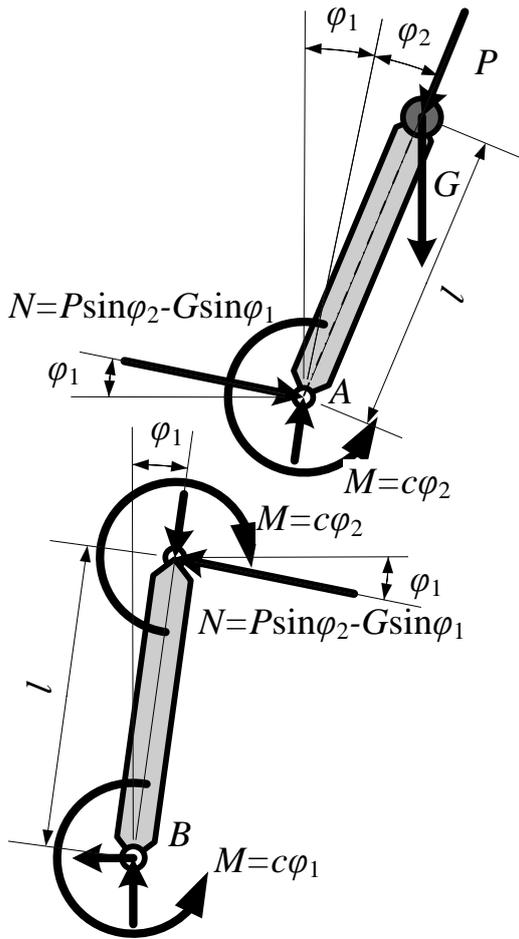


Рис. 21. Равновесие элементов системы

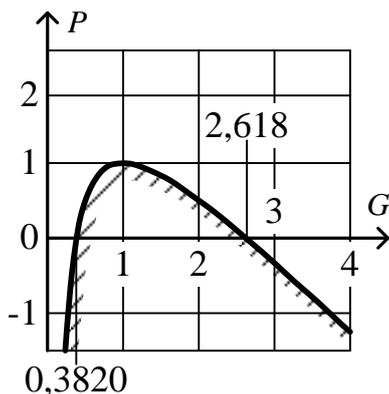


Рис. 22. Изменение критической силы при изменении веса

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\omega}_1} \right) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\omega}_2} \right) = \\ &= \frac{Gl^2}{g} (\dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_2) = \frac{Gl^2}{g} (2\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) \end{aligned}$$

и подставив их в уравнения равновесия (21), получим уравнения движения

$$\begin{cases} \frac{Gl^2}{g} (2\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) - Gl\varphi_1 + (c - Gl)\varphi_2 = 0; \\ \frac{Gl^2}{g} (2\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) + (c - Gl)\varphi_1 + (Pl - c)\varphi_2 = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Решение, как и в предыдущем случае, будем искать в виде

$$\varphi_1 = Ae^{kt}, \quad \varphi_2 = Be^{kt}. \quad (24)$$

Подставляя значения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  в систему дифференциальных уравнений (23), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно амплитуд  $A$  и  $B$

$$\begin{cases} \left( \frac{2Gl^2}{g} k^2 - Gl \right) A + \left( \frac{Gl^2}{g} k^2 + c - Gl \right) B = 0; \\ \left( \frac{2Gl^2}{g} k^2 + c - Gl \right) A + \left( \frac{Gl^2}{g} k^2 + Pl - c \right) B = 0. \end{cases}$$

Условие существования нетривиальных решений приводят к неполному квадратному уравнению относительно частоты  $k$

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} \frac{2Gl^2}{g} k^2 - Gl & \frac{Gl^2}{g} k^2 + c - Gl \\ \frac{2Gl^2}{g} k^2 + c - Gl & \frac{Gl^2}{g} k^2 + Pl - c \end{vmatrix} = \\ &= \frac{2k^2 Gl^3}{g} \left( P + G - \frac{5c}{2l} \right) - Gl^2 \left( P - 3\frac{c}{l} + G + \frac{c^2}{Gl^2} \right) = 0, \end{aligned}$$

а сама частота определяется формулой

$$k = \pm \sqrt{\frac{g}{2l} \left( P - 3\frac{c}{l} + G + \frac{c^2}{Gl^2} \right) \left( P + G - \frac{5c}{2l} \right)^{-1}}. \quad (25)$$

Если действительная часть решения (25) будет положительной (в данном случае при любом положительном значении подкоренного выражения), то величина углов отклонения стержней (24) со временем будет неограни-

ченно расти, т.е. система неустойчива. Для устойчивого равновесия необходимы отрицательные значения величины

$$\frac{P - 3\frac{c}{l} + G + \frac{c^2}{Gl^2}}{P + G - \frac{5c}{2l}} < 0,$$

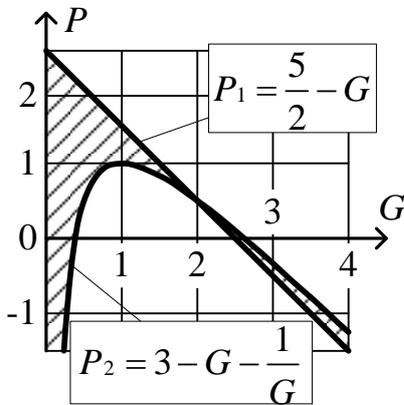
т.е. либо

$$\begin{cases} P - 3\frac{c}{l} + G + \frac{c^2}{Gl^2} > 0; \\ P + G - \frac{5c}{2l} < 0; \end{cases} \quad 3\frac{c}{l} - G - \frac{c^2}{Gl^2} < P < \frac{5c}{2l} - G, \quad (26)$$

либо

$$\begin{cases} P - 3\frac{c}{l} + G + \frac{c^2}{Gl^2} < 0; \\ P + G - \frac{5c}{2l} > 0; \end{cases} \quad \frac{5c}{2l} - G < P < 3\frac{c}{l} - G - \frac{c^2}{Gl^2}. \quad (27)$$

Теперь результат можно разумно истолковать. На рис. 23 показаны зоны устойчивости, здесь графики функций, входящих в неравенства (26) и (27), представлены в безразмерном виде ( $P = P\frac{l}{c}$ ,



$$G = G\frac{l}{c}, P_1 = \frac{5}{2} - G, P_2 = 3 - G - \frac{1}{G}).$$

Так, например, если  $G = 1$ , равновесие будет устойчивым при любых значениях силы в диапазоне  $1 < P < 1.5$  (неравенство (26)), если  $G = 2.5$ , то  $0 < P < 0.1$  (неравенство (27)), если  $G > \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx 2.618$ , то устойчивое равновесие с таким направле-

Рис. 23. Зоны устойчивости неконсервативной системы

нием силы невозможно, а при  $G < \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0.3820$  возможным становится

только одно значение критической силы  $P_{кр} = \frac{5c}{2l} - G$ . Наконец, если весом

можно пренебречь, то  $P = 2.5$ , т.е.  $P_{кр} = \frac{5c}{2l}$ .

**Выводы:**

1. В динамическом подходе критические параметры характеризуются отсутствием действительных положительных частей в решении характеристического уравнения.

2. В случае консервативных задач динамический и статический подходы ведут к одним и тем же значениям критических параметров.

3. В случае неконсервативных систем применение статического подхода может привести к ошибочному результату.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ МАТРИЦ

#### А.1. Частная задача на собственные значения

Частная или обычная задача на собственные значения ставится так. Пусть есть система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = Px_1; \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n = Px_2; \\ \dots \\ c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots + c_{nn}x_n = Px_n, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

где  $c$  – известные постоянные коэффициенты;

$x$  – неизвестные;

$P$  – некоторый также неизвестный параметр.

Уравнения системы (А.1) всегда будут выполняться тождественно при  $x_i = 0, i = 1..n$ . В задаче требуется определить такой параметр  $P$  и такие значения  $x_i$ , не равные одновременно нулю, чтобы уравнения системы (А.1) выполнялись. В этом случае параметр  $P$  называется **собственным числом**, а набор  $x_i, i = 1..n$ , – **собственным вектором** задачи. В действительности собственных чисел  $P$  будет ровно  $n$ , и им будет соответствовать ровно  $n$  собственных векторов  $x_i, i = 1..n$ .

Собственные числа находятся из условия существования нетривиальных решений. Для этого систему (А.1) записывают в матричном виде

$$[C]\{x\} = P\{x\},$$

где

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \text{ – матрица известных коэффициентов;}$$

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix} - \text{вектор неизвестных.}$$

Условие существования ненулевых решений – это равенство нулю определителя  $\det([C] - P[E]) = 0$  ( $[E]$  – единичная матрица):

$$\begin{vmatrix} c_{11} - P & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - P & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} - P \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим алгебраическое уравнение относительно  $P$  со старшей степенью  $n$ , которое называется *характеристическим*, или *вековым*. Алгебраическое уравнение степени  $n$  имеет  $n$  корней, т.е. из этого уравнения можно определить  $n$  значений  $P$ , которые и составляют вектор собственных чисел. Теперь, подставляя поочередно в систему (А.1) собственные числа  $P_i, i=1\dots n$  и задавая значение одной из неизвестных, например  $x_1 = 1$ , находим остальные неизвестные  $x_i, i=2\dots n$ , которые определяют собственный вектор  $\{x\}_i$ , соответствующий собственному числу  $P_i, i=1\dots n$ .

**Пример.**

Дана система уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = Px_1; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = Px_2; \\ x_2 + 2x_3 = Px_3, \end{cases}$$

или в матричном виде –

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}.$$

Условие существования ненулевых решений имеет вид

$$\begin{vmatrix} 4 - P & 2 & 1 \\ 1 & 2 - P & 2 \\ 0 & 1 & 3 - P \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим характеристическое уравнение (кубическое уравнение относительно  $P$ )

$$P^3 - 8P^2 + 16P - 5 = 0.$$

Нетрудно убедиться, что корнями этого уравнения будут  $P_1 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$ ,  $P_2 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ ,  $P_3 = 5$ .

Подставив в исходную систему уравнений значение силы  $P = P_1 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$  и положив  $x_1 = 1$ , получим систему трех уравнений относительно неизвестных  $x_2$  и  $x_3$

$$\begin{cases} 4 + 2x_2 + x_3 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}); \\ 1 + 2x_2 + 2x_3 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})x_2; \\ x_2 + 2x_3 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})x_3. \end{cases}$$

Решая любые два уравнения относительно неизвестных  $x_2$  и  $x_3$ , получим

$$\begin{aligned} x_2 &= -\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}), \\ x_3 &= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}). \end{aligned}$$

Окончательно, собственный вектор, соответствующий собственному значению  $P_1 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$ ,

$$\{x\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) \\ \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \end{Bmatrix}.$$

Аналогично определяется собственный вектор, соответствующий собственному значению  $P_2 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$  и  $P_3 = 5$ :

$$\{x\}_2 = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -\frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) \\ \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \end{array} \right\}, \quad \{x\}_3 = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} \end{array} \right\}.$$

Собственные векторы определяются с точностью до постоянного множителя, т.е. если в последнем случае положить  $x_1 = 7$ , то собственный вектор будет

$$\{x\}_3 = \left\{ \begin{array}{c} 7 \\ 3 \\ 1 \end{array} \right\}.$$

## А.2. Обобщенная задача на собственные значения

Обобщенная (общая) задача на собственные значения отличается от частной задачи (А.1) тем, что в правой части уравнений, так же, как и в левой, стоит сумма

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = P(q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + \dots + q_{1n}x_n); \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n = P(q_{21}x_1 + q_{22}x_2 + \dots + q_{2n}x_n); \\ \dots \\ c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots + c_{nn}x_n = P(q_{n1}x_1 + q_{n2}x_2 + \dots + q_{nn}x_n), \end{cases} \quad (\text{А.2})$$

где  $q$ , так же, как и  $c$ , – известные постоянные коэффициенты.

Матричная запись имеет вид

$$[C]\{x\} = P[Q]\{x\},$$

и условие существования нетривиального решения – это равенство нулю определителя  $\det([C] - P[Q]) = 0$ :

$$\begin{vmatrix} c_{11} - q_{11}P & c_{12} - q_{12}P & \dots & c_{1n} - q_{1n}P \\ c_{21} - q_{21}P & c_{22} - q_{22}P & \dots & c_{2n} - q_{2n}P \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} - q_{n1}P & c_{n2} - q_{n2}P & \dots & c_{nn} - q_{nn}P \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим алгебраическое уравнение степени  $n$ , откуда находятся  $n$  собственных чисел  $P$ .

Собственные векторы  $\{x\}_i$ ,  $i = 1..n$ , соответствующие собственным числам  $P_i$ ,  $i = 1..n$ , определяются так же, как и в обычной задаче на собственные значения.

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

### ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Определить критическое значение силы  $P$  и форму потери устойчивости системы, изображенной на рис. Б.1.

Варианты данных приведены в табл. Б.1.

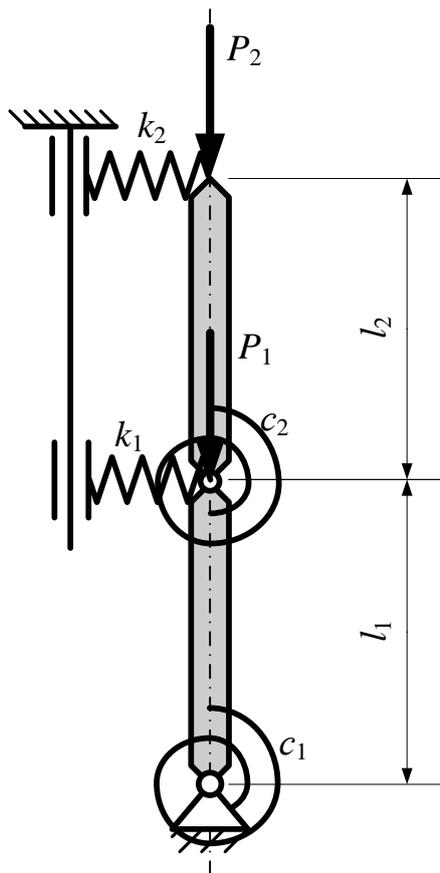


Рис. Б.1

**Таблица Б.1**  
**Варианты данных**

Номер варианта	$l_1$	$l_2$	$P_1$	$P_2$	Номер варианта	$c_1$	$c_2$	$k_1$	$k_2$
1	$l$	$l$	$0.5P$	$P$	1	$kl^2$	$0.75 kl^2$	$k$	$0$
2	$2l$	$l$	$1.5P$	$P$	2	$2kl^2$	$Kl^2$	$0.75k$	$k$
3	$0.5l$	$l$	$P$	$2P$	3	$1.5kl^2$	$0$	$0$	$2k$
4	$3l$	$2l$	$2P$	$P$	4	$kl^2$	$2kl^2$	$0$	$k$
5	$l$	$l$	$P$	$0$	5	$kl^2$	$0$	$k$	$0.75k$
6	$1.5l$	$0.75l$	$0$	$P$	6	$kl^2$	$0$	$0$	$k$
7	$l$	$l$	$P$	$2P$	7	$0$	$2kl^2$	$3k$	$k$
8	$l$	$0.5l$	$2P$	$P$	8	$kl^2$	$Kl^2$	$0$	$k$
9	$l$	$l$	$P$	$0$	9	$0.75kl^2$	$0$	$k$	$2k$
10	$2l$	$l$	$3P$	$P$	10	$kl^2$	$2kl^2$	$0$	$k$
11	$l$	$l$	$P$	$2P$	11	$1.5kl^2$	$0.5 kl^2$	$0$	$k$
12	$0.75l$	$l$	$0.5P$	$P$	12	$kl^2$	$0$	$k$	$0.25k$
13	$l$	$l$	$P$	$0.5P$	13	$0$	$2kl^2$	$k$	$k$
14	$3l$	$2l$	$P$	$2P$	14	$2kl^2$	$0$	$0$	$k$
15	$l$	$l$	$0$	$P$	15	$kl^2$	$1.5 kl^2$	$k$	$0$
16	$0.5l$	$l$	$P$	$0$	16	$0.75kl^2$	$0.75 kl^2$	$0$	$k$
17	$l$	$0.5l$	$0$	$P$	17	$kl^2$	$Kl^2$	$2k$	$k$
18	$2l$	$l$	$0.5P$	$P$	18	$kl^2$	$0$	$k$	$0.25k$
19	$0.5l$	$l$	$P$	$0.5P$	19	$0$	$2kl^2$	$k$	$k$
20	$3l$	$2l$	$P$	$2P$	20	$2kl^2$	$0$	$2k$	$k$
21	$l$	$l$	$1.5P$	$P$	21	$kl^2$	$0$	$k$	$0.75k$
22	$1.5l$	$0.75l$	$P$	$P$	22	$0$	$2kl^2$	$0$	$k$
23	$l$	$l$	$0$	$P$	23	$kl^2$	$Kl^2$	$2k$	$k$
24	$l$	$0.5l$	$2P$	$P$	24	$0.75kl^2$	$0$	$k$	$k$
25	$l$	$l$	$P$	$0$	25	$kl^2$	$2kl^2$	$k$	$2k$
26	$3l$	$2l$	$0$	$P$	26	$1.5kl^2$	$0.5 kl^2$	$0$	$k$
27	$l$	$l$	$P$	$2P$	27	$kl^2$	$0$	$k$	$k$
28	$0.5l$	$l$	$2P$	$P$	28	$0$	$2kl^2$	$0$	$0.25k$
29	$l$	$0.5l$	$P$	$0$	29	$2kl^2$	$0$	$2k$	$k$
30	$0.75l$	$l$	$3P$	$P$	30	$kl^2$	$0$	$k$	$k$
31	$l$	$l$	$P$	$2P$	31	$0.75kl^2$	$2kl^2$	$k$	$0$
32	$3l$	$2l$	$0.5P$	$P$	32	$kl^2$	$0$	$k$	$k$
33	$l$	$l$	$P$	$0.5P$	33	$kl^2$	$1.5kl^2$	$k$	$k$
34	$0.5l$	$l$	$P$	$2P$	34	$0.2 kl^2$	$2kl^2$	$0$	$k$
35	$l$	$0.5l$	$1.5P$	$P$	35	$kl^2$	$0$	$2k$	$k$

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем / С. П. Тимошенко. – М. : Гостехиздат, 1946. – 532 с.
2. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. – М. : Наука, 1967. – 984 с.
3. Блейх Ф. Устойчивость металлических конструкций / Ф. Блейх. – М. : Физматгиз, 1959. – 544 с.
4. Власов В. З. Общая теория оболочек / В. З. Власов. – М. ; Л. : Гос. изд-во техн.-теор. лит-ры, 1949. – 784 с.
5. Григолюк Э. И. Устойчивость оболочек / Э. И. Григолюк, В. В. Кабанов. – М. : Наука, 1978. – 359 с.
6. Алфутов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем / Н. А. Алфутов. – М. : Машиностроение, 1991. – 334 с.
7. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций / Г. Циглер. – М. : Мир, 1971. – 192 с.
8. Ключников В. Д. Лекции по устойчивости деформируемых систем : учеб. пособие / В. Д. Ключников. – М. : МГУ, 1986. – 224 с.
9. Бидерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций / В. Л. Бидерман. – М. : Машиностроение, 1977. – 488 с.
10. Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний / Я. Г. Пановко. – М. : Наука, 1991. – 256 с.

## Содержание

Предисловие .....	3
1. Понятие устойчивости .....	4
2. Энергетический подход и подход Эйлера .....	6
3. Диаграммы равновесных состояний.....	10
4. Системы с начальными несовершенствами.....	14
5. Бифуркационный подход.....	17
6. Системы с большим числом степеней свободы .....	19
7. Динамический подход.....	24
Приложение А Задача на собственные значения для матриц.....	33
Приложение Б Задачи для самостоятельного решения .....	37
Библиографический список.....	39

Минтюк Виталий Борисович

УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГИХ СИСТЕМ  
Часть I  
ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ УПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Редактор Л.В. Ескевич

Св. план, 2008

Подписано в печать 27.05.2008

Формат 60x84 1/16. Бум. офс. №2. Офс. печ.

Усл. печ. л. 2,2. Уч.-изд. л. 2,56. Т. 100 экз. Заказ 229. Цена свободная

---

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского

"Харьковский авиационный институт"

61070, Харьков–70, ул. Чкалова, 17

<http://www.khai.edu>

Издательский центр "ХАИ"

61070, Харьков–70, ул. Чкалова, 17

[izdat@khai.edu](mailto:izdat@khai.edu)