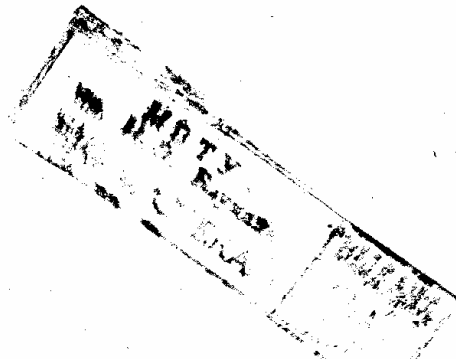


0-200
Л. И. Балабух
Н. А. Алфутов
В. И. Усюкин

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА РАКЕТ

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебника для студентов
машиностроительных специальностей
вузов



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1984

ББК 22.25+39.62
Б20
УДК 624.04+629.76

Рецензенты: кафедра «Строительная механика и прочность летательных аппаратов» Московского авиационного института (зав. кафедрой акад. И. Ф. Образцов); д-р техн. наук, проф. В. В. Васильев (Московский авиационно-технологический институт).

Балабух Л. И., Алфутов Н. А., Усюкин В. И.
Б20 Строительная механика ракет: Учебник для машиностроительных спец. вузов. — М.: Высш. шк., 1984. — 391 с., ил.

В пер.: 1 р. 10 к.

В учебнике приведены сведения из механики деформируемых тел, основные разделы статики и устойчивости элементов тонкостенных конструкций, методы расчета на прочность различных отсеков ракет. Большое внимание уделено численным методам расчета с использованием ЭВМ. Кроме того, рассматриваются простые приближенные методы, позволяющие быстро выполнить проектировочные расчеты при эскизном проектировании.

Б $\frac{3606030000-388}{001(01)-84}$ 177-84

ББК 22.25+39.62
6С1+6Т6

© Издательство «Высшая школа», 1984

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Ракетостроение и космонавтика — одни из самых молодых отраслей науки и промышленности. Их сравнительно малый возраст объясняется прежде всего теми трудностями, с которыми столкнулся человек в борьбе с земным тяготением. Проблема соотношения веса конструкции ракеты и ее прочности, пример, наглядно иллюстрирующий диалектический закон единства и борьбы противоположностей, — нигде не стоит, пожалуй, так остро, как в ракетостроении. Чтобы создать современные средства космической техники, необходимо использовать все достижения научно-технической революции: и легкие высокопрочные материалы, и самую прогрессивную технологию, и новые методы расчета и проектирования. Успешное овладение этими методами, отличительные черты которых — самое широкое применение ЭВМ, должно стать главной целью для вас, будущих строителей ракет и космических аппаратов.

Все советские люди заслуженно гордятся выдающимися успехами нашей страны в овладении космическим пространством и его мирном использовании. Тем бóльшая ответственность лежит на вас — не уступать передовых позиций, поддерживать приоритет советской науки, техники и технологии. Помочь вам в этом призвана, в частности, и настоящая книга.

Будьте настойчивы и упорны в учебе, а в дальнейшем — и в труде на благо нашей Родины и советского народа.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Одной из особенностей создания новых конструкций современных ракет является неразрывная связь проектирования с аэродинамическими, температурными, динамическими и прочностными расчетами. Инженер, специализирующийся в области ракетостроения, должен уверенно ориентироваться в теоретических основах и практических методах всех этих расчетов. В настоящее время имеются учебники, учебные пособия и монографии, в которых достаточно полно, строго и доступно изложены вопросы аэродинамики, теплопередачи, динамики применительно к ракетостроению*. Поэтому в настоящем учебнике было решено ограничиться только вопросами, непосредственно связанными с прочностными статическими расчетами конструкции ракет.

Содержание учебника разделено на три части.

В первых двух частях, кроме общетеоретических основ прочностного расчета, изложены современные численные методы, ориентированные на использование ЭВМ.

В третьей части особое внимание уделено простым аналитическим методам расчета типичных элементов конструкций ракет. Приводимые здесь примеры не могут дать даже отдаленного представления о тех мощных комплексах программ, какими пользуются при уточненных современных прочностных расчетах. Но упрощенные методы расчета не потеряли и, видимо, еще очень долго не потеряют своего значения. Во-первых, простые аналитические решения, наглядно отражающие влияние отдельных параметров конструкции, необходимы для правильного понимания особенностей силовой схемы конструкции ракеты. Во-вторых, умение пользоваться простыми методами расчета, не требующими сложных программ счета, с одной стороны, избавляет проектировщика от необходимости каждый раз прибегать к помощи мощных ЭВМ для получения оперативного результата на начальной стадии проектирования, с другой стороны, помогает ему контролировать и правильно истолковывать результаты уточненных поверочных расчетов. Наконец, упрощенные аналитические методы используются в системах автоматизированного проектирования на этапах оптимизации силовых конструкций, когда производится многократное повторение прочностного расчета с целью подбора оптимальных параметров отдельных элементов и всей конструкции.

* Зарубин В. С. Температурные поля в конструкции летательных аппаратов. М., 1978; Колесников К. С. Динамика ракет. М., 1980; Краснов Н. Ф. Аэродинамика. М., 1980; и др.

Для понимания содержания книги необходимо знание обычных курсов теоретической механики и высшей математики (основные сведения из вариационного исчисления и матричной алгебры приведены в двух небольших приложениях) и знакомство с курсами аэродинамики, теплопередачи и динамики конструкций. И, конечно, изучению курса строительной механики ракет должно предшествовать детальное и тщательное изучение сопротивления материалов.

Гл. 5 и § 1.1 ... 1.4, 6.1 ... 6.4, 10.2, 12.2 принадлежат Л. И. Балабуху; гл. 2, 4, 7, 8, 14 и § 1.5, 1.6, 6.6, 12.4, 13.1 — Н. А. Алфутову; гл. 3, 9, 11 и § 6.5, 10.1, 10.3, 10.4, 12.1, 12.3, 13.2, 13.3 — В. И. Усюкину.

К глубокому прискорбию замечательному советскому ученому и педагогу Льву Ивановичу Балабуху, возглавлявшему авторский коллектив, не суждено было увидеть окончательный вариант рукописи этой книги.

Авторы выражают свою искреннюю признательность официальным рецензентам, а также В. Л. Бидерману и Л. А. Шаповалову за ряд замечаний и советов и А. Н. Семенову, оказавшему неоценимую помощь при подготовке рукописи.

Авторы заранее благодарны читателям, которые выскажут свои замечания и пожелания, и просят направлять их по адресу: 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., 29/14.

Часть I

ОСНОВЫ МЕХАНИКИ ТВЕРДОГО ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА. ЭЛЕМЕНТЫ ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Глава I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ ТВЕРДОГО ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА

Практическая цель механики твердого деформируемого тела — описание поведения реальных тел при силовом и тепловом воздействиях. Используемый при этом математический аппарат базируется на общих законах механики и ряде упрощающих допущений. В первой главе используются два таких допущения: допущение о сплошности и допущение об идеальной упругости.

Допущение о сплошности, приписывающее твердому телу способность заполнять объем без всяких пустот, позволяет ввести понятие *напряженно-деформированного состояния* в точке тела и записать условия равновесия элемента тела в виде дифференциальных уравнений. Кроме того, это допущение дает возможность считать перемещения точек тела при деформации непрерывными и дифференцируемыми функциями координат и выразить компоненты деформаций через производные этих функций.

Полученное в результате допущения о сплошности абстрактное тело наделяют некоторыми механическими свойствами, аппроксимирующими способность реальных тел сопротивляться деформированию. Одним из таких свойств, которым в той или иной степени обладают все конструкционные материалы, является *свойство упругости*, т. е. способность восстанавливать первоначальные размеры и форму после снятия нагрузок. Допущение об идеальной упругости позволяет для любого момента нагружения ввести взаимно однозначные зависимости между напряжениями и деформациями в каждой точке тела. Частный, но практически наиболее важный случай — это линейно-упругое тело Гука, достаточно полно отражающее свойства конструкционных материалов при малых деформациях.

Из общих положений механики в первой главе привлечены два основных: *начало возможных перемещений* и *принцип минимума полной потенциальной энергии*.

§ 1.1. Внешние силы и напряжения

При нагружении на тело действуют объемные (массовые) силы, непрерывно распределенные по объему тела, и поверхностные, действующие по поверхности. (Поверхностные силы возникают при взаимодействии деформируемого тела с жидкостью, газом или соседними твердыми телами.) Это — внешние силы. При приложении к телу внешних сил и (или) теплового воздействия в нем появляются напряжения. Напряжения характеризуют уровень интенсивности внутренних сил в материале конструкции.

Напряжением есть отношение силы к площади поверхности, разделяющей тело на две части. Если обозначить площадь элементарной площадки на этой поверхности dS , а приложенную к ней силу — $d\vec{F}$, то напряжение

$$\vec{\sigma} = d\vec{F}/dS.$$

Напряжение $\vec{\sigma}$ можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие: вдоль нормали \vec{n} к площадке и в плоскости этой площадки (рис. 1.1). Эти две составляющие соответствуют нормальному σ_n и тангенциальному τ_n напряжениям. Модуль вектора напряжения $\sigma = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau_n^2}$.

Чтобы полностью определить напряженное состояние в точке, достаточно рассмотреть проекции на координатные оси x, y, z составляющих вектора напряжения, действующих на площадках, параллельных координатным плоскостям. Обозначим через $\sigma_x; \tau_{xy}; \tau_{xz}$ нормальный и тангенциальные компоненты напряжения на площадке $x = \text{const}$, параллельной координатной плоскости yz (рис. 1.2). Первый индекс в записи касательных напряжений характеризует положение площадки, в которой лежит составляющая вектора напряжения, второй — направление этой составляющей. Для площадки $y = \text{const}$ компоненты напряжения будут $\sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}$, для площадки $z = \text{const}$ — соответственно $\sigma_z, \tau_{zx}; \tau_{zy}$. Введенные, таким образом, компоненты напряжения можно представить в форме матрицы

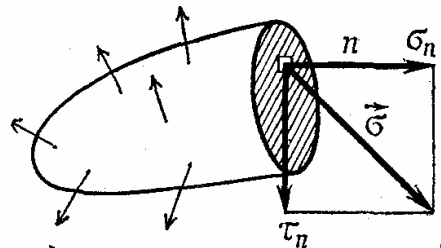


Рис. 1.1

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Вследствие известного из курса сопротивления материалов свойства парности касательных напряжений ($\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}; \tau_{zx} = \tau_{xz}$) матрица (1.1) является симметричной.

Из условий равновесия бесконечно малой пирамиды, боковые грани которой параллельны координатным плоскостям, а основанием явля-

ется площадка с заданным направлением нормали \vec{n} (рис. 1.3), можно получить уравнения Коши:

$$\begin{aligned}\sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n &= X_n; \\ \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n &= Y_n; \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n &= Z_n.\end{aligned}\quad (1.2)$$

Здесь $l = \cos(\vec{n}, x)$, $m = \cos(\vec{n}, y)$, $n = \cos(\vec{n}, z)$ — направляющие косинусы нормали \vec{n} к площадке, для которой определяется вектор напряжения $\vec{\sigma}$, а X_n, Y_n, Z_n — проекции этого вектора на оси координат.

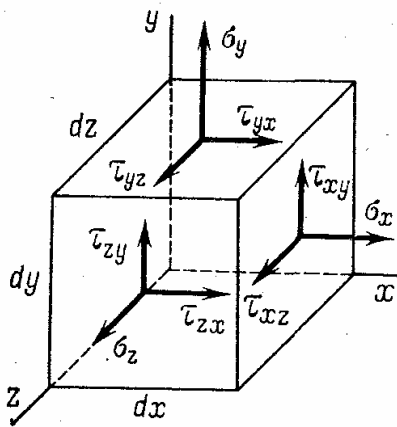


Рис. 1.2

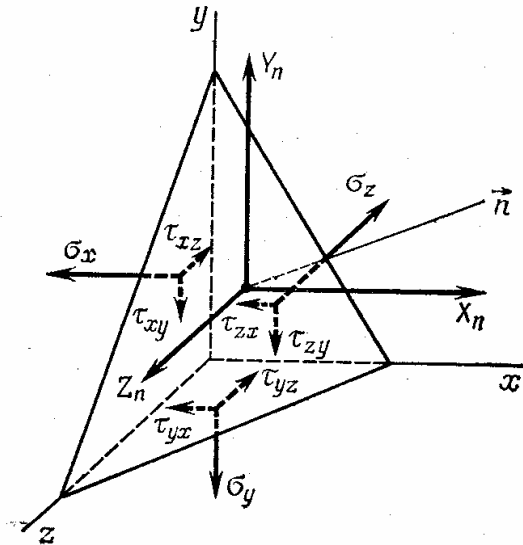


Рис. 1.3

Если для данной точки заданы компоненты напряжений, то по формулам (1.2) можно определить компоненты вектора напряжения $\vec{\sigma}$ для любой площадки, проходящей через эту точку. Модуль вектора напряжения

$$\sigma = \sqrt{X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2}.$$

Нормальное напряжение

$$\sigma_n = X_n l + Y_n m + Z_n n.$$

Касательное напряжение

$$\tau_n = \sqrt{\sigma^2 - \sigma_n^2}.$$

Систему уравнений (1.2) можно рассматривать как преобразование вектора \vec{n} с компонентами l, m, n в вектор $\vec{\sigma}$ с компонентами X_n, Y_n, Z_n с помощью матрицы $[T_\sigma]$, которая называется тензором напряжений.

При изменении ориентации плоскости разделения модули векторов σ_n и τ_n меняются. Существуют такие положения плоскости, когда касательные напряжения равны нулю, а нормальные достигают экстремальных значений. Такие плоскости называются главными, а

соответствующие нормальные напряжения — главными напряжениями. Главные напряжения определяются как корни кубического уравнения

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0,$$

где J_1, J_2, J_3 — инварианты тензора напряжений. Их можно выразить через напряжения:

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \quad J_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2;$$

$$J_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2.$$

Средним напряжением называется величина

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} J_1 = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (1.3)$$

Тензор напряжений (1.1) можно представить в виде суммы двух тензоров

$$[T_\sigma] = [T_0] + [D_\sigma],$$

где

$$[T_0] = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix}; \quad (1.4)$$

$$[D_\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_0 \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

Тензор $[T_0]$ называется тензором всестороннего растяжения или шаровым тензором, а тензор $[D_\sigma]$ — девиатором напряжений.

Уравнения механики твердого деформируемого тела удобно представлять в векторно-матричной форме.

Компоненты напряжений могут быть объединены в вектор

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}\}^T, \quad (1.6)$$

и соотношения (1.2) в матричной форме принимают вид

$$[L] \{\sigma\} = \{N\}. \quad (1.7)$$

$[L]$ — матрица направляющих косинусов рассматриваемой площадки; $\{N\}$ — вектор проекций напряжения на оси координат:

$$[L] = \begin{bmatrix} l & 0 & 0 & m & 0 & n \\ 0 & m & 0 & l & n & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & m & l \end{bmatrix}; \quad (1.8)$$

$$\{N\} = \{X_n Y_n Z_n\}^T. \quad (1.9)$$

§ 1.2. Перемещения и деформации

Предположим, что в начальном ненапряженном состоянии произвольная точка M тела имела координаты x, y, z (рис. 1.4). Рассмотрим перемещения точки от действия внешних сил или температурного поля. Пусть u, v, w — проекции полного перемещения точки M на оси координат. Величины u, v, w можно рассматривать как функции координат x, y, z точки M до деформирования тела. После деформирования точка M примет положение M_1 с координатами

$$\begin{aligned} \xi &= x + u(x, y, z); \\ \eta &= y + v(x, y, z); \quad \zeta = z + w(x, y, z). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Описание деформаций сплошной среды с помощью независимых переменных x, y, z , которые являются координатами точек среды в начальном ее состоянии, соответствует описанию в так называемых

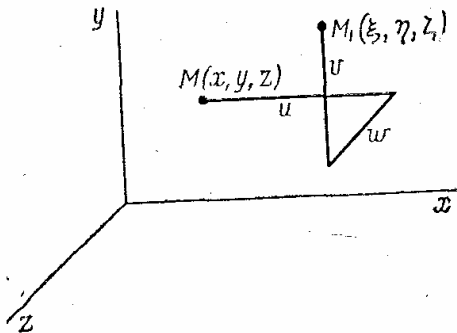


Рис. 1.4

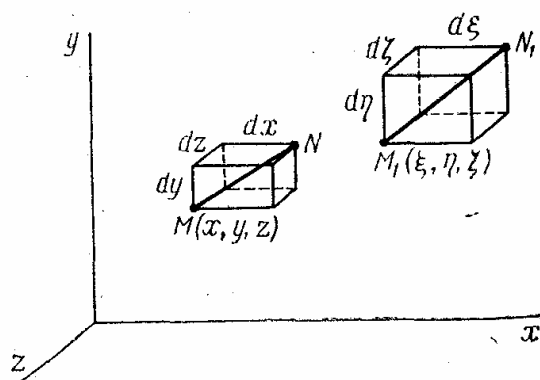


Рис. 1.5

координатах Лагранжа (или материальных координатах). В теории упругости такой способ описания является обычным в отличие от гидродинамики, где чаще пользуются координатами Эйлера, фиксированными в пространстве.

Возьмем теперь другую точку тела N (рис. 1.5), бесконечно близкую точке M , с начальными координатами $x + dx, y + dy, z + dz$. После деформирования точка N переходит в точку N_1 с координатами

$$\begin{aligned} \xi + d\xi &= x + dx + u(x + dx, y + dy, z + dz); \\ \eta + d\eta &= y + dy + v(x + dx, y + dy, z + dz); \\ \zeta + d\zeta &= z + dz + w(x + dx, y + dy, z + dz). \end{aligned} \quad (1.11)$$

По правилам дифференциального исчисления

$$\begin{aligned} d\xi &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz; \\ d\eta &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz; \\ d\zeta &= \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dz. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Обозначив через ds_0 длину отрезка MN до деформирования, получим $ds_0^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Длину отрезка M_1N_1 после деформирования обозначим ds . Тогда $ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2$. На основании формул (1.12) получим

$$ds^2 = ds_0^2 + 2(\varepsilon_{xx} dx^2 + \varepsilon_{yy} dy^2 + \varepsilon_{zz} dz^2 + \varepsilon_{xy} dx dy + \varepsilon_{yz} dy dz + \varepsilon_{zx} dz dx), \quad (1.13)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]; \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Пусть $l = \frac{dx}{ds_0}$, $m = \frac{dy}{ds_0}$, $n = \frac{dz}{ds_0}$ — направляющие косинусы отрезка MN до деформирования. Из соотношения (1.13) следует

$$\left(\frac{ds}{ds_0} \right)^2 = 1 + 2(\varepsilon_{xx} l^2 + \varepsilon_{yy} m^2 + \varepsilon_{zz} n^2 + \varepsilon_{xy} lm + \varepsilon_{yz} mn + \varepsilon_{zx} nl). \quad (1.15)$$

Считая величины ε_{xx} , ε_{yy} , ..., ε_{zx} малыми по сравнению с единицей и пользуясь приближенной формулой $\sqrt{1 + \alpha} = 1 + \frac{1}{2} \alpha$ для малых α , выражения (1.15) получаем

$$\varepsilon = \frac{ds}{ds_0} - 1 = \varepsilon_{xx} l^2 + \varepsilon_{yy} m^2 + \varepsilon_{zz} n^2 + \varepsilon_{xy} lm + \varepsilon_{yz} mn + \varepsilon_{zx} nl. \quad (1.16)$$

Соотношение (1.16) определяет относительное удлинение произвольного отрезка с направляющими косинусами l , m , n через величины ε_{xx} , ε_{yy} , ..., ε_{zx} , называемые компонентами деформаций. Их выражение существенно упрощается, если считать, что все частные производные функций u , v , w по x , y , z малы по сравнению с единицей. В этом случае в уравнениях (1.14) можно отбросить слагаемые с квадратами и произведениями этих производных. Полученные линеаризованные выражения для компонентов деформаций обозначим, чтобы отличить их от выражений (1.14), через ε_x , ε_y , ε_z , γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} = \gamma_{yx} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \gamma_{zx} = \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Это основные соотношения для относительных удлинений и сдвигов линейной теории упругости. В дальнейшем во всех случаях, когда нет специальных оговорок, будем рассматривать линейные геометрические соотношения такого типа. На рис. 1.6 представлены две составляющие полного угла сдвига γ_{xy} в плоскости $z = \text{const}$. Каждая из них, как и величины ε_x ; ε_y ; ε_z ; $\gamma_{yz}/2 = \gamma_{zy}/2$; $\gamma_{zx}/2 = \gamma_{xz}/2$, является компонентом тензора деформации.

Матрица

$$[T_\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

является симметричным тензором, аналогичным ранее рассмотренному тензору напряжений. Все зависимости, справедливые для тензора напряжений, можно переписать для тензора деформаций, заменяя

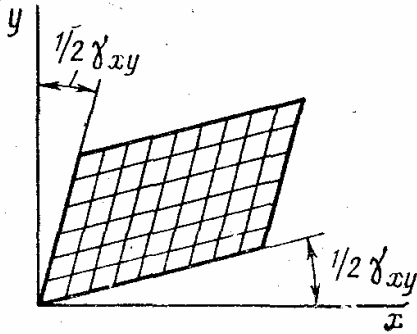


Рис. 1.6

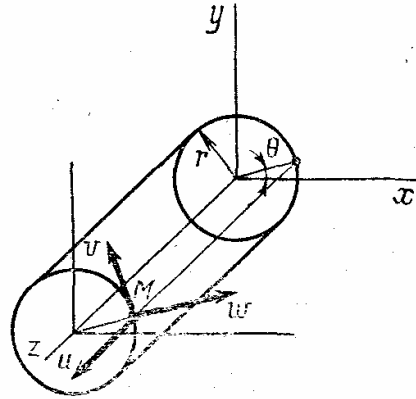


Рис. 1.7

σ_x на ε_x , σ_y на ε_y , σ_z на ε_z , τ_{xy} на $\gamma_{xy}/2$ и т. п. Так, главные удлинения определяются из кубического уравнения

$$\varepsilon^3 - J_1 \varepsilon^2 + J_2 \varepsilon - J_3 = 0,$$

где J_1, J_2, J_3 — инварианты тензора деформаций. Первый инвариант тензора $J_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ равен относительной деформации элемента объема тела. Средней деформацией называется величина

$$\varepsilon_0 = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) / 3. \quad (1.19)$$

Введение средней деформации позволяет представить тензор деформации в виде двух тензоров подобно тому, как это было сделано для тензора напряжений. Девiator деформаций имеет вид

$$[D_\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_0 & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_y - \varepsilon_0 & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_z - \varepsilon_0 \end{bmatrix}. \quad (1.20)$$

Соотношения (1.17) записаны для *прямоугольной системы координат*. При расчете ракетных конструкций часто необходимо иметь геометрические соотношения в *цилиндрических координатах*. Если u — перемещение вдоль оси цилиндра, v — перемещение по касательной к окружности, w — перемещение по нормали, а r, θ, z — цилиндрические

координаты (рис. 1.7) $(x = r \cos\theta, y = r \sin\theta, z)$, то уравнения, соответствующие (1.17), в цилиндрических координатах имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial w}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{w}{r}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z}; \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; \quad \gamma_{\theta z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}; \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Основные геометрические соотношения (1.17) линейной теории упругости в прямоугольных координатах в матричной форме имеют вид

$$\{\varepsilon\} = [b] \{u\}. \quad (1.22)$$

Векторы деформаций $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx}\}^T$ и перемещений $\{u\} = \{u \ v \ w\}^T$ связаны матрицей

$$[b] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (1.23)$$

§ 1.3. Начало возможных перемещений и уравнения равновесия

Деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ являются обобщенными перемещениями для напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$. Чтобы сообщить элементарному параллелепипеду объемом dx, dy, dz , вырезанному из тела, дополнительные деформации $\delta\varepsilon_x, \delta\varepsilon_y, \dots, \delta\gamma_{zx}$, необходимо затратить работу, равную

$$(\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \dots + \tau_{zx} \delta\gamma_{zx}) dx dy dz. \quad (1.24)$$

На рассматриваемое тело действуют распределенные объемные нагрузки (силы тяжести, силы инерции) с составляющими X, Y, Z по осям координат и поверхностные нагрузки с составляющими p_x, p_y, p_z . Кроме заданных внешних нагрузок к поверхности тела или ее части могут быть приложены силы реакций опорных связей. С помощью таких связей тело может быть или закреплено в пространстве, или точкам его поверхности могут быть сообщены какие-либо перемещения u_r, v_r, w_r . Во всех случаях будем считать связи и д е а л ь-

ными, полагая, что *силы реакций связей не совершают работу на любых возможных перемещениях точек поверхности тела, к которым приложены эти силы.*

Внутри рассматриваемого деформируемого тела возможными перемещениями являются функции δu , δv , δw , которые можно рассматривать как малые изменения (вариации) действительных перемещений u , v , w . Объемные нагрузки X , Y , Z на возможных перемещениях δu , δv , δw совершают работу

$$\delta R_1 = \iiint (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) dx dy dz, \quad (1.25)$$

а поверхностные нагрузки p_x , p_y , p_z — работу

$$\delta R_2 = \iint (p_x\delta u + p_y\delta v + p_z\delta w) dS. \quad (1.26)$$

Интегрирование в формуле (1.26) проводится по поверхности тела, где приложены внешние нагрузки p_x , p_y , p_z , а в формуле (1.25) — по всему объему, где действуют объемные силы X , Y , Z .

Суммарная работа всех внешних сил $\delta R = \delta R_1 + \delta R_2$. Возможным перемещениям δu , δv , δw соответствуют возможные изменения деформаций, т. е. их вариации

$$\delta \epsilon_x = \frac{\partial \delta u}{\partial x}, \quad \delta \epsilon_y = \frac{\partial \delta v}{\partial y}, \quad \dots, \quad \delta \gamma_{zx} = \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial z}. \quad (1.27)$$

Согласно соотношению (1.24), работа внутренних сил, затрачиваемая на дополнительное деформирование всего объема тела, равна

$$\delta A = \iiint (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \dots + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dx dy dz. \quad (1.28)$$

На основании принципа возможных перемещений *в положении равновесия работа внутренних сил равна работе всех внешних сил на возможных перемещениях.* Условие равновесия тела можно представить в виде уравнения

$$\delta A = \delta R_1 + \delta R_2 = 0. \quad (1.29)$$

Это условие должно быть справедливо для любых возможных перемещений. Из него можно получить дифференциальные уравнения равновесия элементарного параллелепипеда и граничные условия на поверхности. Для этого нужно воспользоваться формулой интегрирования по частям тройного интеграла:

$$\iiint \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dy dz = \iint \varphi \psi l dS - \iiint \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy dz. \quad (1.30)$$

Здесь тройные интегралы берутся по объему тела, ограниченному поверхностью S , а двойной — по этой поверхности. Величина l — косинус угла, образованного внешней нормалью к поверхности и осью x . При этом $l dS = dS_{yz}$ — проекция площадки dS поверхности на плоскость yz . Аналогичные зависимости имеют место, если в левой части уравнения вместо $\partial \psi / \partial x$ стоят производные $\partial \psi / \partial y$ или $\partial \psi / \partial z$. Тогда вместо l в формулу подставляют величину m или n , а вместо $\partial \psi / \partial x$ — величину $\partial \psi / \partial y$ или $\partial \psi / \partial z$.

Формула (1.30) позволяет преобразовать выражения для δA . Интегрируя по частям и группируя слагаемые с одинаковыми множителями, получаем уравнение

$$\begin{aligned} \delta A = & \int \int [(\sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n) \delta u + (\tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n) \delta v + \\ & + (\tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n) \delta w] dS - \int \int \int \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \delta u + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \delta v + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \delta w \right] dx dy dz = \\ & = \delta R_1 + \delta R_2. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Составляющие работы внешних сил δR_1 и δR_2 выражаются формулами (1.25) и (1.26). Так как вариации δu , δv , δw внутри объема тела произвольны, то из уравнения (1.31) следует, что должны быть равны соответствующие множители при δu , δv и δw в выражениях, стоящих под знаками тройных интегралов в левой и правой частях этого уравнения. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Это — дифференциальные уравнения равновесия элемента тела.

Приравнявая соответствующие множители при δu , δv , δw в двойных интегралах выражений, стоящих в левой и правой частях уравнения (1.31), получим силовые граничные условия на поверхности тела:

$$\begin{aligned} \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n &= p_x; \\ \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n &= p_y; \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n &= p_z. \end{aligned}$$

На участках поверхности, где приложены силы реакций неподвижных опорных связей, могут иметь место или *геометрические граничные условия* ($u = v = w = 0$), если опорные связи полностью запрещают перемещения, или *смешанные граничные условия*, если опорные связи препятствуют перемещениям только в одном или двух направлениях. В каждом частном случае эти граничные условия нетрудно составить. Всего в каждой точке поверхности тела должно быть три граничных условия. Если, например, опорные связи препятствуют только перемещениям в направлении оси z , то соответствующие граничные условия можно записать так:

$$w = 0; \quad \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n = p_x; \quad \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n = p_y.$$

На поверхности или на ее части могут быть также заданы перемещения u_r, v_r, w_r . В этом случае на той же части поверхности $\delta u = \delta v = \delta w = 0$.

Уравнения (1.32) могут быть получены иначе. Рассмотрим параллелепипед, вырезанный из тела (рис. 1.8). Размеры параллелепипеда вдоль осей координат x , y , z обозначим dx , dy , dz . В плоскости, совпадающей с координатными осями x и y , действуют напряжения σ_z , τ_{zx} , τ_{zy} , в плоскости xz — напряжения σ_y , τ_{yx} , τ_{yz} , в плоскости yz — σ_x , τ_{xy} , τ_{xz} . К остальным граням параллелепипеда, видимым на рисунке,

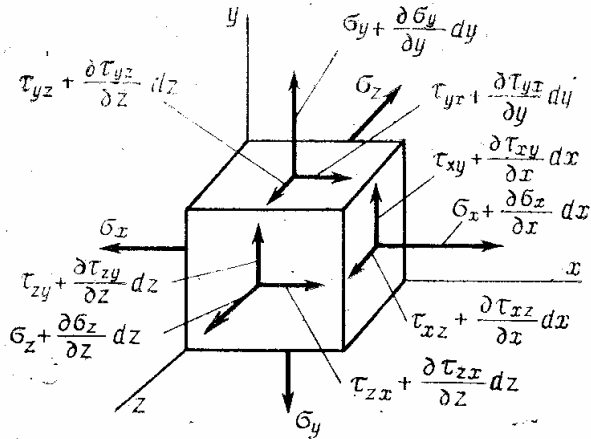


Рис. 1.8

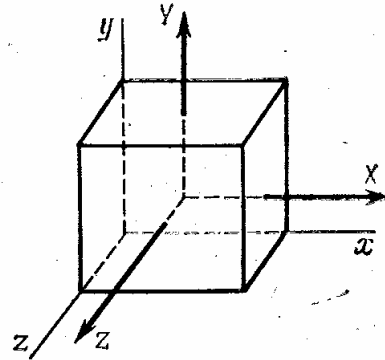


Рис. 1.9

приложены напряжения с приращениями. Возьмем проекции всех сил, соответствующих напряжениям, а также проекции объемных сил X , Y и Z (рис. 1.9) на ось x :

$$\begin{aligned}
 & -\sigma_x dy dz + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz - \tau_{yx} dz dx + \\
 & + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dz dx - \tau_{zx} dy dx + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dy dx + \\
 & + X dx dy dz = 0.
 \end{aligned}$$

Разделив каждое слагаемое этого уравнения на объем, получим

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0.$$

Это — первое из уравнений равновесия (1.32). Таким же путем получают второе и третье уравнения. Они соответствуют проекциям сил на оси y и z .

Граничные условия можно также получить, рассматривая равновесие элемента тела. Представим поверхность, наклоненную к осям x , y , z (см. рис. 1.3), граничной, на которой заданы поверхностные нагрузки p_x , p_y , p_z . Составим уравнение проекции суммы сил, действующих на элемент, на ось x . Очевидно, что полученное уравнение будет соответствовать первому уравнению системы (1.2), где $X_n = p_x$. Второе и третье уравнения получаются, если проделать ту же операцию с силами для осей y и z при $Y_n = p_y$; $Z_n = p_z$.

Система уравнений (1.32) для трехмерного тела упрощается, если $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ и $Z = 0$, т. е. при условии равновесия тела в двухосном напряженном состоянии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Уравнения равновесия элемента тела в цилиндрической системе координат получают, как и для элемента в прямоугольной системе, основываясь на принципе возможных перемещений или суммируя все силы, действующие на элемент, на три взаимно перпендикулярных направления (рис. 1.10):

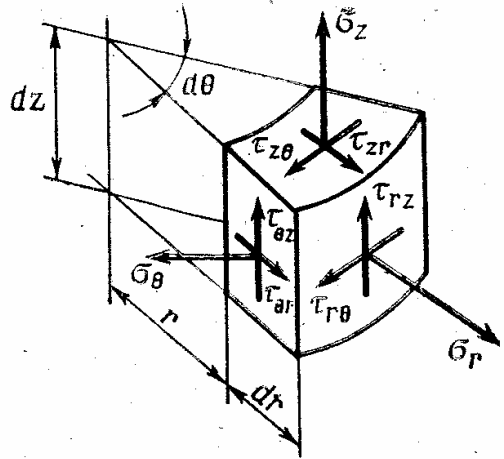


Рис. 1.10

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + X_r &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{\theta r}}{r} + Y_\theta &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{zr}}{r} + Z_z &= 0, \end{aligned} \quad (1.34)$$

где X_r , Y_θ , Z_z — объемные составляющие нагрузки по радиусу, по касательной и вдоль оси цилиндра.

§ 1.4. Упругое поведение деформируемых тел

Отличительной особенностью упругих тел является обратимость процессов деформирования. Считается, что в упругой области полностью отсутствуют остаточные деформации, т. е. работа внешних сил переходит в потенциальную энергию деформации. Так как деформации $\epsilon_x, \epsilon_y, \dots, \gamma_{zx}$ являются обобщенными перемещениями для напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{zx}$, то в соответствии с определением потенциальной энергии в механике назовем удельной потенциальной энергией деформации упругого тела такую функцию $U_0 = U_0(\epsilon_x, \epsilon_y, \dots, \gamma_{zx})$, которая обладает свойством

$$\sigma_x = \frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_x}, \quad \sigma_y = \frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_y}, \quad \dots, \quad \tau_{zx} = \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{zx}}. \quad (1.35)$$

Для деформирования твердого тела всегда необходимо затратить некоторую энергию. Поэтому функция $U_0 = U_0(\epsilon_x, \epsilon_y, \dots, \gamma_{zx})$ является положительно определенной, т. е. при любых не равных нулю величинах $\epsilon_x, \epsilon_y, \dots, \gamma_{zx}$ выполняется условие $U_0 > 0$.

Если функция U_0 прямо не зависит от координат x, y, z , то упругое тело называется однородным. Зависимость напряжений от деформаций в таком теле будет одинаковой для всех точек тела.

Соотношения (1.35) можно рассматривать как математическую формулировку свойства упругости. Зависимости между напряжениями и деформациями, определяемыми этими формулами, могут быть нелинейными. Однако в упругих телах при малых деформациях, можно, как правило, ограничиваться рассмотрением линейных зависимостей между напряжениями и деформациями. Тела, для которых справедлива линейная связь между напряжениями и деформациями, называются линейно-упругими телами или телами Гука.

Для линейно-упругого тела удельная потенциальная энергия выражается в форме однородного квадратичного полинома независимых переменных — деформаций $\epsilon_x, \epsilon_y, \dots, \gamma_{zx}$.

В общем виде без учета температурных деформаций удельную потенциальную энергию линейно-упругого тела можно записать в форме

$$\begin{aligned}
 U_0 = & \frac{1}{2} (a_{11} \epsilon_x^2 + a_{22} \epsilon_y^2 + a_{33} \epsilon_z^2 + a_{44} \gamma_{xy}^2 + a_{55} \gamma_{yz}^2 + \\
 & + a_{66} \gamma_{zx}^2 + 2a_{12} \epsilon_x \epsilon_y + 2a_{13} \epsilon_x \epsilon_z + 2a_{14} \epsilon_x \gamma_{xy} + 2a_{15} \epsilon_x \gamma_{yz} + \\
 & + 2a_{16} \epsilon_x \gamma_{zx} + 2a_{23} \epsilon_y \epsilon_z + 2a_{24} \epsilon_y \gamma_{xy} + 2a_{25} \epsilon_y \gamma_{yz} + \\
 & + 2a_{26} \epsilon_y \gamma_{zx} + 2a_{34} \epsilon_z \gamma_{xy} + 2a_{35} \epsilon_z \gamma_{yz} + 2a_{36} \epsilon_z \gamma_{zx} + \\
 & + 2a_{45} \gamma_{xy} \gamma_{yz} + 2a_{46} \gamma_{xy} \gamma_{zx} + 2a_{56} \gamma_{yz} \gamma_{zx}), \quad (1.36)
 \end{aligned}$$

где $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{66}$ — коэффициенты, зависящие от упругих свойств тела. Для однородного тела это константы. В общем случае число коэффициентов упругости равно 21.

На основании формул (1.35) получим в матричной записи $\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\}$, или в развернутом виде

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ & & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ & & & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ \text{Симм.} & & & & a_{55} & a_{56} \\ & & & & & a_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix}. \quad (1.37)$$

Симметрия матрицы коэффициентов a_{ih} вытекает из условия существования потенциальной функции U_0 [см. выражения (1.35); (1.36)]. Следовательно, для любого линейно-упругого тела *связь между напряжениями и деформациями должна выражаться симметричными формулами или, точнее, с помощью симметричной матрицы коэффициентов*. Такое тело называется линейно-упругим анизотропным. Существует соотношение между деформациями и напряжениями для анизотропного тела:

$$\{\epsilon\} = [D]^{-1} \{\sigma\} = [C] \{\sigma\}. \quad (1.38)$$

Развернутая форма этой зависимости имеет вид

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ \text{Симм.} & & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

Когда анизотропное тело обладает упругими свойствами, симметричными относительно трех взаимно перпендикулярных плоскостей, оно называется ортогонально-анизотропным или ортотропным. Пусть координатные оси x, y, z направлены по линиям пересечения плоскостей симметрии упругих свойств. Тогда симметричными относительно координатных плоскостей будут компоненты тензоров напряжений и деформаций $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$, кососимметричными — касательные напряжения $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ и соответствующие им деформации сдвига $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$. Следовательно, для ортотропного тела при принятой системе координат в формулах (1.37), (1.39) коэффициенты, связывающие нормальные напряжения с деформациями сдвига и касательные напряжения с деформациями удлинения, обращаются в нуль. В силу симметрии упругих свойств тела относительно координатных плоскостей должны также отсутствовать коэффициенты, связывающие деформации сдвига в одной координатной плоскости с касательными напряжениями, действующими в других координатных плоскостях.

Таким образом, для ортотропного тела закон Гука имеет форму

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

При этом $a_{21} = a_{12}$; $a_{32} = a_{23}$; $a_{13} = a_{31}$. Отсюда видно, что закон Гука для линейно-упругого ортотропного тела содержит девять независимых констант упругости. Эти константы можно определить по результатам испытаний на растяжение и сдвиг элементов упругого тела.

Для плоского напряженного состояния соотношение (1.40) упрощается. Когда $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$, матричная запись $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$ в развернутом виде выглядит так:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

Число независимых констант здесь сокращается до четырех: a_{44} ; $d_{12} = d_{21}$, d_{11} ; d_{22} , которые зависят от коэффициентов $a_{11} \dots a_{33}$.

Матрица констант может быть выражена через технические характеристики материала; модули упругости E_1 и E_2 вдоль осей x и y , коэффициенты Пуассона μ_{12} , μ_{21} и модуль сдвига G_{12} :

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} & \frac{\mu_{21} E_1}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} & 0 \\ \frac{\mu_{21} E_2}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.41)$$

Коэффициенты μ_{12} и μ_{21} определяют по результатам испытаний на растяжение образцов, вырезанных вдоль осей x и y , и соответствуют поперечному укорочению сечения.

Изотропное линейно-упругое тело обладает одинаковыми механическими свойствами во всех направлениях. Зависимости между напряжениями и деформациями для него можно представить в виде матрицы

$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ & & & G & 0 & 0 \\ \text{Симм.} & & & & G & 0 \\ & & & & & G \end{bmatrix}, \quad (1.42)$$

где $\lambda = \mu E / [(1 + \mu)(1 - 2\mu)]$ — коэффициент Ляме; E — модуль Юнга; μ — коэффициент Пуассона; $G = E / [2(1 + \mu)]$ — модуль сдвига. Связь деформаций с напряжениями в этом случае имеет вид (1.38), где

$$[C] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(1 + \mu) & 0 & 0 \\ \text{Симм.} & & & & 2(1 + \mu) & 0 \\ & & & & & 2(1 + \mu) \end{bmatrix}. \quad (1.43)$$

С учетом эффекта теплового расширения соотношения упругости для изотропного линейно-упругого тела принимают вид

$$\{\varepsilon\} = [C] \{\sigma\} - \{\varepsilon_0\}, \quad (1.44)$$

где вектор $\{\varepsilon_0\} = \alpha (t - t_0) \{1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$; t_0 — температура, при которой тепловые деформации считают равными нулю; $t = t(x, y, z)$ — рассматриваемая температура тела; α — температурный коэффициент линейного расширения.

Для тонкостенных конструкций, напряженное состояние которых близко к плоскому, соотношение (1.44) упрощается:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \alpha(t-t_0) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (1.45)$$

Обращенная зависимость имеет вид.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \frac{E\alpha}{1-\mu} (t-t_0) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (1.46)$$

Однородное изотропное нелинейно-упругое тело имеет одинаковые во всех направлениях упругие свойства. Следовательно, выражение удельной потенциальной энергии через компоненты деформаций ε_x , ε_y , ..., γ_{zx} не должно зависеть от координат x , y , z . Это означает, что в формулу для удельной потенциальной энергии изотропного тела должны входить только инварианты тензора деформаций. В общем случае потенциальная энергия должна выражаться через три инварианта J_1 , J_2 , J_3 или их комбинации. В случае малых деформаций можно считать, что удельная потенциальная энергия изотропного упругого тела зависит только от квадрата первого инварианта тензора деформаций $J_1^2 = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2$ и второго инварианта девиатора деформаций (1.20). В дальнейшем вторые инварианты девиаторов напряжений и деформаций будем обозначать соответственно $J(\sigma)$ и $J(\varepsilon)$:

$$J(\sigma) = J_2 + \frac{1}{3} J_1^2 = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]; \quad (1.47)$$

$$J(\varepsilon) = \frac{1}{6} [(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)].$$

Эти инварианты не зависят от значений среднего напряжения $\sigma_0 = J_1(\sigma) / 3$ и средней деформации $\varepsilon_0 = J_1(\varepsilon) / 3$. При равномерном гидростатическом давлении, когда $J(\sigma) = J(\varepsilon) = 0$, большинство конструкционных материалов деформируется как линейно-упругие тела, вплоть до весьма высоких значений напряжений. Поэтому удельную потенциальную энергию нелинейно-упругого изотропного тела можно представить в следующей общей форме:

$$U_0 = a J_1^2(\varepsilon) + f[J(\varepsilon)], \quad (1.48)$$

где a — константа; $f[J(\varepsilon)]$ — функция аргумента J . Так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_1}{\partial \varepsilon_x} = \frac{\partial J_1}{\partial \varepsilon_y} = \frac{\partial J_1}{\partial \varepsilon_z} &= 1; \\ \frac{\partial J}{\partial \varepsilon_x} &= \varepsilon_x - \varepsilon_0; \quad \frac{\partial J}{\partial \varepsilon_y} = \varepsilon_y - \varepsilon_0; \quad \frac{\partial J}{\partial \varepsilon_z} = \varepsilon_z - \varepsilon_0; \\ \frac{\partial J}{\partial \gamma_{xy}} &= \frac{1}{2} \gamma_{xy}; \quad \frac{\partial J}{\partial \gamma_{yz}} = \frac{1}{2} \gamma_{yz}; \quad \frac{\partial J}{\partial \gamma_{zx}} = \frac{1}{2} \gamma_{zx}, \end{aligned} \quad (1.49)$$

то, обозначая $\frac{df}{dJ} = f'$, получаем:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2aJ_1 + (\varepsilon_x - \varepsilon_0) f'; \tau_{xy} = \gamma_{xy} f'/2; \\ \sigma_y &= 2aJ_1 + (\varepsilon_y - \varepsilon_0) f'; \tau_{yz} = \gamma_{yz} f'/2; \\ \sigma_z &= 2aJ_1 + (\varepsilon_z - \varepsilon_0) f'; \tau_{zx} = \gamma_{zx} f'/2.\end{aligned}\quad (1.50)$$

Здесь, как и раньше,

$$\varepsilon_0 = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) / 3 = J_1/3.$$

Складывая уравнения (1.50) для $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, получаем

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 6a (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z). \quad (1.51)$$

Но $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ есть относительное изменение объема элемента тела. Для гидростатического давления p , когда $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -3p$, из формулы (1.51) следует $p = -2a \Delta V/V$. Обозначим через K модуль упругости для объемной деформации. Тогда

$$p = -K \Delta V/V; a = K/2. \quad (1.52)$$

Из уравнения (1.51) получаем

$$\sigma_0 = K (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = 3K \varepsilon_0.$$

и, следовательно,

$$2aJ_1 = K (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \sigma_0.$$

Теперь уравнения (1.50) можно представить в виде

$$\frac{\sigma_x - \sigma_0}{\varepsilon_x - \varepsilon_0} = \frac{\sigma_y - \sigma_0}{\varepsilon_y - \varepsilon_0} = \frac{\sigma_z - \sigma_0}{\varepsilon_z - \varepsilon_0} = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}/2} = \frac{\tau_{yz}}{\gamma_{yz}/2} = \frac{\tau_{zx}}{\gamma_{zx}/2} = f'. \quad (1.53)$$

Эти соотношения устанавливают подобие девиаторов напряжений и деформаций. Если обозначить $f' = \frac{df}{dJ} = 2G(J)$, уравнения (1.53) можно представить еще в такой форме:

$$\begin{aligned}\sigma_x - \sigma_0 &= 2G(J) (\varepsilon_x - \varepsilon_0); \tau_{xy} = G(J) \gamma_{xy}; \\ \sigma_y - \sigma_0 &= 2G(J) (\varepsilon_y - \varepsilon_0); \tau_{yz} = G(J) \gamma_{yz}; \\ \sigma_z - \sigma_0 &= 2G(J) (\varepsilon_z - \varepsilon_0); \tau_{zx} = G(J) \gamma_{zx}.\end{aligned}\quad (1.54)$$

Зависимость $G(J)$ можно определить по результатам испытаний образцов материала на чистый сдвиг, например испытаниями на кручение тонкостенных труб.

Зависимости (1.53) и (1.54) являются общими для всех изотропных материалов, потенциальную энергию которых можно представить уравнением (1.48).

§ 1.5. Принцип минимума полной потенциальной энергии

При формулировке условия равновесия в вариациях (1.29) не делалось никаких предположений о законах деформирования тела и характере зависимости внешних сил от перемещений. Поэтому уравнение (1.29) справедливо для любого сплошного тела, нагруженного системой

произвольных объемных и поверхностных сил. Для упругого тела, нагруженного консервативными внешними силами, можно ввести понятие полной потенциальной энергии, что приводит к иной трактовке этого уравнения.

Консервативными в механике считают силы, обладающие потенциалом; работа, совершаемая этими силами, не зависит от пути, которым система переводится из одного своего положения в другое. Полная потенциальная энергия консервативной системы, состоящей из упругого тела и приложенных к нему консервативных сил, определяется суммой

$$\mathcal{E} = U + \Pi, \quad (1.55)$$

где U — потенциальная энергия деформации тела; Π — потенциал внешних сил. Величину U находят интегрированием значений удельной потенциальной энергии деформации U_0 по объему тела V :

$$U = \int_V U_0 dV. \quad (1.56)$$

Если при деформации тела числовые значения и направления внешних сил не изменяются, то их потенциал

$$\Pi = - \int_V (Xu + Yv + Zw) dV - \int_{S_1} (p_x u + p_y v + p_z w) dS. \quad (1.57)$$

Здесь первый интеграл берется по объему, а второй — по той части S_1 поверхности тела, где приложены внешние поверхностные нагрузки. Знаки «—» перед интегралами соответствуют тому случаю, когда объемные X, Y, Z и поверхностные p_x, p_y, p_z нагрузки направлены так же, как и перемещения u, v, w . Следовательно, с ростом перемещений потенциал внешних сил уменьшается.

При заданных свойствах тела и внешних нагрузках полная потенциальная энергия \mathcal{E} зависит от конкретного вида функций u, v, w и их производных. Величины, значения которых определяются выбором одной или нескольких функций, носят название функционалов. Свойства функционалов изучаются в разделе математики, называемом вариационным исчислением (см. Приложение I).

Покажем, что если упругое тело находится в равновесии, то его полная потенциальная энергия имеет стационарное значение. Для этого найдем первую вариацию полной потенциальной энергии

$$\delta \mathcal{E} = \delta (U + \Pi) = \delta U + \delta \Pi. \quad (1.58)$$

Считая, что удельная потенциальная энергия U_0 выражена через компоненты деформаций, запишем

$$\delta U = \int_V \left(\frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_x} \delta \epsilon_x + \frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_y} \delta \epsilon_y + \dots + \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{yz}} \delta \gamma_{yz} \right) dV,$$

или, учитывая зависимости (1.35),

$$\delta U = \int_V (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \dots + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dV. \quad (1.59)$$

Первая вариация потенциала внешних сил

$$\delta\Pi = - \int_V (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) dV - \int_{S_1} (p_x \delta u + p_y \delta v + p_z \delta w) dS. \quad (1.60)$$

Сравнивая выражения (1.59) и (1.60) с выражениями (1.25), (1.26) и (1.28) и учитывая уравнение (1.29), приходим к вариационному уравнению

$$\delta\mathcal{E} = \delta(U + \Pi) = 0. \quad (1.61)$$

Это уравнение, которое называют *вариационным уравнением Лагранжа*, в отличие от уравнения в вариациях (1.29) справедливо только для консервативных систем. Из уравнения Лагранжа следует, что *в положении равновесия полная потенциальная энергия консервативной системы имеет стационарное значение*. Справедливо и обратное утверждение: *если полная потенциальная энергия имеет стационарное значение, то система находится в положении равновесия*.

Можно доказать и более общую теорему [28], которую часто называют *принципом минимума полной потенциальной энергии*: *в положении равновесия полная потенциальная энергия консервативной системы имеет стационарное значение, причем положение равновесия устойчиво, когда это стационарное значение — минимум*.

На вопросах устойчивости равновесия подробнее остановимся в следующем параграфе, а сейчас только подчеркнем, что принцип минимума полной потенциальной энергии охватывает все консервативные системы, как линейные, так и нелинейные. Нелинейности в консервативных системах могут быть геометрические и физические. *Геометрические нелинейности* обычно связаны с большими перемещениями тонкостенных систем типа стержней, мембран или оболочек. *Физические нелинейности* проявляются в тех случаях, когда материал не подчиняется закону Гука, а обладает более сложными упругими свойствами.

В классической линейной теории упругости принята такая постановка задачи: материал подчиняется закону Гука, а компоненты деформаций связаны с перемещениями линейными зависимостями (1.17). В этом случае задача сводится к линейным дифференциальным уравнениям, всегда имеющим единственное решение. Это решение описывает устойчивое (в рамках линейной теории упругости) положение равновесия, т. е. соответствует минимуму полной потенциальной энергии.

Для доказательства достаточно непосредственно подсчитать вторую вариацию полной потенциальной энергии \mathcal{E} (см. Приложение I). Если удельная потенциальная энергия определена выражением (1.36), то получаем

$$\delta^2\mathcal{E} = \delta^2U = \int_V [a_{11} (\delta\varepsilon_x)^2 + a_{22} (\delta\varepsilon_y)^2 + \dots + 2a_{56} \delta\gamma_{yz} \delta\gamma_{xz}] dV. \quad (1.62)$$

Другими словами, в задачах линейной теории упругости вторая вариация полной потенциальной энергии выражается той же положительно определенной квадратичной формой, что и удельная потенциальная энергия. Следовательно, $\delta^2 \mathcal{E} > 0$ и всякое положение равновесия линейной упругой системы устойчиво.

Проиллюстрируем использование условия стационарности полной потенциальной энергии двумя простыми примерами. На рис. 1.11, а изображен прямой стержень с площадью $S = S(x)$ поперечного сечения, нагруженный распределенной по длине нагрузкой $q = q(x)$ сил тяжести и растягивающей силой F ; материал стержня подчиняется закону Гука.

Считая напряженное состояние стержня одноосным и напряжения $\sigma_x = E \epsilon_x$ равномерно распределенными по поперечным сечениям стержня, из условия $\delta \mathcal{E} = 0$ получим дифференциальное уравнение и граничные условия, позволяющие найти осевое перемещение $u = u(x)$ и осевую силу $N = N(x)$.

В соответствии с зависимостями (1.17) и (1.43) имеем

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx}; U_0 = \frac{1}{2} E \epsilon_x^2.$$

Потенциал действующих на стержень внешних сил

$$\Pi = - \int_0^l q u \, dx - F u(l).$$

Таким образом, полная потенциальная энергия рассматриваемой системы

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^l E S (u')^2 \, dx - \int_0^l q u \, dx - F u(l), \quad (1.63)$$

где штрихом обозначена производная по x . Вариационное уравнение Лагранжа (1.61) в данном случае имеет вид

$$\delta \mathcal{E} = \int_0^l E S u' \delta u' \, dx - \int_0^l q \delta u \, dx - F \delta u(l) = 0.$$

Интегрируя по частям и группируя слагаемые, получаем

$$\delta \mathcal{E} = (E S u' - F) \delta u|_{x=l} - (E S u') \delta u|_{x=0} - \int_0^l [(E S u')' + q] \delta u \, dx = 0.$$

По длине стержня вариация δu произвольна и необходимым условием обращения в нуль вариации $\delta \mathcal{E}$ является равенство нулю выражения в квадратных скобках под знаком интеграла:

$$(E S u')' + q = 0. \quad (1.64)$$

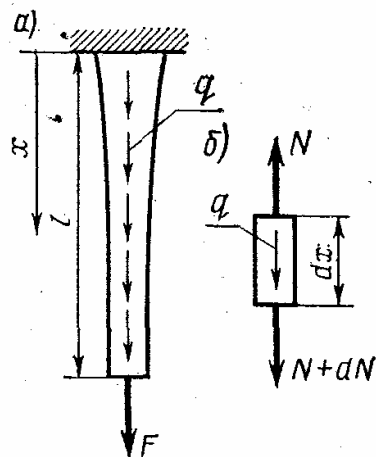


Рис. 1.11

При $x = 0$ по условию задачи $u = 0$ и, следовательно, $\delta u(0) = 0$; при $x = l$ величина $\delta u(l)$ произвольна, и должно выполняться условие $FSu' - F = 0$. Итак, в данной задаче граничные условия полученного дифференциального уравнения (1.64) следующие:

$$1) u(0) = 0; 2) ESu'(l) - F = 0, \text{ т. е. } N(l) = F.$$

Дифференциальное уравнение (1.64) и его граничные условия можно получить, не используя принцип минимума полной потенциальной энергии, а непосредственно рассматривая условия равновесия стержня

(рис. 1.11, б). Проецируя на ось x все действующие на элемент силы, получаем

$$N' + q = 0.$$

Учитывая, что осевая сила $N = \sigma S$, и используя зависимость $\epsilon = u'$ и закон Гука $\sigma = E\epsilon$, снова приходим к уравнению (1.64). Граничные условия тоже можно получить, минуя условие стационарности полной энергии: первое из них очевидно, а второе вытекает из условия равновесия элемента стержня, примыкающего к нагруженному торцу.

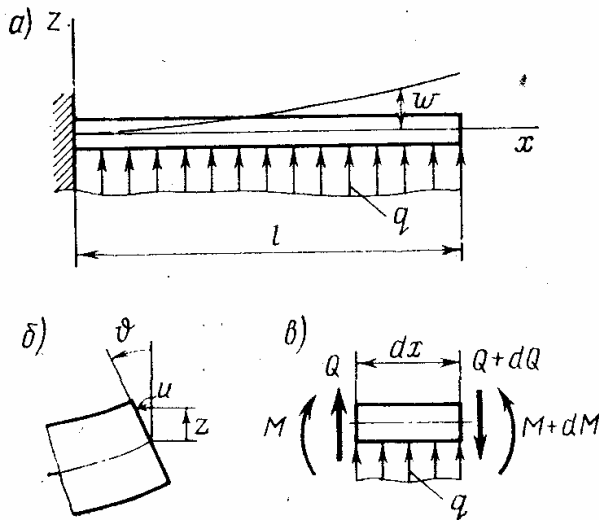


Рис. 1.12

В качестве второго примера выведем уравнение поперечного изгиба прямого стержня, нагруженного распределенной нагрузкой, $q = q(x)$, как показано на рис. 1.12, а.

В рассматриваемой задаче потенциал внешних сил

$$\Pi = - \int_0^l q w \, dx,$$

где $w = w(x)$ — поперечный прогиб стержня. Для подсчета потенциальной энергии деформации стержня воспользуемся известными из сопротивления материалов гипотезами плоских сечений и ненадавливания слоев. По первой из этих гипотез поперечные сечения стержня, до изгиба нормальные к его оси, после изгиба остаются плоскими и нормальными к искривленной оси стержня. Поворот поперечных сечений на малый угол ϑ приводит к продольным перемещениям $u = -z\vartheta$ (рис. 1.12, б), где z — координата, отсчитываемая от нейтральной оси стержня. Тогда из общих зависимостей (1.17) находим

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} = -z\vartheta',$$

где штрихом обозначено дифференцирование по x . Поскольку поперечные сечения остаются нормальными к искривленной оси стержня, то при малых прогибах $\vartheta = w'$, и окончательно можно записать

$\varepsilon_x = -z\omega''$. В силу второй гипотезы напряженное состояние стержня считается одноосным и потенциальная энергия деформации

$$U = \frac{1}{2} \int_V E \varepsilon_x^2 dV = \frac{1}{2} \int_0^l E (\omega'')^2 \left[\int_S z^2 dS \right] dx.$$

Здесь стоящий в квадратных скобках интеграл берется по площади поперечного сечения стержня и равен моменту инерции поперечного сечения J ; тогда

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EJ (\omega'')^2 dx. \quad (1.65)$$

Полная потенциальная энергия изогнутого стержня

$$\mathcal{E} = \int_0^l \left(\frac{1}{2} EJ (\omega'')^2 - q\omega \right) dx. \quad (1.66)$$

Из вариационного уравнения Лагранжа следует, что

$$\delta \mathcal{E} = \int_0^l (EJ\omega'' \delta\omega'' - q\delta\omega) dx = 0.$$

Двукратным интегрированием по частям преобразуем определенный интеграл и получаем

$$\delta \mathcal{E} = (EJ\omega'') \delta\omega' \Big|_0^l - (EJ\omega'')' \delta\omega \Big|_0^l + \int_0^l [(EJ\omega'')'' - q] \delta\omega dx = 0.$$

В положении равновесия первая вариация полной потенциальной энергии должна обращаться в нуль при любых допустимых вариациях поперечного прогиба. Отсюда следует дифференциальное уравнение поперечного изгиба стержня

$$(EJ\omega'')'' - q = 0, \quad (1.67)$$

а также граничные условия, которые могут быть заданы на торцах стержня: 1) $EJ\omega'' = 0$ либо $\delta\omega' = 0$, т. е. $\omega' = \bar{\omega}'$; 2) $(EJ\omega'')' = 0$ либо $\delta\omega = 0$, т. е. $\omega = \bar{\omega}$, где $\bar{\omega}$ и $\bar{\omega}'$ — заданные значения прогиба и угла поворота.

Поскольку $EJ\omega'' = M$ и $(EJ\omega'')' = Q$, где M — изгибающий момент; Q — поперечная сила, граничные условия имеют следующий смысл:

- 1) $M = 0$, либо $\omega' = \bar{\omega}'$;
- 2) $Q = 0$, либо $\omega = \bar{\omega}$.

Заметим еще, что если к торцу стержня приложена сосредоточенная поперечная сила \bar{Q} или изгибающий момент \bar{M} , то их следует включить в потенциал внешних сил, как это было сделано в предыдущем примере. Тогда \bar{Q} и \bar{M} автоматически войдут и в граничные условия.

Как и в первом примере, уравнение поперечного изгиба стержня можно получить, рассмотрев условия равновесия отдельного взятого элемента стержня (рис. 1.12, в):

$$Q' - q = 0; \quad M' = Q. \quad (1.68)$$

Учитывая зависимость $M = EJw''$ (которую тоже можно получить из уравнений статики), снова приходим к уравнению (1.67).

§ 1.6. Устойчивое и неустойчивое равновесие деформированного тела

Общий подход к исследованию устойчивости равновесия консервативных систем основан на принципе *минимума полной потенциальной энергии*. Наглядной иллюстрацией такого подхода служит описание поведения тяжелого шарика на гладкой поверхности (рис. 1.13). Потенциальная энергия такого шарика изменяется пропорционально его вертикальному смещению. Она уменьшается с опусканием шарика и увеличивается, когда шарик поднимается. Поэтому нижняя точка вогнутой поверхности (а) соответствует минимуму потенциальной энергии и положение равновесия шарика в этой точке устойчиво. Вершина выпуклой поверхности (б) соответствует стационарному, но не минимальному, а максимальному значению потенциальной энергии, и положение равновесия шарика здесь неустойчиво. Другими словами, помещенный в нижнюю точку вогнутой поверхности шарик останется



Рис. 1.13

на месте, а с вершины выпуклой поверхности он непременно скатится. Стационарная точка на седлообразной поверхности (в) тоже не соответствует минимуму потенциальной энергии. Это так называемая точка минимакса, и положение шарика в ней неустойчиво. На последний случай следует обратить особое внимание: в неустойчивом положении равновесия полная потенциальная энергия совсем необязательно должна быть максимальной. *Положение равновесия не будет устойчивым во всех случаях, когда полная потенциальная энергия имеет стационарное, но не минимальное значение.*

Аналогично можно интерпретировать и исследование устойчивости нагруженного упругого тела, только в этом случае полная потенциальная энергия складывается из энергии деформации и потенциала внешних сил [см. формулу (1.55)]. В дальнейшем для определенности будем считать, что закрепление тела исключает его переме-

щения как жесткого целого, а все внешние нагрузки изменяются пропорционально одному параметру F .

При малых отклонениях тела от рассматриваемого положения полная энергия получает некоторое приращение $\Delta \mathcal{E}$. В положении равновесия (не обязательно устойчивого) полная потенциальная энергия имеет стационарное значение. Условие стационарности — необходимое условие минимума — приводит к вариационному уравнению (1.61). Для того чтобы положение равновесия было устойчивым, должно выполняться необходимое и достаточное условие минимума, т. е. условие $\Delta \mathcal{E} > 0$ при любых достаточно малых отклонениях от положения равновесия. Если же при заданных нагрузках и условиях закрепления тела возможны такие малые отклонения от положения равновесия, при которых $\Delta \mathcal{E} \leq 0$, то положение равновесия не будет устойчивым.

В силу положительной определенности удельной потенциальной энергии деформации состояние равновесия ненапряженного тела — устойчиво. При достаточно малых значениях параметра нагрузки F напряженно-деформированное состояние упругого тела может быть описано уравнениями линейной теории упругости; это состояние равновесия будем называть начальным. В окрестности точки $F = 0$ начальное состояние равновесия, как нетрудно показать, остается устойчивым. Начальное состояние равновесия нагруженного тела может перестать быть устойчивым только тогда, когда параметр F превысит некоторое критическое значение $F_{кр}$, т. е. при $F > F_{кр}$ становятся возможными такие отклонения от начального состояния равновесия, при которых $\Delta \mathcal{E} \leq 0$. А поскольку при $F < F_{кр}$ начальное состояние остается устойчивым и любые возможные малые отклонения приводят к увеличению полной потенциальной энергии, то естественно так определить критическое значение параметра нагрузки: $F_{кр}$ — это нижняя граница тех значений F , при которых возможны малые отклонения системы от начального состояния равновесия, приводящие к $\Delta \mathcal{E} = 0$.

Данное определение позволяет аналитически сформулировать энергетический критерий устойчивости начального состояния равновесия упругих систем. Наметим в общем виде вывод этого критерия. Предположим, что начальное состояние равновесия, описываемое уравнениями линейной теории упругости, известно. Рассмотрим смежное с ним состояние, переход к которому задается перемещениями первого порядка малости. Изменение $\Delta \mathcal{E}$ полной потенциальной энергии при переходе к смежному состоянию подсчитаем с точностью до квадратов этих перемещений. Величину $\Delta \mathcal{E}$ представим в виде двух слагаемых, одно из которых не зависит от внешних нагрузок, а другое пропорционально параметру нагрузки F :

$$\Delta \mathcal{E} = W + FV.$$

В тех случаях, когда при переходе к смежному состоянию $\Delta \mathcal{E} = 0$, можно записать

$$F = -W / V.$$

Согласно приведенному определению наименьшее из всех возможных значений F , даваемых последним выражением, равно критическому значению $F_{кр}$. Напомним, что $\Delta\mathcal{E}$, W и V являются функционалами, зависящими от перемещений первого порядка малости, переводящих систему в состояние, смежное с начальным состоянием равновесия. Необходимое условие минимума параметра F дает

$$\delta \left(\frac{W}{V} \right) = \frac{\delta W V - W \delta V}{V^2} = \frac{1}{V} \left(\delta W - \frac{W}{V} \delta V \right) = \frac{1}{V} (\delta W + F \delta V) = 0,$$

откуда следует, что при критическом значении параметра нагрузки выполняется условие

$$\delta (\Delta\mathcal{E}) = 0. \quad (1.69)$$

Последнее условие называют *энергетическим критерием (энергетическим принципом) упругой устойчивости*.

Этот критерий имеет простой механический смысл. Действительно, обозначив полную потенциальную энергию в начальном и смежном с ним состояниях соответственно через \mathcal{E} и \mathcal{E}_1 , запишем

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E} + \Delta\mathcal{E}.$$

Тогда учитывая, что начальное состояние равновесно и $\delta\mathcal{E} = 0$, получим

$$\delta\mathcal{E}_1 = \delta (\Delta\mathcal{E}).$$

Следовательно, энергетический критерий устойчивости (1.69) можно трактовать и как условие $\delta\mathcal{E}_1 = 0$, т. е. как условие равновесия системы в состоянии, смежном с начальным. Поэтому приведенное выше определение $F_{кр}$ эквивалентно следующему определению: $F_{кр}$ — это нижняя граница тех значений F , при которых у системы существуют состояния равновесия, смежные с начальным.

Изложенный выше энергетический критерий устойчивости иногда записывают в другой форме. Перемещения первого порядка малости, переводящие систему из начального состояния равновесия в новое смежное состояние, можно рассматривать как некоторые вариации δu , δv , δw . Тогда приращение полной потенциальной энергии можно подсчитать в виде разложения, аналогичного ряду Тейлора:

$$\Delta\mathcal{E} = \delta\mathcal{E} + \frac{1}{2!} \delta^2\mathcal{E} + \dots,$$

где $\delta^2\mathcal{E}$ — вторая вариация полной потенциальной энергии.

Поскольку начальное состояние равновесно, то $\delta\mathcal{E} = 0$ и критерий устойчивости (1.69) можно записать в такой форме:

$$\delta (\delta^2\mathcal{E}) = 0. \quad (1.70)$$

Важно подчеркнуть, что физический смысл критерия устойчивости остается одним и тем же, независимо от того, в какой форме он записан.

Когда изменение полной потенциальной энергии подсчитывают с точностью до квадратов перемещений, отсчитываемых от начального состояния равновесия, условие $\delta (\Delta\mathcal{E}) = 0$ приводит к линейным и

однородным относительно этих перемещений уравнениям (алгебраическим для систем с конечным числом степеней свободы и дифференциальным для систем с распределенными параметрами). Эти уравнения называются *линеаризованными уравнениями теории устойчивости*; они дают возможность находить критические значения нагрузок и с точностью до масштаба определять те формы, по которым происходит потеря устойчивости упругой системы.

Рассмотрим, например, консервативную систему (рис. 1.14, а), состоящую из двух жестких стержней, с двумя упругими шарнирами, нагруженных силой F . До нагружения оси стержней расположены на одной вертикали и сила F приложена вдоль этой вертикали.

Деформацию системы будем задавать углами φ_1 и φ_2 , причем в начальном состоянии равновесия при достаточно малых значениях силы F , очевидно, $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = 0$. Найдем критическое значение силы $F_{кр}$, при превышении которого вертикальное состояние равновесия перестает быть устойчивым.

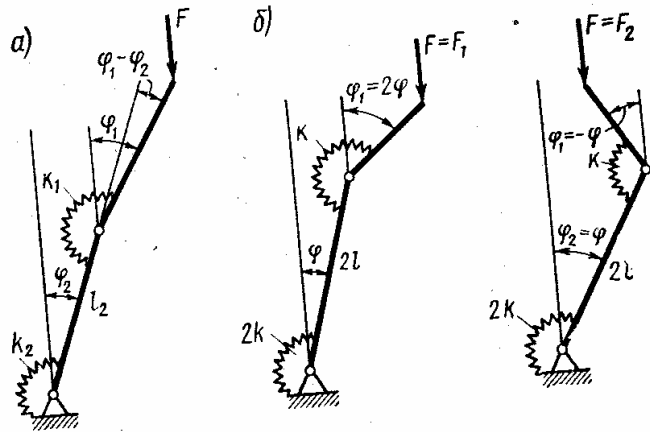


Рис. 1.14

Для того чтобы воспользоваться критерием устойчивости (1.69), подсчитаем изменение полной потенциальной энергии системы с точностью до квадратов углов φ_1 и φ_2 . Энергия деформации упругих шарниров равна

$$W = \frac{1}{2} k_1 (\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} k_2 \varphi_2^2,$$

где k_1 и k_2 — жесткости упругих шарниров. Подсчитывая с точностью до квадратов углов φ_1^2 и φ_2^2 вертикальное смещение V точки приложения силы F , найдем

$$V = - [l_1 (1 - \cos \varphi_1) + l_2 (1 - \cos \varphi_2)] = - \frac{1}{2} (l_1 \varphi_1^2 + l_2 \varphi_2^2).$$

Таким образом, при отклонениях стержней изменение полной потенциальной энергии определяется выражением

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{1}{2} k_1 (\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} k_2 \varphi_2^2 - \frac{F}{2} (l_1 \varphi_1^2 + l_2 \varphi_2^2).$$

Условие стационарности (1.69) в рассматриваемом случае приводит к двум уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \mathcal{E}}{\partial \varphi_1} &= k_1 (\varphi_1 - \varphi_2) - F l_1 \varphi_1 = 0; \\ \frac{\partial \Delta \mathcal{E}}{\partial \varphi_2} &= k_1 (\varphi_2 - \varphi_1) + k_2 \varphi_2 - F l \varphi_2 = 0. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Полученная система линейных однородных уравнений всегда имеет тривиальное решение $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = 0$, соответствующее начальному вертикальному состоянию равновесия. Для существования отличных от нуля решений определитель системы должен быть равен нулю; это условие приводит к квадратному относительно F уравнению

$$F^2 - F \left(\frac{k_1 + k_2}{l_2} + \frac{k_1}{l_1} \right) + \frac{k_1 k_2}{l_1 l_2} = 0.$$

Положив, например, $l_1 = l$, $l_2 = 2l$, $k_1 = k$, $k_2 = 2k$, найдем корни уравнения:

$$F_1 = k / (2l); \quad F_2 = 2k / l,$$

т. е. значения нагрузки, при которых возможны смежные с начальным состоянием равновесия, а наименьшее из них равно критическому значению силы: $F_{кр} = F_1 = k / (2l)$.

Таким образом, при $F = F_1$ и $F = F_2$ у рассматриваемой стержневой системы кроме вертикального положения равновесия оказываются возможными смежные с ним другие формы равновесия. Такие точки расщепления решений называют *точками ветвления* или *точками бифуркации*. Линеаризованные уравнения позволяют с точностью до масштаба определять формы равновесных конфигураций системы в окрестностях точек бифуркации. Так, из уравнений (1.71) следует, что при $F = F_1$ углы φ_1 и φ_2 связаны соотношением $\varphi_1 = 2\varphi_2$, а при $F = F_2$ соотношением $\varphi_1 = -\varphi_2$. Соответствующие равновесные конфигурации изображены на рис. 1.14, б, причем первая из них описывает ту форму, по которой система теряет устойчивость.

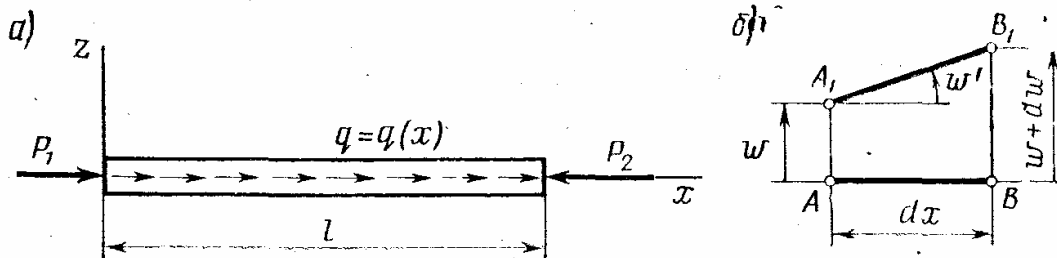


Рис. 1.15

В качестве примера использования энергетического критерия устойчивости для систем с распределенными параметрами рассмотрим прямой стержень, нагруженный продольными силами, значения и направления которых не изменяются при деформациях стержня (рис. 1.15, а). Задачу определения начального напряженно-деформированного состояния такого стержня будем считать решенной и закон распределения по длине стержня начальных сил $N_0 = N_0(x)$ известным. При достаточно малых значениях этих сил начальное состояние равновесия стержня с прямолинейной осью является единственным и устойчивым. Найдем условия, при которых это начальное состояние равновесия перестает быть устойчивым.

Переход стержня в новое состояние с искривленной осью зададим поперечными перемещениями первого порядка малости $w = w(x)$ и изменение полной потенциальной энергии $\Delta \mathcal{E}$ подсчитаем с точностью до квадратов этих перемещений. Энергия деформации стержня изменится, во-первых, за счет появления энергии изгиба, определяемой выражением (1.65):

$$\Delta U_1 = \frac{1}{2} \int_0^l FJ (w'')^2 dx,$$

во-вторых, в результате изменения энергии растяжения-сжатия, поскольку начальные силы N_0 совершат работу на удлинениях второго порядка малости, возникающих вследствие перемещений w . Как следует из рис. 1.15, б, удлинения равны

$$\varepsilon = \frac{A_1 B_1 - AB}{AB} = \frac{1}{\cos w'} - 1 = \frac{1}{1 - (w')^2/2 + \dots} - 1 = \frac{1}{2} (w')^2.$$

Следовательно, изменение энергии деформации стержня вследствие этих удлинений определяется выражением

$$\Delta U_2 = \frac{1}{2} \int_0^l N_0 (w')^2 dx.$$

Внешние продольные силы на поперечных перемещениях w работы не совершают, поэтому при переходе в новое состояние потенциал внешних сил не изменяется: $\Delta \Pi = 0$. Итак, при переходе стержня в новое состояние, смежное с начальным, изменение полной потенциальной энергии составит

$$\Delta \mathcal{E} = \Delta U_1 + \Delta U_2 = \frac{1}{2} \int_0^l [EJ (w'')^2 + N_0 (w')^2] dx. \quad (1.72)$$

Из этого выражения, используя энергетический критерий устойчивости $\delta(\Delta \mathcal{E}) = 0$, можно получить линеаризованное уравнение устойчивости прямого стержня и те граничные условия, каким оно может быть подчинено.

Повторив преобразования и рассуждения, использованные во втором примере § 1.5, получим однородное дифференциальное уравнение

$$(EJ w'')'' - (N_0 w')' = 0 \quad (1.73)$$

со следующими однородными граничными условиями на торцах стержня:

$$1) EJ w'' = 0 \text{ (т. е. } M = 0), \text{ либо } w' = 0; \quad (1.74)$$

$$2) (EJ w'')' - N_0 w' = 0 \text{ (т. е. } Q - N_0 w' = 0), \text{ либо } w = 0.$$

Линейное однородное уравнение четвертого порядка (1.73) является основным уравнением теории устойчивости прямых стержней. Оно применимо при любых законах изменения жесткости $EJ = EJ(x)$, при любых нагрузках и условиях закрепления стержня. Примеры решения этого уравнения рассмотрены во II части книги.

Глава 2

ЭЛЕМЕНТЫ ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Современная теория упругости представляет собой весьма обширную и наиболее полно разработанную область механики твердого деформируемого тела. Теорию упругости иногда подразделяют на математическую и прикладную. «Демаркационная линия» между математической и прикладной теориями упругости довольно условна. Обычно, когда говорят о математической теории упругости, имеют в виду общую и математически строгую постановку задач, опирающуюся только на допущения о сплошности и упругости тела, и точное решение этих задач, не использующее никаких дополнительных упрощающих допущений и приближенных приемов. Однако число практически важных задач, допускающих такую постановку и решение, крайне ограничено.

Всякую сколько-нибудь сложную практическую задачу удается довести до окончательного результата только с помощью целого ряда дополнительных упрощающих допущений. Постановку и решение типичных задач при небольшом числе четко сформулированных дополнительных упрощающих допущений (гипотез) обычно относят к прикладной теории упругости. Например, в задачах расчета тонкостенных конструкций, схематизируемых набором оболочек и пластин, чрезвычайно важную роль играют гипотезы Кирхгофа—Лява: именно на этих гипотезах построены классические теории пластин и оболочек. Основная цель настоящей главы — на простых примерах познакомить читателя с гипотезами Кирхгофа—Лява, используемыми в большинстве остальных разделов книги. Кроме того, в этой главе рассмотрена плоская задача теории упругости и принцип Сен-Венана.

§ 2.1. Плоское напряженное и плоское деформированное состояния

Напряженное состояние тонкостенных конструкций обычно близко к плоскому напряженному состоянию. Например, когда пластина постоянной толщины h нагружена контурными силами, равномерно распределенными по толщине (рис. 2.1, а), на обеих ее наружных поверхностях компоненты напряжений $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Естественно предположить, что они равны нулю и по всей толщине пластины. Для тонкой пластины, кроме того, можно предположить, что компоненты напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} , параллельные плоскости пластины, постоянны по ее толщине; такое напряженное состояние и называют плоским (рис. 2.1, б).

Общие уравнения равновесия (1.32) в случае плоского напряженного состояния сводятся к двум уравнениям (1.33), где X и Y в данном случае — объемные нагрузки, равномерно распределенные по координате z (объемная нагрузка $Z = 0$). Все входящие в уравнения (1.33) величины постоянны по координате z , поэтому толщина h слоя, в котором

реализовано плоское напряженное состояние, в дальнейшем решение не входит, и всюду, где это не оговорено, $h = 1$.

Задача определения σ_x , σ_y , τ_{xy} , в общем случае плоского напряженного состояния остается статически неопределимой; для ее решения следует дополнительно учесть зависимости, связывающие эти компоненты напряжений с соответствующими компонентами деформаций, и зависимости, связывающие компоненты деформаций с перемещениями.

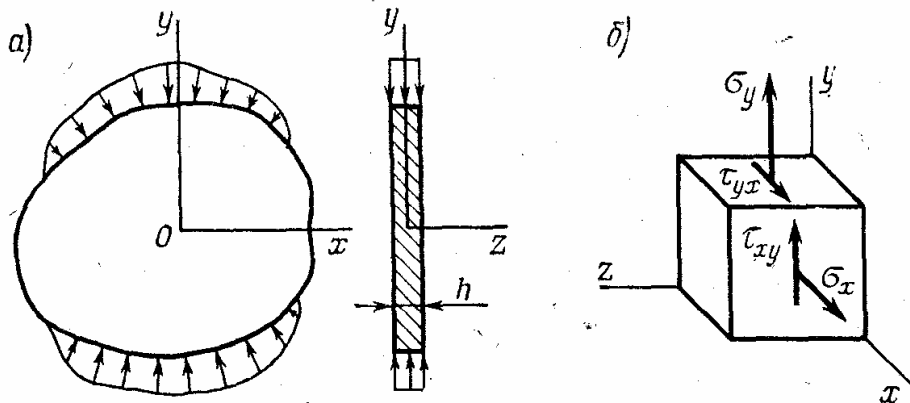


Рис. 2.1

Для изотропного упругого тела при плоском напряженном состоянии из закона Гука (1.45) имеем

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu\sigma_y); \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu\sigma_x); \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy},\end{aligned}\tag{2.1}$$

или, если напряжения выразить через деформации,

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_x + \mu\epsilon_y); \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_y + \mu\epsilon_x); \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{1-\mu^2} \frac{(1-\mu)}{2} \gamma_{xy}.\end{aligned}\tag{2.2}$$

При линейной постановке задачи нужные нам компоненты деформаций выражаются через перемещения u , v по формулам (1.17):

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.\tag{2.3}$$

Таким образом, получено восемь независимых уравнений (1.33); (2.1); (2.3), содержащих восемь неизвестных функций u ; v ; ϵ_x ; ϵ_y ; γ_{xy} ; σ_x ; σ_y ; τ_{xy} . При заданных нагрузках и граничных условиях все эти неизвестные функции могут быть найдены.

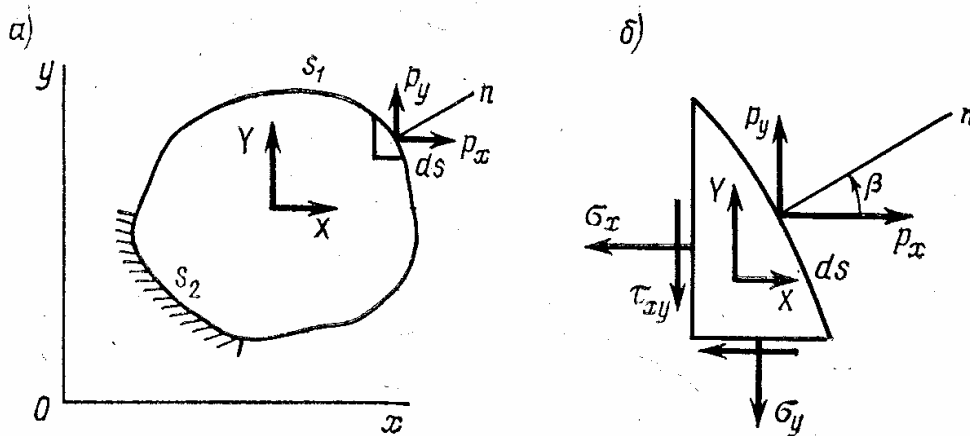


Рис. 2.2

На контуре той области, для которой решается рассматриваемая задача, могут быть заданы как геометрические, так и силовые граничные условия. Так, например, на части s_2 контура, где запрещены перемещения (рис. 2.2, а), имеем геометрические граничные условия: $u = 0, v = 0$.

На незакрепленной части s_1 контура силовые граничные условия выражают условия равновесия прилегающего к контуру элемента (рис. 2.2, б). Условие равновесия в проекции на ось x дает

$$\sigma_x ds \cos\beta + \tau_{xy} ds \sin\beta = p_x ds + X \frac{1}{2} (ds \cos\beta) (ds \sin\beta),$$

где β — угол между осью x и нормалью n к контуру. Второе слагаемое в правой части равенства должно быть отброшено, как имеющее высший порядок малости. Условие равновесия в проекции на ось y приводит к аналогичному уравнению. Окончательно, как частный случай силовых граничных условий трехмерной задачи (см. § 1.3), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_x \cos\beta + \tau_{xy} \sin\beta &= p_x; \\ \tau_{xy} \cos\beta + \sigma_y \sin\beta &= p_y, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где p_x, p_y — компоненты контурной нагрузки.

Дальнейшее решение можно вести двумя путями: выбрать в качестве основных неизвестных перемещения (решение в перемещениях) или напряжения (решение в напряжениях). В первом случае, выразив в зависимостях (2.2) компоненты деформаций через перемещения из системы (1.33) получим два уравнения с двумя неизвестными функциями $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (1-\mu^2) \frac{X}{E} &= 0; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (1-\mu^2) \frac{Y}{E} &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Силовые граничные условия (2.4) следует тоже выразить через производные функций u и v .

Когда задача решается в напряжениях, при постоянных объемных инерционных нагрузках $X = \rho g_x$, $Y = \rho g_y$ обычно вводят функцию напряжений φ (функцию Эри) с помощью соотношений

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - x \rho g_x; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - y \rho g_y; \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (2.6)$$

Тогда, как нетрудно проверить, уравнения равновесия (1.33) будут тождественно удовлетворены.

Из уравнений (2.3) исключим функции u и v . Для этого первое из этих уравнений продифференцируем дважды по y , второе — дважды по x , третье — один раз по x и один раз по y . Вычитая из суммы двух первых уравнений третье, получим условие *совместности деформаций*

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (2.7)$$

Используя закон Гука (2.1) и соотношения (2.6), можно выразить это условие совместности деформаций через функцию напряжений φ :

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (2.8)$$

Итак, мы получили одно уравнение относительно одной неизвестной функции напряжений $\varphi = \varphi(x, y)$.

Полученное уравнение называется бигармоническим; обычно оно записывается в такой компактной форме:

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0, \quad (2.8')$$

где использован дифференциальный оператор Лапласа

$$\nabla^2 (*) = \frac{\partial^2 (*)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (*)}{\partial y^2}. \quad (2.9)$$

При решении уравнения (2.8) заданные на контуре граничные условия следует выразить через функцию напряжений φ .

Рассмотренное сейчас плоское напряженное состояние в телах конечной толщины может быть точно реализовано только в ряде частных случаев. Например, если пластина постоянной толщины (рис. 2.1, а) нагружена в своей плоскости постоянным гидростатическим давлением p , то независимо от толщины пластины в ней действительно реализуется плоское напряженное состояние:

$$\sigma_x = -p; \quad \sigma_y = -p; \quad \tau_{xy} = 0; \\ \sigma_z = 0; \quad \tau_{xz} = 0; \quad \tau_{yz} = 0$$

и

$$\varepsilon_x = -(1 - \mu) p/E; \quad \varepsilon_y = -(1 - \mu) p/E; \quad \gamma_{xy} = 0; \\ \varepsilon_z = 2\mu p/E; \quad \gamma_{xz} = 0; \quad \gamma_{yz} = 0.$$

В данном случае решение, полученное по уравнениям теории плоского напряженного состояния, полностью совпадает с точным решением трехмерной задачи теории упругости. Однако в общем случае это не так. Можно показать, что в пластине постоянной толщины, нагруженной произвольно изменяющимися по контуру нагрузками, напряженное состояние тем больше будет отличаться от плоского напряженного состояния, чем толще пластина и чем резче изменяется напряженное состояние в плоскости пластины [25].

Если толщина пластины переменна, то, как легко видеть, напряженное состояние в ней тоже не будет плоским. Но для тонких пластин, в том числе и для пластин с плавно изменяющейся толщиной, теория плоского напряженного состояния дает, как правило, достаточно точные для практики результаты.

Рассмотрим теперь изотропное цилиндрическое тело произвольного поперечного сечения (рис. 2.3, а). Будем считать, что на торцах запрещены перемещения w , но не стеснены перемещения u и v . Нагрузки на боковой поверхности удовлетворяют следующим требованиям: $p_z = 0$; p_x и p_y произвольны, но одинаковы в каждом поперечном сечении.

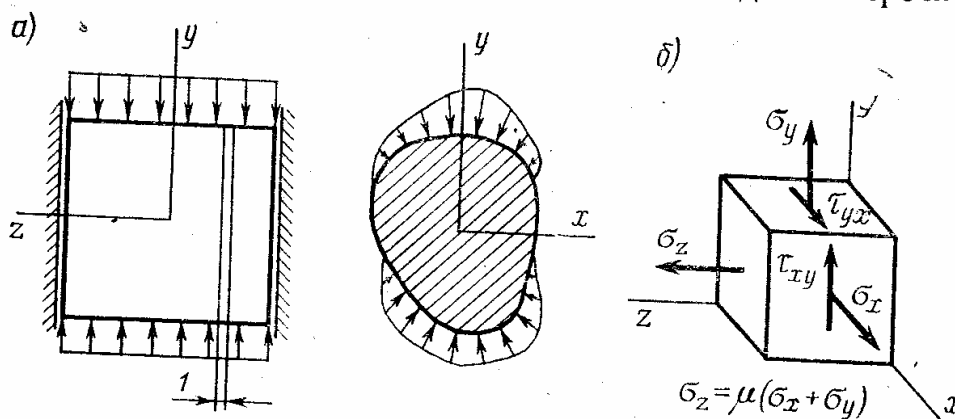


Рис. 2.3

чении. Аналогичным требованиям удовлетворяют и объемные нагрузки: $Z = 0$, $X = X(x, y)$, $Y = Y(x, y)$. Кроме того, внешние нагрузки предполагаются самоуравновешенными.

Поскольку по условиям задачи торцовые поперечные сечения остаются плоскими и не смещаются в продольном направлении, то в силу симметрии среднее поперечное сечение тоже останется плоским и неподвижным. Из тех же соображений симметрии следует, что поперечные сечения, делящие пополам каждую из половин цилиндра, тоже остаются плоскими и не смещаются в продольном направлении, и т. д. Следовательно, все поперечные сечения оказываются в одинаковых условиях и в каждом из них перемещения $w = 0$, $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$. Поэтому во всем рассматриваемом теле выполняются условия, вытекающие из формул (1.17):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x(x, y); & \varepsilon_y &= \varepsilon_y(x, y); & \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}(x, y); \\ \varepsilon_z &= 0; & \gamma_{xz} &= 0; & \gamma_{yz} &= 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Деформированное состояние, подчиненное этим условиям, называют плоским деформированным состоянием. Для дальнейшего исследования плоского деформированного состояния достаточно рассмотреть один слой единичной толщины, выделенный из тела двумя поперечными сечениями (рис. 2.3, а).

Из закона Гука и условий (2.10) следует

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x(x, y); & \sigma_y &= \sigma_y(x, y); & \tau_{xy} &= \tau_{xy}(x, y); \\ \sigma_z &= \mu(\sigma_x + \sigma_y); & \tau_{xz} &= 0; & \tau_{yz} &= 0. \end{aligned}$$

Это напряженное состояние, соответствующее плоскому деформированному состоянию, показано на рис. 2.3, б.

Общие уравнения равновесия (1.32) в случае плоского деформированного состояния тоже сводятся к двум уравнениям (1.33). Закон Гука в случае плоского деформированного состояния дает

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z) = \frac{1-\mu^2}{E} \left(\sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_y \right); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu\sigma_x - \mu\sigma_z) = \frac{1-\mu^2}{E} \left(\sigma_y - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_x \right); \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}\end{aligned}\quad (2.11)$$

и

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{(1-\mu)E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left(\varepsilon_x + \frac{\mu}{1-\mu} \varepsilon_y \right); \\ \sigma_y &= \frac{(1-\mu)E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left(\varepsilon_y + \frac{\mu}{1-\mu} \varepsilon_x \right); \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy}.\end{aligned}\quad (2.12)$$

Необходимые для решения компоненты деформаций, как и в случае плоского напряженного состояния, выражаются через перемещения по зависимостям (2.3).

Итак, для решения задачи о плоском деформированном состоянии мы получили снова восемь уравнений (1.33), (2.3), (2.11) с восемью неизвестными функциями. Граничные условия для этой системы уравнений формулируются аналогично тому, как это было сделано для плоского напряженного состояния.

Покажем, что при постоянных объемных нагрузках $X = \rho g_x$ и $Y = \rho g_y$ решение задачи о плоском деформированном состоянии в напряжениях сводится к решению того же бигармонического уравнения (2.8), к которому была сведена задача о плоском напряженном состоянии. Действительно, уравнения равновесия и зависимости, связывающие компоненты деформаций ε_x , ε_y , γ_{xy} с перемещениями u и v , в этих двух задачах полностью совпадают; различие между ними заключается только в зависимостях закона Гука, связывающих компоненты деформаций с компонентами напряжений. Преобразуем формулы (2.11) и (2.12), введя новые обозначения:

$$\bar{E} = E / (1 - \mu^2); \quad \bar{\mu} = \mu / (1 - \mu). \quad (2.13)$$

Тогда, как легко проверить, получим

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{\bar{E}} (\sigma_x - \bar{\mu}\sigma_y); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{\bar{E}} (\sigma_y - \bar{\mu}\sigma_x); \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\bar{\mu})}{\bar{E}} \tau_{xy}\end{aligned}\quad (2.14)$$

и

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\bar{E}}{1 - \bar{\mu}^2} (\varepsilon_x + \bar{\mu}\varepsilon_y); \\ \sigma_y &= \frac{\bar{E}}{1 - \bar{\mu}^2} (\varepsilon_y + \bar{\mu}\varepsilon_x); \\ \tau_{xy} &= \frac{\bar{E}}{2(1 + \bar{\mu})} \gamma_{xy}.\end{aligned}\tag{2.15}$$

Сравнивая эти зависимости с зависимостями (2.1) и (2.2), видим, что задачу о плоском деформированном состоянии можно трактовать и как задачу о плоском напряженном состоянии, но для материала с другими упругими свойствами: модулем упругости \bar{E} и коэффициентом Пуассона $\bar{\mu}$. Так как в уравнение (2.8) упругие свойства материала не входят, то оно остается справедливым и для плоского деформированного состояния.

Если задачу о плоском деформированном состоянии решать в перемещениях, то мы снова приходим к системе уравнений (2.5), но только вместо величин E и μ в ней будут фигурировать \bar{E} и $\bar{\mu}$.

Полная аналогия уравнений задач о плоском напряженном и плоском деформированном состоянии позволяет при построении общих решений объединить их в одну плоскую задачу теории упругости.

§ 2.2. Обратная задача теории упругости.

Принцип Сен-Венана

В теории упругости различают прямую и обратную задачи. Прямой называется задача, в которой при известных форме, размерах и упругих свойствах тела требуется по заданным нагрузкам и условиям закрепления определить напряженно-деформированное состояние. В обратной задаче, наоборот, при известных форме, размерах и упругих свойствах тела требуется найти нагрузки и условия закрепления, соответствующие заданному напряженно-деформированному состоянию.

Основное практическое значение имеет прямая задача: именно такие задачи обычно встречаются в инженерной практике. Но решение уравнений в частных производных (2.5) или (2.8), к которым сводится плоская задача, при произвольно заданных форме контура и нагрузках представляет собой чрезвычайно сложную математическую проблему. Точное решение этих уравнений удается получить лишь для ряда частных задач. В подавляющем большинстве случаев решение может быть выполнено только с помощью того или иного приближенного метода.

Получить точное решение обратной задачи, как правило, неизмеримо проще. Действительно, если для области произвольной формы заданы какие-то функции перемещений $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$, то по формулам (2.2) и (2.3) легко определить деформации и напряжения.

Далее из условий равновесия (1.33) или (2.5) можно найти объемные нагрузки $X = X(x, y)$ и $Y = Y(x, y)$, а по значениям перемещений (или напряжений) на контуре определить геометрические (или силовые) граничные условия, соответствующие заданному напряженно-деформированному состоянию.

Точные решения обратных задач полезны по двум причинам. Во-первых, некоторые из решенных обратных частных задач имеют непосредственное практическое значение, и в этих случаях при прямой постановке задачи можно сразу воспользоваться готовым точным решением. Во-вторых, даже вычурное, заведомо не имеющее непосредственного практического применения, но точное решение обратной задачи может быть использовано как эталон при разработке приближенных методов решения прямой задачи.

Рассмотрим примеры построения решений обратной плоской задачи теории упругости с помощью алгебраических полиномов. Как было показано в предыдущем параграфе, решение плоской задачи в напряжениях сводится к бигармоническому уравнению (2.8). Очевидно, что полином

$$\begin{aligned} \varphi = c_{20} x^2 + c_{11} xy + c_{02} y^2 + c_{21} x^2 y + c_{12} xy^2 + c_{30} x^3 + \\ + c_{03} y^3 + c_{31} x^3 y + c_{13} xy^3 \end{aligned} \quad (2.16)$$

тождественно удовлетворяет уравнению (2.8) при любых c_{ik} . Заметим, что вводить в решение слагаемые c_{00} , $c_{10} x$, $c_{01} y$ не имеет смысла, так как на значениях напряжений в соответствии с формулами (2.6) они никак не отражаются.

По формулам (2.6), считая пока $\rho g_x = 0$ и $\rho g_y = 0$, находим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2c_{02} + 2c_{12} x + 6c_{03} y + 6c_{13} xy; \\ \sigma_y &= 2c_{20} + 2c_{21} y + 6c_{30} x + 6c_{31} xy; \\ \tau_{xy} &= -c_{11} - 2c_{21} x - 2c_{12} y - 3c_{31} x^2 - 3c_{13} y^2. \end{aligned} \quad (2.17)$$

При этом уравнения равновесия (1.33) будут, конечно, автоматически удовлетворены.

Следует подчеркнуть, что на этом этапе решения обратной задачи еще не фигурируют ни форма интересующей нас области, ни ее положение относительно координатных осей x и y . Далее, конкретизировав геометрию той области, для которой находят решение обратной задачи, по зависимостям (2.4) определяют контурные нагрузки, которые необходимо приложить, чтобы создать поле напряжений (2.17). Эти контурные нагрузки автоматически должны получаться самоуравновешенными, поскольку и внутри области, и на ее границе условия равновесия каждого элемента удовлетворены. В силу линейности задачи можно получать решения для отдельных членов полинома (2.16), а затем, используя принцип независимости действия сил, конструировать различные комбинации этих решений.

Намеченная схема решения обратной задачи в прямоугольных координатах наиболее естественно выглядит для прямоугольной области (прямоугольной полосы) со сторонами, параллельными координат-

ным осям. Так, например, взяв $\varphi = c_{02} y^2$, получим $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$, $\sigma_x = 2c_{02}$, что соответствует *одноосному равномерному растяжению (сжатию)* полосы нормальными равномерно распределенными контурными нагрузками (рис. 2.4, а). Если $\varphi = c_{11} xy$, получим $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = -c_{11}$: в этом случае полоса подвержена *чистому сдвигу* под действием равномерно распределенных по контуру касательных сил (рис. 2.4, б). При $\varphi = c_{03} y^3$ получим *чистый изгиб* полосы нормальными контурными нагрузками, линейно изменяющимися по ко-

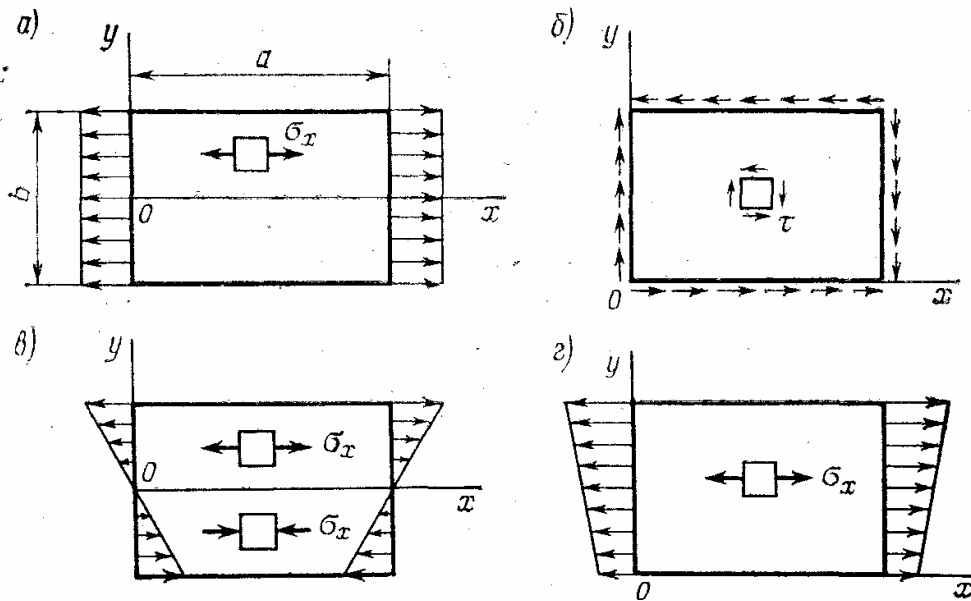


Рис. 2.4

ординате y (рис. 2.4, в); при этом $\sigma_x = 6c_{03} y$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$. Аналогично можно построить решения и для всех остальных членов полинома (2.16).

Полученные решения можно объединять. Так, взяв функцию напряжений в виде двух слагаемых $\varphi = c_{02} y^2 + c_{03} y^3$, получим $\sigma_x = 2c_{02} + 6c_{03} y$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$, т. е. получим сочетание растяжения (сжатия) полосы с чистым изгибом (рис. 2.4, г).

Рассмотрим чуть более сложную задачу. Функцию напряжений возьмем в виде двух слагаемых $\varphi = c_{11} xy + c_{13} xy^3$ и найдем такое соотношение между коэффициентами c_{11} и c_{13} , при котором продольные стороны полосы (рис. 2.5, а) свободны от касательных напряжений. Из формул (2.17) имеем

$$\sigma_x = 6c_{13} xy; \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -c_{11} - 3c_{13} y^2,$$

откуда искомое соотношение $c_{11} = -3c_{13} (b/2)^2$, где b — ширина полосы (см. рис. 2.4, а). Окончательно получаем

$$\sigma_x = 6c_{13} xy, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 3c_{13} [(b/2)^2 - y^2]. \quad (2.18)$$

Это напряженное состояние соответствует поперечному изгибу полосы под действием касательных контурных нагрузок, изменяющихся на ее торцах по квадратичному закону и уравновешенных линейно изменяющейся нормальной нагрузкой на правом по рисунку торце.

Бигармонические функции, т. е. функции, удовлетворяющие бигармоническому уравнению (2.8), можно построить и с помощью полиномов более высокой степени, чем полином (2.16), но тогда их коэффициенты должны быть связаны определенными соотношениями. Например, будем искать бигармоническую функцию в виде полинома четвертой степени

$$\varphi = c_{40} x^4 + c_{22} x^2 y^2 + c_{04} y^4. \quad (2.19)$$

Подставив эту функцию в бигармоническое уравнение (2.8), найдем соотношение, связывающее коэффициенты c_{ik} :

$$24c_{40} + 8c_{22} + 24c_{04} = 0.$$

При выполнении последнего соотношения функция (2.19) удовлетворяет бигармоническому уравнению (2.8).

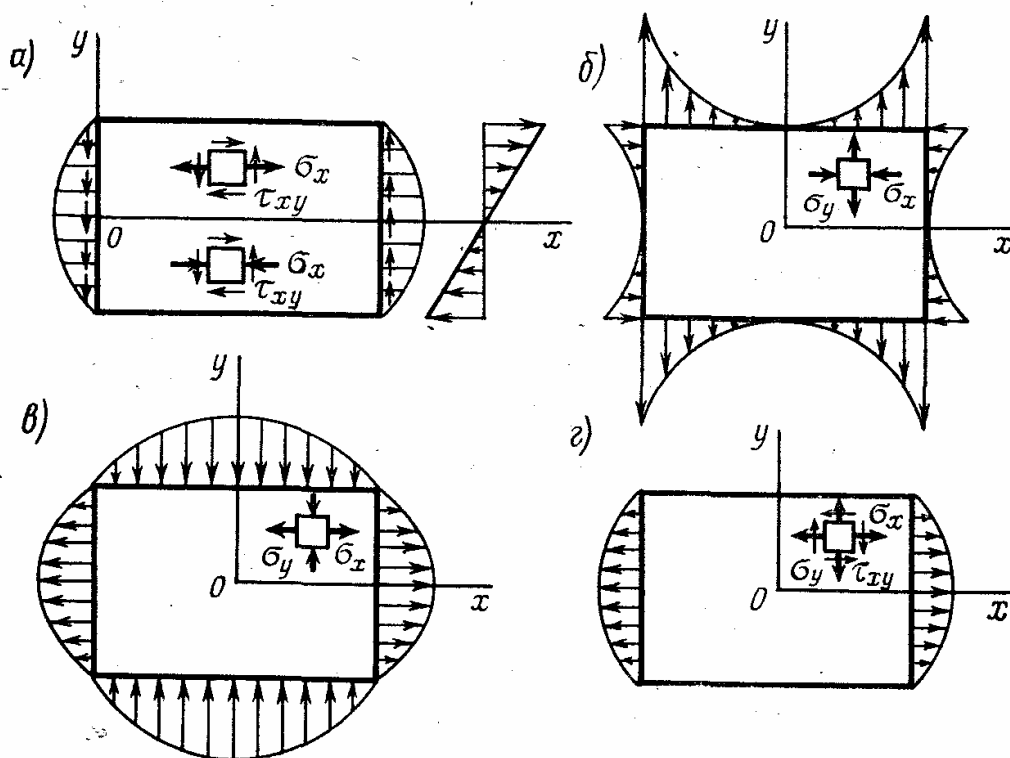


Рис. 2.5

Воспользуемся функцией (2.19) для решения еще одной обратной задачи. Положим $c_{22} = 0$; тогда функцию напряжений, удовлетворяющую уравнению (2.8), очевидно, можно записать в таком виде:

$$\varphi = c(x^4 - y^4).$$

Из формул (2.6) находим

$$\sigma_x = -12cy^2, \quad \sigma_y = 12cx^2, \quad \tau_{xy} = 0.$$

Такому напряженному состоянию соответствует нормальная контурная нагрузка, изменяющаяся вдоль сторон полосы по квадратичному закону (рис. 2.5, б). Наложив на полученное решение одноосное рас-

тяжение по оси x и одноосное сжатие по оси y и изменив обозначения коэффициентов, можно получить следующее напряженное состояние:

$$\sigma_x = \sigma_0 [1 - (2y/b)^2], \quad \sigma_y = -\sigma_0 [1 - (2x/a)^2] (a^2/b^2), \quad \tau_{xy} = 0,$$

где a и b — соответственно длина и ширина полосы (см. рис. 2.4, a). Это состояние соответствует функции напряжений

$$\varphi = \frac{\sigma_0}{6} \left(3y^2 - 3 \frac{a^2}{b^2} x^2 + 2 \frac{x^4 - y^4}{b^2} \right).$$

Нормальные контурные нагрузки, приводящие к такому напряженному состоянию, изменяются по квадратичному закону, повторяющему закон изменения нормальных напряжений σ_x и σ_y в сечениях $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ (рис. 2.5, b).

Важно обратить внимание на следующее обстоятельство. Как мы видели в предыдущих примерах, нормальные нагрузки, линейно изменяющиеся вдоль стороны полосы, приводят к одноосному напряженному состоянию с напряжениями σ_x , постоянными вдоль всей полосы (см. рис. 2.4, a , b , g). Другим словами, линейная нормальная контурная нагрузка передается без искажения по всей длине полосы и не вызывает никаких напряжений, кроме σ_x . Однако в общем случае это совсем не так: нормальная контурная нагрузка, изменяющаяся не по линейному закону, вызывает в полосе неоднородное двухосное напряженное состояние с напряжениями σ_x , изменяющимися как по ширине, так и по длине полосы. Например, если у изображенной на рис. 2.5, b полосы снять нагрузку с продольных сторон, то на первый взгляд может показаться, что это приведет только к обращению в нуль напряжений σ_y и не отразится на значении напряжений σ_x . В действительности же, хотя напряженное состояние

$$\sigma_x = \sigma_0 [1 - (2y/b)^2], \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0$$

является статически возможным, т. е. уравнения равновесия и силовые граничные условия при таком напряженном состоянии удовлетворяются, но бигармоническое уравнение (2.8), как нетрудно проверить, удовлетворено не будет. Следовательно, это напряженное состояние не является решением задачи. В данном случае получить точное решение оказывается совсем не просто; можно только заранее утверждать, что действительное напряженное состояние не будет одноосным (рис. 2.5, g).

В приведенных решениях обратных задач объемные нагрузки полагались равными нулю. Нетрудно дополнить эти решения и для того случая, когда имеются постоянные объемные нагрузки $X = \rho g_x$ и $Y = \rho g_y$. Для этого достаточно ввести в решение величины $\sigma_x = x\rho g_y$ и $\sigma_y = y\rho g_x$ и учесть их в граничных условиях.

Точное решение обратной задачи на основе принципа Сен-Венана может быть использовано для получения приближенных решений целой серии прямых задач, имеющих непосредственное практическое значение. В середине прошлого века Сен-Венаном было высказано предположение, что характер распределения нагрузки, приложенной к малой части тела, существенно влияет на напряженное состояние

лишь в непосредственной близости от места ее приложения, а в остальной части тела напряженное состояние достаточно точно определяется только величинами равнодействующих силы и момента этой нагрузки и практически не зависит от закона распределения последней. Это предположение, получившее позже название принципа Сен-Венана, было для многих частных задач подтверждено и теоретически, и экспериментально*.

Проиллюстрируем использование этого важнейшего принципа несколькими примерами. Рассмотрим удлиненную полосу длиной a и шириной b (рис. 2.6, а), нагруженную по торцам нормальными силами $P_x = P_x(y)$, равнодействующая которых P направлена по оси x . Согласно принципу Сен-Венана в полосе, за исключением участков, непосредственно прилегающих к торцам, напряженное состояние достаточно точно определяется только значением этой равнодействующей и практически не зависит от конкретного закона распределения нагрузки $P_x(y)$. Другими словами, если заданную нормальную нагрузку

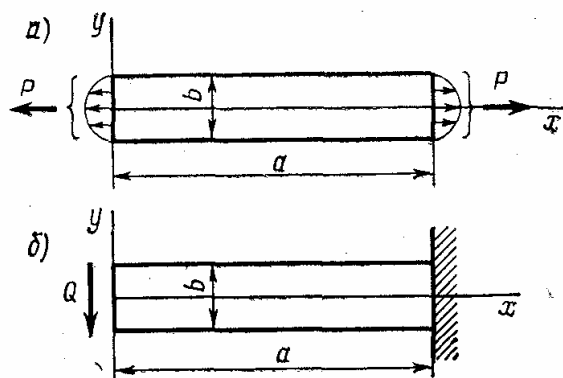


Рис. 2.6

заменить любой другой нагрузкой, равнодействующая которой тоже равна P , то это скажется на характере напряженного состояния лишь вблизи торцов. Поэтому при практическом решении прямой задачи можно заданный произвольный закон распределения контурной нагрузки заменить тем законом, который соответствует известному решению обратной задачи (сохранив значение равнодействующей, т. е. взяв нагрузку, статически эквивалентную заданной). В рассматриваемом случае для этой цели проще всего взять постоянную нормальную нагрузку (см. рис. 2.4, а). Считая, как и раньше, толщину полосы равной единице, для напряженного состояния полосы вдали от торцов получим

$$\sigma_x = P/S; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = 0,$$

где $S = 1 \cdot b$ — площадь поперечного сечения полосы.

Если приложенная к торцам удлиненной полосы контурная нагрузка дает кроме направленной по оси x равнодействующей P еще и изгибающий момент M , то и в этом случае в соответствии с принципом Сен-Венана напряженное состояние вдали от торцов легко найти, заменив заданную нагрузку такой статически эквивалентной нагрузкой, которая вытекает из граничных условий обратной задачи с известным решением. Комбинируя решения обратных задач, изображенных на

* Известны случаи, когда принцип Сен-Венана не может быть применен (тонкостенные стержни, резко анизотропные конструкции и т. п.), но для плоской задачи теории упругости применение этого принципа полностью оправдано.

рис. 2.4, а, в, находим напряженное состояние полосы в сечениях, достаточно удаленных от торцов:

$$\sigma_x = P/S + My/J; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = 0,$$

где $J = 1 \cdot b^3/12$ — момент инерции поперечного сечения полосы.

Рассмотрим еще одну задачу: поперечный изгиб консоли (рис. 2.6, б). К левому торцу удлиненной полосы длиной a и шириной b приложена касательная контурная нагрузка с равнодействующей Q , направленной по оси y ; правый по рисунку торец полосы неподвижно закреплен. Для определения напряженного состояния такой полосы у нас уже есть решение обратной задачи (см. рис. 2.5, а). Воспользовавшись этим решением (2.18) и заменив произвольную контурную нагрузку статически эквивалентной касательной нагрузкой, изменяющейся по квадратичному закону $p_y = (3/2) Q [1 - (2y/b)^2]/S$, приходим к формулам

$$\sigma_x = \frac{Qx}{J} y, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau = \frac{3}{2} \frac{Q}{S} \left[1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2 \right],$$

где S — площадь поперечного сечения полосы. Эти формулы описывают напряженное состояние во всех сечениях, достаточно удаленных от торцов.

Но нужно четко сознавать, что из полученного решения абсолютно ничего нельзя узнать о распределении напряжений непосредственно вблизи торцов полосы: для этого необходимо располагать дополнительной информацией о способах приложения нагрузки на левом торце и закрепления правого торца и, имея такую информацию, решать неизмеримо более сложную прямую задачу теории упругости. Это замечание относится ко всем решениям, полученным на основе принципа Сен-Венана.

§ 2.3. Плоская задача теории упругости в полярных координатах

Уравнения плоской задачи теории упругости в полярной системе координат можно получить, или повторив вывод этих уравнений в новой системе координат, или преобразовав формально окончательные уравнения из § 2.1, записанные в прямоугольной системе координат.

Для вывода уравнений равновесия и соотношений, связывающих компоненты деформаций с перемещениями, воспользуемся первым путем. Условия равновесия элемента с размерами dr и $r d\theta$ (рис. 2.7, а) в проекции на оси x_1 и y_1 выглядят так:

$$\begin{aligned} & -\sigma_r r d\theta + \left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - \tau_{r\theta} dr + \\ & + \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr - \sigma_\theta dr d\theta + \rho g_r r d\theta dr = 0; \\ & -\sigma_\theta dr + \left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr - \tau_{r\theta} r d\theta + \end{aligned}$$

$$+ \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta + \\ + \tau_{r\theta} dr d\theta + \rho g_\theta r d\theta dr = 0.$$

После упрощений получаем два уравнения:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_r) + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{r \partial \theta} - \frac{\sigma_\theta}{r} + \\ + \rho g_r = 0; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{r\theta}) + \frac{\partial \sigma_\theta}{r \partial \theta} + \\ + \frac{\tau_{r\theta}}{r} + \rho g_\theta = 0. \quad (2.20)$$

Здесь ρg_r и ρg_θ — объемные инерционные нагрузки; остальные обозначения ясны из рисунка.

Для вывода соотношений, связывающих компоненты деформаций в полярной системе координат с перемещениями, проследим за смещением трех точек A , B и C (рис. 2.7, б). Обозначив перемещения в радиальном и окружном направлениях через u и v , составим

таблицу координат этих точек до и после деформации в системе координат с осями $x_1 y_1$, связанной с точкой A :

	A	B	C	A_1	B_1	C_1
x_1	0	0	dr	u	$u + \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta - v d\theta$	$dr + u + \frac{\partial u}{\partial r} dr$
y_1	0	$r d\theta$	0	v	$r d\theta + v + \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta + u d\theta$	$v + \frac{\partial v}{\partial r} dr$

Используя эту таблицу, легко определить длины отрезков $A_1 C_1$ и $A_1 B_1$:

$$A_1 C_1 = dr \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2};$$

$$A_1 B_1 = r d\theta \sqrt{\left(1 + \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{u}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{r \partial \theta} - \frac{v}{r}\right)^2}.$$

Относительные удлинения в радиальном и окружном направлениях

$$\epsilon_r = \frac{A_1 C_1 - AC}{AC} = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2} - 1 = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 + \dots;$$

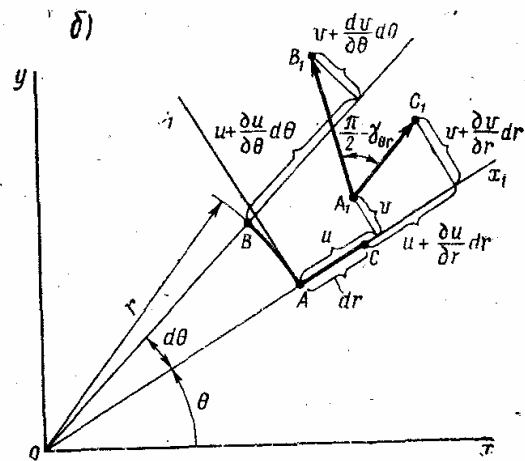
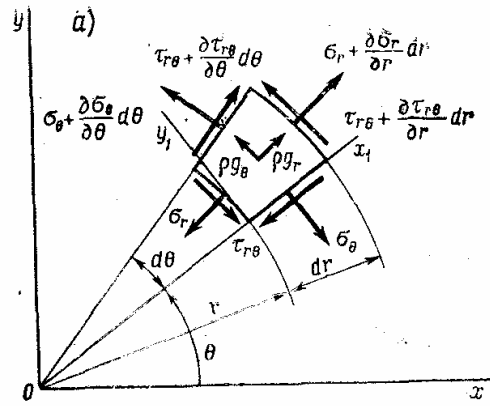


Рис. 2.7

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{A_1 B_1 - AB}{AB} = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{u}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{r \partial \theta} - \frac{v}{r}\right)^2} - 1 =$$

$$= \left(\frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{u}{r}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{r \partial \theta} - \frac{v}{r}\right)^2 + \dots$$

Для определения угла сдвига $\gamma_{r\theta}$ найдем скалярное произведение векторов $\vec{A}_1 \vec{B}_1$ и $\vec{A}_1 \vec{C}_1$ по формуле

$$\vec{A}_1 \vec{C}_1 \cdot \vec{A}_1 \vec{B}_1 = A_1 C_1 \cdot A_1 B_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{r\theta}\right) = A_1 C_1 \cdot A_1 B_1 \sin \gamma_{r\theta},$$

откуда

$$\vec{A}_1 \vec{C}_1 \cdot \vec{A}_1 \vec{B}_1 = dr (1 + \varepsilon_r) rd\theta (1 + \varepsilon_{\theta}) \sin \gamma_{r\theta}.$$

С другой стороны, скалярное произведение можно подсчитать и как сумму попарных произведений проекций векторов $\vec{A}_1 \vec{C}_1$ и $A_1 B_1$ на оси x_1 и y_1 :

$$\vec{A}_1 \vec{C}_1 \cdot \vec{A}_1 \vec{B}_1 = \left(dr + \frac{\partial u}{\partial r} dr\right) \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta - v d\theta\right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial v}{\partial r} dr\right) \left(rd\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta + u d\theta\right).$$

Сравнивая эти два выражения и считая $\sin \gamma_{r\theta} = \gamma_{r\theta}$, можно записать

$$(1 + \varepsilon_r)(1 + \varepsilon_{\theta}) \gamma_{r\theta} = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right) \left(\frac{\partial u}{r \partial \theta} - \frac{v}{r}\right) + \frac{\partial v}{\partial r} \left(1 + \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{u}{r}\right).$$

Окончательно, ограничившись в выражениях для ε_r , ε_{θ} и $\gamma_{r\theta}$ линейными слагаемыми, получим

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta} = \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{u}{r}; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \quad (2.21)$$

Для изотропного тела закон Гука в любой ортогональной системе координат имеет тот же вид, что и в декартовой системе координат. Например, в случае плоского напряженного состояния, изменив только индексы в формулах (2.2), можно записать

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_r + \mu \varepsilon_{\theta});$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_{\theta} + \mu \varepsilon_r); \quad (2.22)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{E}{1 - \mu^2} \frac{1 - \mu}{2} \gamma_{r\theta}.$$

Аналогично преобразуются и все другие зависимости, связывающие компоненты деформаций с компонентами напряжений в плоской задаче теории упругости.

Рассмотрим напряженное состояние, обладающее полярной симметрией* при $\tau_{r\theta} = 0$. В этом случае напряжения σ_r и σ_θ могут изменяться только по радиусу r . Первое уравнение равновесия (2.20) принимает вид

$$\frac{1}{r} (r\sigma_r)' - \frac{\sigma_\theta}{r} + \rho g_r = 0, \quad (2.23)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по r ; объемная нагрузка ρg_r изменяется только по радиусу r . Второе уравнение равновесия будет тождественно удовлетворено при $\rho g_\theta = 0$.

Для изотропного тела любая симметрия напряженного состояния означает такую же симметрию деформированного состояния, т. е. в нашем случае $u = u(r)$, $v = 0$, $\gamma_{r\theta} = 0$ и из формул (2.21) следует

$$\epsilon_r = u'; \quad \epsilon_\theta = u/r. \quad (2.24)$$

В § 2.2 приведены примеры решения плоской задачи в напряжениях; для рассматриваемой задачи построим решение в перемещениях. Для этого, используя зависимости (2.22) и (2.24), выразим напряжения через перемещения:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(u' + \mu \frac{u}{r} \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{u}{r} + \mu u' \right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Подставив эти выражения в уравнение равновесия (2.23) получим одно уравнение с одной неизвестной функцией $u = u(r)$:

$$u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} = - \frac{1-\mu^2}{E} \rho g_r. \quad (2.26)$$

Последнее уравнение можно записать и так:

$$\left[\frac{1}{r} (ur)' \right]' = - \frac{1-\mu^2}{E} \rho g_r.$$

После двукратного интегрирования

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{1}{r} \int r \int \left(\frac{1-\mu^2}{E} \rho g_r \right) dr dr, \quad (2.27)$$

где постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий. После определения перемещения $u = u(r)$ по формулам (2.25) находят значения напряжений. Отметим, что после замены величин E и μ на \bar{E} и $\bar{\mu}$ с помощью выражений (2.13) решение, полученное сейчас для плоского напряженного состояния, дает решение для плоского деформированного состояния.

* Строго говоря, в общем случае напряженного состояния, обладающего полярной или осевой симметрией, возможно $\tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}(r)$; пример такого рода напряженного состояния дан в конце параграфа. Однако, когда говорят о полярной или осевой симметрии напряженно-деформированного состояния, обычно имеют в виду рассматриваемый здесь случай.

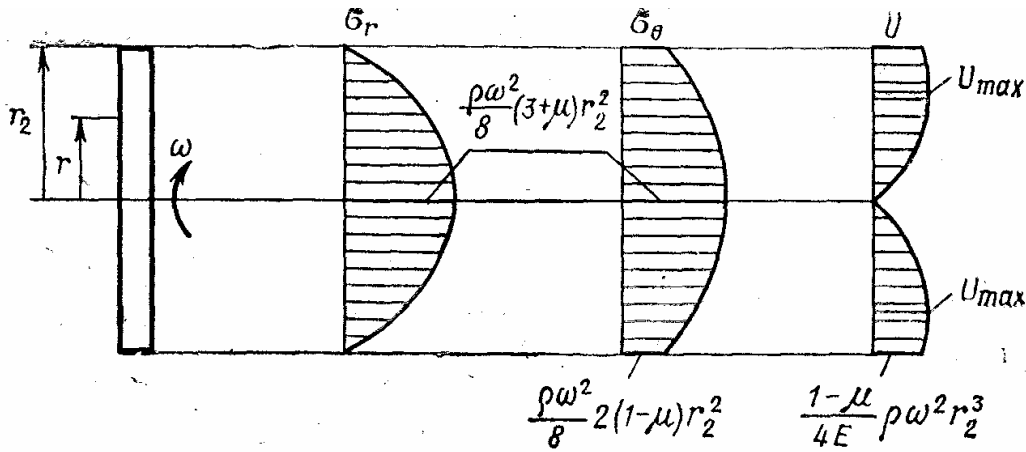


Рис. 2.8

В качестве первого примера использования полученного общего решения определим напряжения и перемещения в тонком диске, вращающемся с постоянной угловой скоростью ω (рис. 2.8). В этом случае получаем центростремительное ускорение $r\omega^2$ и объемную нагрузку $\rho\omega^2$. После интегрирования из выражения (2.27) находим

$$u = C_1 r + C_2 \frac{1}{r} - \frac{1-\mu^2}{E} \rho\omega^2 \frac{r^2}{8}. \quad (2.28)$$

Из формул (2.25) получаем выражения для напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[C_1(1+\mu) - C_2 \frac{1-\mu}{r^2} \right] - \rho\omega^2 \frac{3+\mu}{8} r^2; \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[C_1(1+\mu) + C_2 \frac{1-\mu}{r^2} \right] - \rho\omega^2 \frac{1+3\mu}{8} r^2. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Для сплошного диска граничные условия будут:

$$u(0) = 0, \quad \sigma_r(r_2) = 0.$$

Следовательно,

$$C_2 = 0; \quad C_1 = \frac{3+\mu}{1+\mu} \frac{1-\mu^2}{8E} \rho\omega^2 r_2^2,$$

и

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{8} \frac{1-\mu^2}{E} \rho\omega^2 r_2^2 \left(\frac{3+\mu}{1+\mu} \frac{r}{r_2} - \frac{r^3}{r_2^3} \right); \\ \sigma_r &= \frac{1}{8} (3+\mu) \rho\omega^2 r_2^2 \left(1 - \frac{r^2}{r_2^2} \right); \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{8} (3+\mu) \rho\omega^2 r_2^2 \left(1 - \frac{1+3\mu}{3+\mu} \frac{r^2}{r_2^2} \right), \end{aligned}$$

где r_2 — радиус диска; ρ — плотность материала диска.

Соответствующие эпюры показаны на рис. 2.8. Аналогично определяют перемещение $u = u(r)$ и распределение напряжений и при других граничных условиях в кольцевом диске.

В качестве второго примера использования общего решения (2.27) приведем задачу Ламе определения напряжений и перемещений в толстостенной трубе, нагруженной постоянным по ее длине внутренним давлением p_1 и внешним давлением p_2 . Вначале примем, что торцы трубы зафиксированы в осевом направлении и $\varepsilon_z = 0$, т. е. примем, что труба находится в условиях плоского деформированного состояния, рассмотренного в § 2.1. Тогда решение, полученное для плоского напряженного состояния, после замены E и μ на \bar{E} и $\bar{\mu}$ по формулам (2.13) даст решение рассматриваемой сейчас задачи. Учитывая, что объемные нагрузки отсутствуют, из выражения (2.27) получим

$$u = C_1 r + C_2 / r,$$

а из формул (2.25) находим

$$\sigma_r = \bar{E} \left(\frac{C_1}{1-\bar{\mu}} - \frac{C_2}{1+\bar{\mu}} \frac{1}{r^2} \right); \quad \sigma_\theta = \bar{E} \left(\frac{C_1}{1-\bar{\mu}} + \frac{C_2}{1+\bar{\mu}} \frac{1}{r^2} \right).$$

Введя новые произвольные постоянные

$$A_1 = \frac{\bar{E}}{1-\bar{\mu}} C_1; \quad A_2 = \frac{\bar{E}}{1+\bar{\mu}} C_2,$$

можем записать

$$u = \frac{1+\bar{\mu}}{\bar{E}} \left[A_1 (1-2\bar{\mu}) r + \frac{A_2}{r} \right] \quad (2.30)$$

и

$$\sigma_r = A_1 - A_2 / r^2; \quad \sigma_\theta = A_1 + A_2 / r^2. \quad (2.31)$$

Причем из закона Гука и условия $\varepsilon_z = 0$ следует

$$\sigma_z = 2\bar{\mu} A_1.$$

Постоянные A_1 и A_2 определяют из силовых граничных условий

$\sigma_r(r_1) = -p_1$ и $\sigma_r(r_2) = -p_2$:

$$A_1 = \frac{p_1 r_1^2 / r_2^2 - p_2}{1 - r_1^2 / r_2^2}; \quad A_2 = \frac{r_1^2 (p_1 - p_2)}{1 - r_1^2 / r_2^2},$$

где r_1 и r_2 — соответственно внутренний и внешний радиусы трубы. В итоге получаем законы распределения перемещений и напряжений по толщине стенки трубы, причем напряжение σ_z постоянно и при неподвижных торцах

$$\sigma_z^0 = 2\bar{\mu} \frac{p_1 r_1^2 / r_2^2 - p_2}{1 - r_1^2 / r_2^2}.$$

Это решение справедливо и в том случае, если торцы трубы не зафиксированы в осевом направлении, а нагружены постоянным давлением $p_3^0 = -\sigma_z^0$, где напряжение σ_z^0 определено последней формулой. Если же постоянное давление на торцах трубы $p_3 = p_3^0 + \Delta p_3$, то значения

напряжений σ_r и σ_θ по-прежнему определяются формулами (2.31), а осевое напряжение и радиальное перемещение соответственно равны

$$\sigma_z = \sigma_z^0 - \Delta p_3;$$

$$u = \frac{1+\mu}{E} \left[A_1(1-2\mu)r + \frac{A_2}{r} \right] + \frac{\mu}{E} \Delta p_3 r.$$

В частности, при $\Delta p_3 = \sigma_z^0$ получим решение для трубы со свободными торцами.

Заметим, что приведенное решение в соответствии с принципом Сен-Венана описывает напряженно-деформированное состояние в длинной трубе с произвольно нагруженными торцами, если только нагрузка на торцах статически эквивалентна осевой силе.

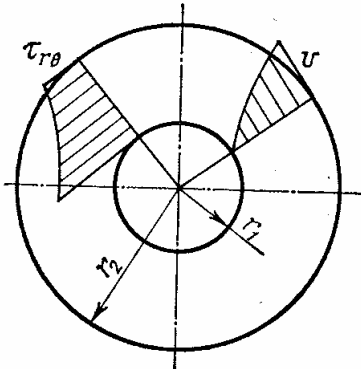


Рис. 2.9

Вернемся к общим уравнениям плоской задачи в полярных координатах и рассмотрим тот случай, когда объемные нагрузки ρg_r и ρg_θ равны нулю. В § 2.1 было показано, что решение плоской задачи в прямоугольной декартовой системе координат сводится к решению бигармонического уравнения (2.8); при этом напряжения выражаются через функцию напряжений φ по формулам (2.6). Вывод этих соотношений можно повторить и в полярных координатах, но делать это не обя-

зательно: достаточно преобразовать формально окончательные зависимости при переходе к полярной системе координат. При этом внешний вид бигармонического уравнения (2.8) сохраняется, но в полярной системе координат оператор Лапласа запишется так:

$$\nabla^2 (*) = \frac{\partial^2 (*)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial (*)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (*)}{\partial \theta^2}. \quad (2.32)$$

Функция напряжений φ в полярной системе координат связана с напряжениями зависимостями

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}; \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \quad (2.33)$$

При $\rho g_r = 0$ и $\rho g_\theta = 0$ эти зависимости обеспечивают тождественное удовлетворение уравнений равновесия (2.20).

Аналогично преобразуются и граничные условия при переходе к новой системе координат.

Решение бигармонического уравнения (2.8) в полярной системе координат проиллюстрируем одним простейшим примером. Для кольцевой области (рис. 2.9) зададим функцию напряжений $\varphi = C\theta$.

Нетрудно проверить, что выбранная функция удовлетворяет бигармоническому уравнению в полярных координатах. Согласно зависимостям (2.33) этой функции соответствует поле напряжений

$$\sigma_r = 0, \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = C/r^2.$$

Из закона Гука как для плоского напряженного, так и для плоского деформированного состояний имеем

$$\varepsilon_r = 0, \quad \varepsilon_\theta = 0, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{2(1+\mu)C}{E r^2}.$$

Тогда для определения перемещений из формул (2.21) получим уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = \frac{2(1+\mu)C}{E r^2}.$$

Отсюда, положив для определенности $v(r_1) = 0$, придем к такому результату:

$$u = 0; \\ v = \frac{1+\mu}{E} \frac{C}{r_1} \left(\frac{r}{r_1} - \frac{r_1}{r} \right).$$

На рис. 2.9 этот результат изображен графически.

§ 2.4. Осесимметричный изгиб круглых пластин

В основе технической теории пластин и оболочек, используемой при расчете тонкостенных элементов конструкций, лежат два важных упрощающих допущения — *гипотезы Кирхгофа*. С этими допущениями мы познакомимся на примере задачи об осесимметричном изгибе круглой пластины постоянной толщины — одной из самых простых задач теории пластин.

Отнесем тонкую круглую пластину к цилиндрической системе координат, направив ось z по оси вращения и поместив начало координат посередине толщины h (рис. 2.10). Пластина нагружена поперечными силами, приложенными симметрично относительно оси z ; закрепление контура пластины также осесимметрично. Для исследования напряженно-деформированного состояния пластины, вызванного ее поперечным изгибом, используем упрощающие допущения теории пластин и оболочек.

Первое допущение, или гипотеза неизменности нормалей, носит кинематический характер: *все материальные элементы пластины, до деформации перпендикулярные ее срединной плоскости, после деформации остаются прямолинейными и перпендикулярными искривленной срединной плоскости, а длины их не меняются.*

Второе допущение, или гипотеза ненадавливания слоев, относится к напряженному состоянию пластины: *нормальные напряжения σ_z в площадках, параллельных срединной плоскости, пренебрежимо малы по сравнению с нормальными напряжениями в площадках, перпендикулярных срединной плоскости.*

Задачу изгиба пластины рассмотрим в линейной постановке, т. е. прогибы пластины будем считать малыми по сравнению с ее толщиной, уравнения равновесия составим для недеформированного элемента пластины, а в выражениях для относительных удлинений ограничимся линейными слагаемыми. При такой постановке задачи можно считать, что точки срединной плоскости пластины получают только перемещения $w = w(r)$ в направлении оси z , а срединную плоскость принять нерастяжимой.

Геометрические соотношения, описывающие деформацию пластины, нетрудно получить, опираясь на первое допущение. В силу симметрии задачи достаточно рассмотреть деформацию одного радиального сечения пластины (рис. 2.11, а). Проследим за перемещением материального элемента AB , до деформации перпендикулярного срединной плоскости пластины. После деформации (рис. 2.11, б) этот элемент, оставаясь в плоскости сечения, повернется на угол ϑ и займет положение

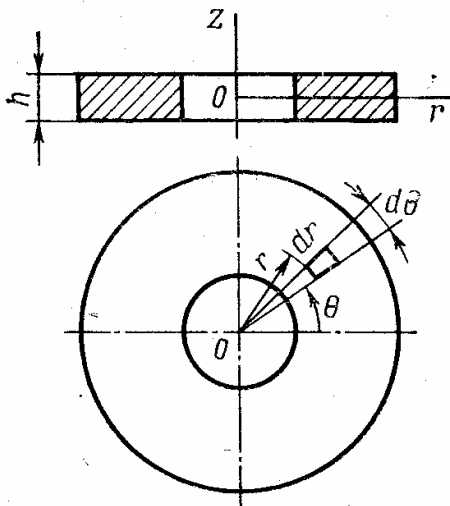


Рис. 2.10

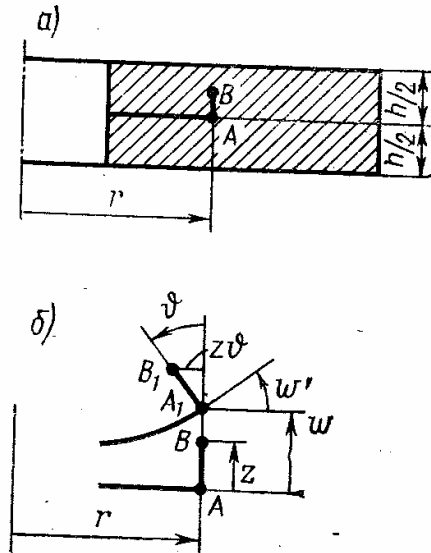


Рис. 2.11

A_1B_1 . Поперечные перемещения $w(r)$ малы, поэтому угол наклона касательной к искривленной срединной плоскости можно принять равным w' . Тогда из первого допущения следует

$$\vartheta = w', \quad (2.34)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по r .

Поскольку в соответствии с первым допущением длина элемента AB не изменяется и угол ϑ мал, точка B перемещается в радиальном направлении на величину

$$u = -z\vartheta. \quad (2.35)$$

Воспользовавшись зависимостями (2.24), находим величины относительных удлинений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= u' = -z\vartheta', \\ \varepsilon_\theta &= u/r = -z\vartheta/r. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Заметим еще, что гипотеза неизменности нормалей эквивалентна допущению, что углы сдвига $\gamma_{rz} = 0$ по всей толщине пластины. Формально это следует из выражений (1.17), (2.34) и (2.35):

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} = w' - \vartheta \equiv 0. \quad (2.37)$$

Связь между внутренними силовыми факторами в пластине и перемещениями точек ее срединной плоскости устанавливают с помощью второго основного допущения. Считая материал пластины изотропным и подчиняющимся закону Гука и положив на основании гипотезы ненадавливания слоев $\sigma_z = 0$, найдем связь между напряжениями σ_r , σ_θ и относительными удлинениями ϵ_r , ϵ_θ по формулам (2.22) для плоского напряженного состояния. С учетом зависимостей (2.36) получим

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -z \frac{E}{1-\mu^2} \left(\vartheta' + \mu \frac{\vartheta}{r} \right), \\ \sigma_\theta &= -z \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\vartheta}{r} + \mu \vartheta' \right).\end{aligned}\quad (2.38)$$

В силу симметрии задачи $\tau_{r\theta} = 0$.

Нормальные напряжения, линейно распределенные по толщине, статически эквивалентны изгибающим моментам в сечениях пластины. В теории пластин и оболочек пользуются значением интенсивности этих моментов, т. е. отношением момента к длине сечения (обычно интенсивности моментов называют просто моментами). В окружном сечении (рис. 2.12) изгибающий момент

$$\begin{aligned}M_i &= - \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_r z dz = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\vartheta' + \mu \frac{\vartheta}{r} \right) \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz = \\ &= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \left(\vartheta' + \mu \frac{\vartheta}{r} \right).\end{aligned}$$

За положительное направление момента M_r выбрано направление, соответствующее положительным значениям величин ϑ и ϑ' .

Аналогично подсчитывают внутренний изгибающий момент в радиальном сечении:

$$M_\theta = - \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\theta z dz = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\vartheta}{r} + \mu \vartheta' \right).$$

Окончательно запишем

$$\begin{aligned}M_r &= D \left(\vartheta' + \mu \frac{\vartheta}{r} \right); \\ M_\theta &= D \left(\frac{\vartheta}{r} + \mu \vartheta' \right),\end{aligned}\quad (2.39)$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}.\quad (2.40)$$

Величину D называют жесткостью пластины (или оболочки) на изгиб или цилиндрической жесткостью.

В окружном сечении возникают не только нормальные напряжения σ_r , но и касательные напряжения τ_{rz} . (Из условия симметрии задачи в радиальном сечении касательные напряжения $\tau_{\theta r} = 0$ и поперечная сила $Q_\theta = 0$.) Равнодействующая касательных напряжений τ_{rz} , распределенных по толщине пластины, дает поперечную силу, интенсив-

ность которой обозначим Q_r и в дальнейшем будем называть просто поперечной силой. Необходимо подчеркнуть, что, поскольку принята гипотеза неизменности нормалей и углы сдвига $\gamma_{r\theta} = 0$, касательные напряжения $\tau_{r\theta}$ и поперечную силу Q_r нельзя связать с деформацией пластины с помощью закона Гука.

Рассмотрим условия равновесия элемента, выделенного из пластины (см. рис. 2.10). На гранях этого элемента действуют внутренние силовые факторы (рис. 2.13), причем в силу симметрии момент M_θ по окружности пластины не меняется, а поперечная сила $Q_\theta = 0$. Через

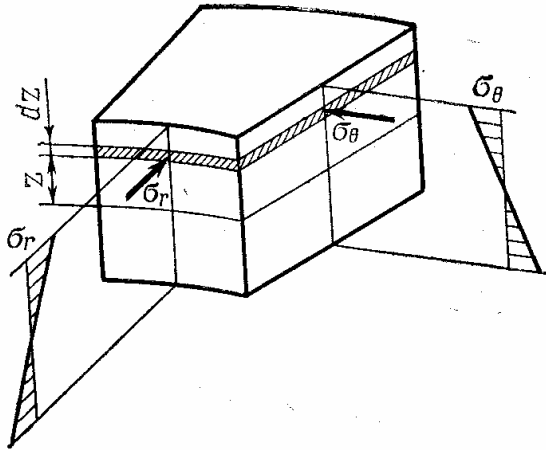


Рис. 2.12

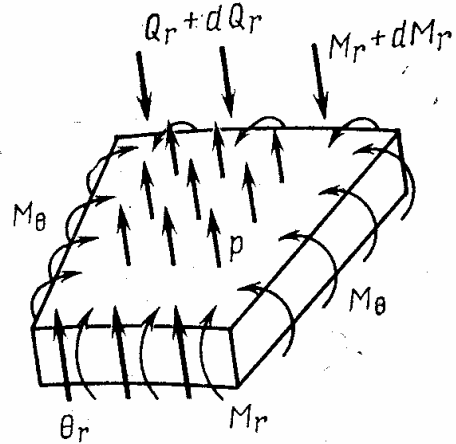


Рис. 2.13

$p = p(r)$ обозначена интенсивность внешней поперечной нагрузки, т. е. отношение суммы всех внешних поверхностных и объемных сил, действующих на элемент, к его площади.

Из равенства нулю проекций всех сил на ось z следует:

$$Q_r r d\theta - (Q_r + dQ_r)(r + dr) d\theta + p r d\theta dr = 0.$$

Сократив это выражение на величину $d\theta dr$, получим

$$(rQ_r)' = pr. \quad (2.41)$$

Приравняв нулю сумму моментов всех сил относительно оси, касательной к дуге окружности радиусом $r + dr$, и отбрасывая величины высших порядков малости, получаем уравнение

$$(rM_r)' - M_\theta = rQ_r. \quad (2.42)$$

Остальные условия равновесия удовлетворяются тождественно в силу симметрии задачи.

При заданных нагрузках и условиях закрепления полученные соотношения (2.34), (2.39), (2.41), (2.42) дают возможность найти напряженно-деформированное состояние и прогибы пластины.

Для пластины постоянной толщины обычно нетрудно получить точное аналитическое решение, преобразовав полученные зависимости следующим образом. Подставив соотношения (2.39) в уравнение рав-

новесия (2.42) и поделив все слагаемые на произведение rD , получим дифференциальное уравнение второго порядка относительно угла ϑ :

$$\vartheta'' + \vartheta'/r - \vartheta/r^2 = Q_r/D. \quad (2.43)$$

С точностью до обозначений это уравнение тождественно уравнению (2.26), и его решение (если поперечную силу считать известной функцией радиуса) можно записать в виде, аналогичном выражению (2.27):

$$\vartheta = C_1 r + \frac{C_2}{r} + \frac{1}{rD} \int \left(r \int Q_r dr \right) dr. \quad (2.44)$$

Здесь C_1 и C_2 — произвольные постоянные, для определения которых должны быть заданы два граничных условия относительно угла ϑ наклона нормали при $r = r_1$ и $r = r_2$.

Например, в задачах, изображенных на рис. 2.14, эти граничные условия будут:

а) при $r = r_1$ $\vartheta = 0$; при $r = r_2$ $M_r = 0$, т. е. $\vartheta' + \mu\vartheta/r_2 = 0$;

б) при $r = r_1$ $M_2 = 0$, т. е. $\vartheta' + \mu\vartheta/r_1 = 0$; при $r = r_2$ $\vartheta = 0$.

Поперечную силу Q_r , входящую в выражение (2.44), в общем случае можно найти из уравнения равновесия (2.41):

$$Q_r = \frac{1}{r} \int r p dr + \frac{C_3}{r}, \quad (2.45)$$

где C_3 — новая произвольная постоянная, для определения которой следует привлечь граничные условия относительно поперечной силы или поперечного прогиба. Например, в задаче, изображенной на рис. 2.14, а, поперечная сила при $r = r_2$, очевидно, равна внешней

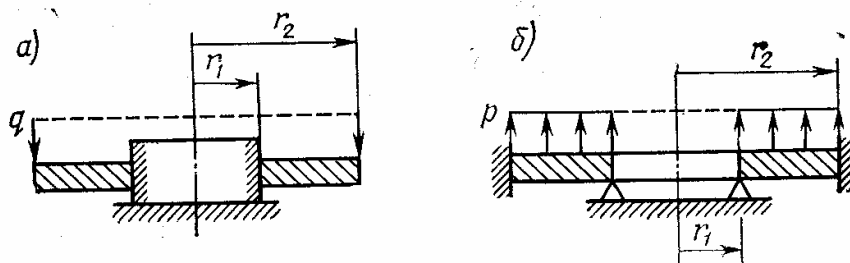


Рис. 2.14

распределенной нагрузке q , т. е. при $r = r_2$ $Q_r = q$. Из этого граничного условия находим произвольную постоянную C_3 . В рассматриваемой задаче $p = 0$, следовательно, $C_3 = r_2 q$, и окончательно получаем $Q_r = q r_2 / r$.

Задача, изображенная на рис. 2.14, б, относительно поперечной силы статически неопределима, и для нахождения C_3 здесь необходимо привлечь следующие граничные условия:

при $r = r_1$ $w = 0$; при $r = r_2$ $w = 0$.

Функцию поперечного прогиба $w(r)$ находим из уравнения (2.34):

$$w = \int \vartheta dr + C_4, \quad (2.46)$$

где C_4 — еще одна произвольная постоянная. Итак, для определения четырех произвольных постоянных мы имеем четыре граничных условия: два составленных выше условия относительно угла ϑ , и два условия относительно поперечного прогиба w .

После того как функция $\vartheta(r)$ найдена, нормальные напряжения можно подсчитать по зависимостям (2.38), причем наибольшие по

толщине значения напряжений, очевидно, имеют место при $z = \pm h/2$. Окончательным формулам для подсчета наибольших напряжений удобно, используя зависимости (2.38) и (2.39), придать такой вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{\max} &= \mp 6 M_r / h^2, \\ \sigma_\theta^{\max} &= \mp 6 M_\theta / h^2. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Рассмотрим пример расчета сплошной круглой пластины, свободно опертой по контуру и нагруженной равномерным давлением (рис. 2.15, а). Относительно поперечной силы Q_r эта задача статически определима; в таких случаях Q_r обычно удобнее находить не из уравнения равновесия (2.45), а просто рассматривая условие равновесия центральной части пластины. Из условия равновесия в проекции на ось z

$$2\pi r Q_r + \pi r^2 p = 0.$$

Отсюда

$$Q_r = -pr/2.$$

Интегрируя выражение (2.44), получаем

$$\vartheta = C_1 r + C_2 / r - pr^3 / (16D).$$

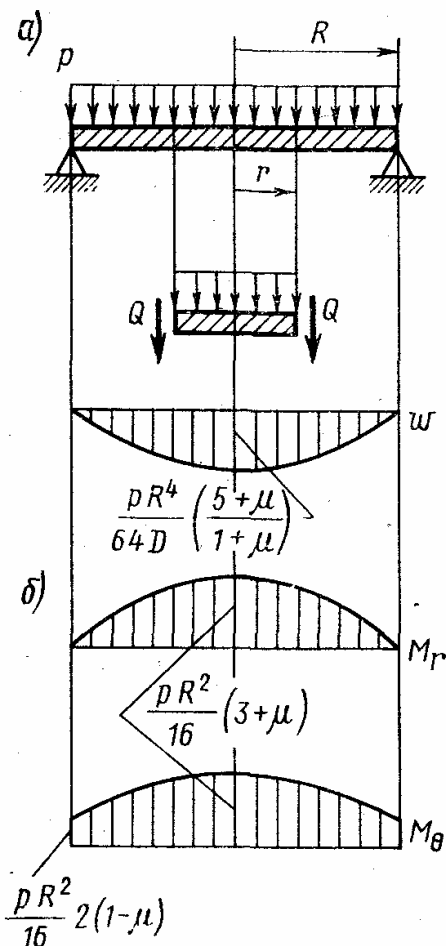


Рис. 2.15

При $r = 0$ из условия симметрии угол ϑ поворота нормали должен быть равен нулю, а на свободно опертом контуре момент $M_r = 0$. Следовательно, граничные условия относительно угла ϑ таковы:

при $r = 0$ $\vartheta = 0$; при $r = R$ $\vartheta' + \mu\vartheta/R = 0$.

Из первого граничного условия следует $C_2 = 0$, а из второго находим C_1 и окончательно получаем

$$\vartheta = \frac{pR^3}{16D} \left(\frac{3+\mu}{1+\mu} \frac{r}{R} - \frac{r^3}{R^3} \right).$$

Из выражения (2.46) находим

$$w = \frac{pR^4}{16D} \left(\frac{1}{2} \frac{3+\mu}{1+\mu} \frac{r^2}{R^2} - \frac{1}{4} \frac{r^4}{R^4} \right) + C_3.$$

где произвольная постоянная C_4 определяется из граничного условия относительно прогиба: при $r = R$ $w = 0$. После очевидных преобразований приходим к зависимости

$$w = -\frac{\rho R^4}{16D} \left(\frac{1}{4} \frac{5+\mu}{1+\mu} - \frac{1}{2} \frac{3+\mu}{1+\mu} \frac{r^2}{R^2} + \frac{1}{4} \frac{r^4}{R^4} \right).$$

По формулам (2.39) определяем изгибающие моменты:

$$M_r = \frac{\rho R^2}{16} (3+\mu) \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right);$$

$$M_\theta = \frac{\rho R^2}{16} (3+\mu) \left(1 - \frac{1+3\mu}{3+\mu} \frac{r^2}{R^2} \right).$$

Эпюры прогиба и изгибающих моментов, построенные по полученным зависимостям, показаны на рис. 2.15, б. Максимальные значения моментов наблюдаются в центре пластины; соответствующие им напряжения находим по формулам (2.47):

$$\sigma_r^{\max} = \sigma_\theta^{\max} = \mp \frac{6(3+\mu)}{16} \frac{R^2}{h^2} \rho,$$

где h — толщина пластины.

Оценим теперь степень точности основных упрощающих допущений, с помощью которых решена задача. Из последних формул следует, что нормальные напряжения σ_r и σ_θ в пластине оказались порядка величины $\rho R^2/h^2$. В то же время нормальное напряжение σ_z изменяется по толщине пластины от $\sigma_z = -\rho$ до $\sigma_z = 0$, т. е. имеет порядок ρ . Поэтому для тонких пластин допущение о пренебрежимой малости напряжения σ_z вполне оправдано, причем чем тоньше пластина, тем точнее выполняется это допущение.

Допущение о неизменности нормали означает, в частности, пренебрежение углами сдвига γ_{rz} по сравнению с углами поворота нормали. В рассмотренной задаче, как нетрудно видеть, величина ϑ имеет порядок $\rho R^3/(h^3 E)$. Касательные напряжения τ_{rz} , интегрирование которых по толщине пластины дает поперечную силу Q_r , имеют, очевидно, порядок Q_r/h . Следовательно, в рассматриваемой задаче τ_{rz} имеют порядок $\rho R/(2h)$ и вызывают углы сдвига γ_{rz} порядка $\rho R/(2hG)$, где G — модуль сдвига. Поскольку для изотропного материала $E = 2(1 + \mu)G$, то в случае тонких пластин из изотропного материала условие $\gamma_{rz} \ll \vartheta$ действительно выполняется, причем тем точнее, чем тоньше пластина. (Гипотеза о неизменности нормали может приводить к заметным погрешностям только для резко анизотропных пластин [3], когда $E_r \gg G_{rz}$, где E_r и G_{rz} — соответственно модуль упругости в направлении r и модуль сдвига в плоскости rz .)

Эти оценки, сделанные на примере решения конкретной осесимметричной задачи, имеют общий характер: основные упрощающие допущения технической теории пластин выполняются тем точнее, чем тоньше пластина.

§ 2.5. Дифференциальное уравнение изгиба пластин в прямоугольной системе координат

Представим пластину в прямоугольной системе координат, совместив ее срединную плоскость с координатной плоскостью xy (рис. 2.16, а). Будем считать, что толщина h пластины существенно меньше размеров пластины в плоскости xy . Задачу изгиба такой пластины поперечными силами рассмотрим в линейной постановке, как была рассмотрена более простая осесимметричная задача (см. § 2.4). Причем для вывода соотношений, описывающих изгиб пластины, снова воспользуемся основными допущениями теории пластин и оболочек.

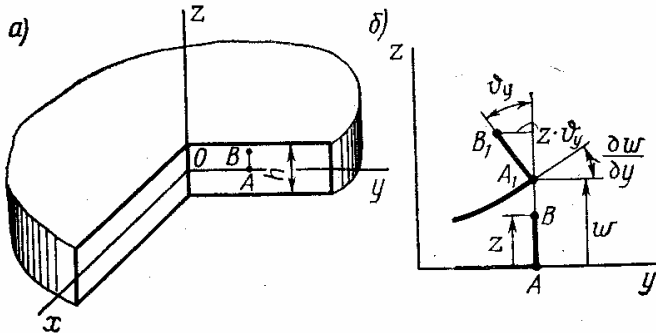


Рис. 2.16

Геометрические соотношения, описывающие деформацию пластины, получим, проследив за перемещением материального элемента AB , до деформации перпендикулярного срединной плоскости пластины. В соответствии с первым допущением после деформации этот элемент останется прямолинейным и наклонится относительно оси z на углы ϑ_x и ϑ_y соответственно в плоскостях xz и yz . (На рис. 2.16, б показана проекция перемещения элемента AB на плоскость yz .) При этом точка B , находящаяся на расстоянии z от срединной плоскости, получит перемещения u и v в направлениях осей x и y :

$$u = -z \vartheta_x; \quad v = -z \vartheta_y. \quad (2.48)$$

Зная эти перемещения, по общим формулам (1.17) находим деформации ϵ_x , ϵ_y и γ_{xy} в слое пластины, отстоящем на расстоянии z от ее срединной плоскости:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x}; \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z \left(\frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Согласно допущению о неизменности нормали элемент AB останется перпендикулярным искривленной срединной плоскости и углы его наклона ϑ_x и ϑ_y будут равны углам наклона касательных к искривленным координатным линиям на деформированной срединной плоскости:

$$\vartheta_x = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \vartheta_y = \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (2.50)$$

Эти зависимости позволяют выразить деформации ε_x , ε_y и γ_{xy} через поперечные перемещения w срединной плоскости пластины:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= -z \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ \varepsilon_y &= -z \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \gamma_{xy} &= -z \left(\frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} \right) = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\quad (2.51)$$

Отметим, что гипотеза неизменности нормалей эквивалентна допущению о том, что углы сдвига $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$; из формул (1.17) действительно имеем:

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\vartheta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \equiv 0; \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\vartheta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \equiv 0.\end{aligned}$$

Связь между поперечными перемещениями w срединной плоскости пластины и ее внутренними силовыми факторами устанавливают с помощью допущения о ненадавливании слоев: считая материал пластины упругим и изотропным, по общим зависимостям для плоского напряженного состояния имеем:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} = -(1-\mu) \frac{Ez}{1-\mu^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\quad (2.52)$$

Нормальные напряжения σ_x и σ_y , линейно изменяющиеся по толщине пластины, статически эквивалентны изгибающим моментам интенсивностью M_x и M_y , а касательные напряжения τ_{xy} и τ_{yx} , тоже линейно изменяющиеся по толщине, статически эквивалентны крутящим моментам интенсивностью M_{xy} и M_{yx} . (Как и в задаче осесимметричного изгиба круглой пластины, интенсивности моментов будем далее просто называть моментами). Величины M_x , M_y , M_{xy} и M_{yx} подсчитывают аналогично тому, как в § 2.4 были подсчитаны M_r и M_θ . Используя зависимости (2.52), получаем

$$\begin{aligned}M_x &= - \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z dz = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ M_y &= - \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y z dz = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ M_{xy} = M_{yx} &= - \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} z dz = (1-\mu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},\end{aligned}\quad (2.53)$$

где D — жесткость пластины на изгиб, определяемая формулой (2.40). Знаки моментов выбраны так, чтобы положительное направление моментов соответствовало положительным значениям вторых производных, входящих в формулы (2.53).

В сечениях пластины плоскостями, параллельными координатным плоскостям xz и yz , вообще говоря, возникают касательные напряжения τ_{yz} и τ_{xz} , интегрируя которые по толщине пластины получают значения поперечных сил интенсивностью Q_y и Q_x . Но необходимо подчеркнуть, что эти касательные напряжения нельзя непосредственно связать с деформациями пластины, ибо в силу первого основного допущения углы сдвига $\gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$.

Дальнейшее решение задачи можно проводить так же, как в предыдущем параграфе: рассмотрев условие равновесия элемента нагруженной пластины и используя соотношения (2.53), получить дифференциальное уравнение относительно поперечного прогиба w . Но можно воспользоваться иным, вариационным путем решения задачи, основанным на принципе минимума полной потенциальной энергии.

Подсчитаем сначала потенциальную энергию деформации изогнутой пластины. В силу второго основного допущения о ненадавливании слоев мы вправе подсчитывать удельную энергию деформации по формуле, справедливой для упругого изотропного тела при плоском напряженном состоянии. Подставив в эту формулу величины ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} , определяемые зависимостями (2.51), получим

$$U_0 = \frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{1-\mu}{2} \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] = \frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\mu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\}.$$

Интегрируя это выражение по всему объему пластины, получаем потенциальную энергию деформации пластины

$$U = \iiint U_0 \, dx \, dy \, dz.$$

Проинтегрировав по толщине пластины, окончательно имеем

$$U = \iint \frac{D}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\mu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dx \, dy, \quad (2.54)$$

где $D = Eh^3 / [12(1-\mu^2)]$ — жесткость пластины на изгиб, причем в общем случае величина D может быть переменной, т. е. $D = D(x, y)$.

Отметим, что касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} никак не влияют на значение потенциальной энергии деформации пластины, поскольку углы сдвига γ_{xz} и γ_{yz} , на которых совершают работу эти напряжения,

равны нулю в силу первого допущения о неизменности нормали. Потенциал внешних поперечных сил, действующих на пластину,

$$\Pi = - \iint p w \, dx \, dy, \quad (2.55)$$

где $p = p(x, y)$ — интенсивность внешней поперечной нагрузки, т. е. сумма всех поверхностных и объемных поперечных сил, действующих на элемент пластины, отнесенная к его площади.

Полная потенциальная энергия изогнутой пластины

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = U + \Pi = \iint \left[\frac{D}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\mu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} - p w \right] dx \, dy. \end{aligned} \quad (2.56)$$

В положении равновесия должно выполняться условие стационарности полной потенциальной энергии $\delta \mathcal{E} = 0$. Воспользуемся сейчас этим условием, чтобы получить дифференциальное уравнение изгиба пластин. Уравнение Эйлера для функционала полной потенциальной энергии пластины имеет вид (см. Приложение I):

$$\frac{\partial F}{\partial w} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)} = 0,$$

где F — подынтегральное выражение в зависимости (2.56). Отсюда следует дифференциальное уравнение изгиба тонкой пластины:

$$\begin{aligned} -p + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - (1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} + \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - (1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \right\} + \\ + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[(1-\mu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.57)$$

В частности, для пластины постоянной толщины это уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (2.58)$$

или

$$\nabla^2 \nabla^2 w = p/D,$$

где $\nabla^2(*)$ — оператор Лапласа (2.9).

Из условия $\delta \mathcal{E} = 0$, выполнив действия, аналогичные тем, какие были сделаны в примерах на растяжение и изгиб стержня в § 1.5, можно найти те граничные условия, которые могут быть заданы на контуре пластины [4,7].

Наиболее просто граничные условия формулируются в тех случаях, когда край пластины совпадает с одной из координатных осей. Например, если такой край при $y = \text{const}$ заделан (рис. 2.17, а), то граничные условия на нем имеют вид:

$$1) \omega = 0; \quad 2) \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0.$$

Если край пластины при $y = \text{const}$ шарнирно оперт (рис. 2.17, б), то на нем

$$1) \omega = 0; \quad 2) M_y = D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) = 0, \text{ т. е. } \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0.$$

Решить уравнение в частных производных, к которому мы свели задачу изгиба пластины, как и бигармоническое уравнение плоской

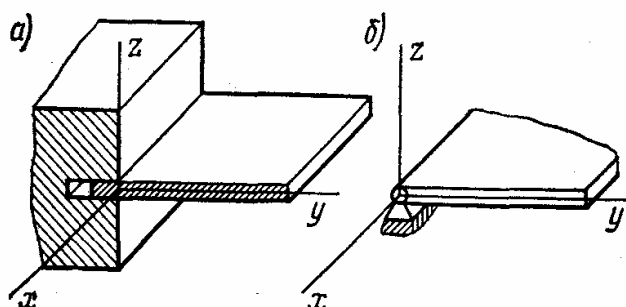


Рис. 2.17

задачи, исключительно трудно. Точное решение задачи изгиба пластины удается получить лишь в некоторых частных случаях, а в подавляющем большинстве практически важных задач решение находят с помощью приближенных методов.

Примеры точных и приближенных решений уравнения поперечного изгиба пла-

стин можно найти, например, в книгах [4,7]. Однако в силовых конструкциях ракет гладкие тонкие пластины, нагруженные поперечными силами, встречаются чрезвычайно редко: поэтому описывать решения уравнения (2.58) мы не будем. Но это уравнение нам понадобится для решения задачи устойчивости пластин, нагруженных в своей плоскости, задачи, имеющей первостепенное значение в прочностных расчетах конструкций ракет.

Глава 3

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Методы решения задач строительной механики благодаря широкому внедрению ЭВМ получили в последнее время существенное развитие. Тесное сотрудничество инженеров, математиков и специалистов по вычислительной технике создало возможности для совершенствования применяемых ранее и появления новых методов решения задач. Особенно широкое распространение получили метод конечных элементов (МКЭ) и метод конечных разностей (МКР). Их отличает универсальность, применимость к уравнениям и областям самого разного вида и наряду с этим большие возможности алгоритмизации и использования уже отработанных блоков программ. Они позволяют рассчитывать самые сложные и разнообразные конструкции.

В настоящей главе излагаются основные прямые вариационные методы расчета деформированного состояния наиболее простых систем. Они являются предшественниками различных вариантов МКЭ и методически имеют непосредственную связь с ними. Рассмотрена также последовательность прямого численного интегрирования уравнений применительно к одномерным краевым задачам (матричный метод начальных параметров). МКР и МКЭ представлены сначала в наиболее простых вариантах, а затем распространены на решения сложных двумерных задач.

§ 3.1. Вариационные методы

Вариационные методы долгое время были, пожалуй, самыми распространенными при решении многих сложных задач строительной механики. В последние годы их применяют на базе вычислительной техники. Появились новые модификации методов. Однако общие идеи, содержащиеся в новых методах, остаются прежними и классические методы Рэлея—Ритца и Бубнова—Галеркина еще долго будут составлять основу применяемых при расчетах методик.

Метод Рэлея—Ритца является одним из наиболее мощных прямых методов вариационного исчисления. В задачах упругого расчета с его помощью можно с той или иной точностью определить поле перемещений, используя уравнения потенциальной энергии деформируемого тела. Перемещения аппроксимируются на всей области интегрирования некоторыми системами функций. Для двумерной области с тремя компонентами перемещений u, v, w это — три системы: $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \dots, \varphi_m(x, y); \xi_1(x, y), \dots, \xi_2(x, y), \dots, \xi_m(x, y); \eta_1(x, y), \eta_2(x, y), \dots, \eta_m(x, y)$. Перемещения принимают такими:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=1}^m A_n \varphi_n(x, y); \quad v = \sum_{n=1}^m B_n \xi_n(x, y); \\ w &= \sum_{n=1}^m C_n \eta_n(x, y), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где A_n, B_n, C_n — произвольные постоянные. Функции $\varphi_n(x, y)$ линейно независимы по отношению к функциям $\varphi_{n-1}(x, y), \varphi_{n+1}(x, y)$ и т. д. То же можно сказать о функциях $\xi_n(x, y)$ и $\eta_n(x, y)$. Каждая из них является составляющей полной системы функций. Кроме того, они должны быть непрерывны на рассматриваемой области и удовлетворять по крайней мере геометрическим граничным условиям задачи.

После подстановки выражений (3.1) в уравнение потенциальной энергии и проведения операций дифференцирования и интегрирования функционал зависит только от коэффициентов A_n, B_n, C_n . В положении равновесия потенциальная энергия \mathcal{E} должна иметь стационарное значение и задача о стационарности функционала сводится к задаче об экстремуме функции переменных A_n, B_n, C_n . Отсюда следуют условия

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial A_n} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial B_n} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial C_n} = 0, \quad (3.2)$$

которые и позволяют найти все коэффициенты в системе (3.1) из $3m$ уравнений.

Требование полноты системы функций связано с приближением решения к точному. Практически задачи решаются при ограниченном числе аппроксимирующих функций и во многих случаях достаточно взять две-три из них для того, чтобы получить вполне удовлетворительный результат.

В качестве примера применения метода Рэлея—Ритца рассмотрим задачу об изгибе шарнирно опертой балки, имеющей постоянную жесткость EJ , длину l и нагруженную равномерно распределенной нагрузкой q . Полная потенциальная энергия балки определяется соотношением (1.66):

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^l q w dx. \quad (3.3)$$

Первое слагаемое здесь соответствует энергии деформации, второе — потенциалу внешних сил.

Из условия равновесия следует, что $\delta \mathcal{E} = 0$. Интегрируя вариацию энергии по частям, получаем

$$\delta \mathcal{E} = \int_0^l \left(EJ \frac{d^4 w}{dx^4} - q \right) \delta w dx + \left[EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \delta \left(\frac{dw}{dx} \right) - EJ \frac{d^3 w}{dx^3} \delta w \right] \Big|_{x=0}^{x=l} = 0. \quad (3.4)$$

Отсюда при произвольном δw получается уравнение равновесия

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} - q = 0 \quad (3.5)$$

и граничные условия на концах балки, соответствующие второму слагаемому уравнения (3.4).

Таким образом, для решения задачи нужно найти общий интеграл уравнения (3.5) и выбрать такие частные решения, которые удовлетворяют граничным условиям. Однако мы поступим иначе — получим решение методом Рэлея—Ритца. Для этого воспользуемся соотношением (3.3) и зададим функцию w в виде ряда

$$w = \sum_{n=1}^m C_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (3.6)$$

При любом n функция $\sin n\pi x/l$ равна нулю при $x = 0$ и $x = l$. Подставляя выражение (3.6) в уравнение (3.3) и интегрируя, получаем

$$\mathcal{E} = \frac{EJ}{l^3} \frac{\pi^4}{4} \sum_{n=1}^m n^4 C_n^2 - ql \frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,5\dots}^m \frac{1}{n} C_n.$$

Учитывая условие (3.2) найдем коэффициенты C_n для нечетных n (если n четное, $C_n = 0$): $C_n = \frac{4}{\pi^5} \frac{1}{n^5} \frac{ql^4}{EI}$. Окончательное уравнение упругой линии балки, определенное с помощью метода Рэлея—Ритца, имеет вид

$$\omega = \frac{4ql^4}{\pi^5 EJ} \sum_{n=1,3,5\dots}^m \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (3.7)$$

Интегрируя уравнение (3.5), при тех же граничных условиях получаем такое выражение для прогиба:

$$\omega = \frac{ql^4}{24 EJ} \left(\frac{x^4}{l^4} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x}{l} \right). \quad (3.7')$$

Приближенное решение (3.7) хорошо аппроксимирует перемещение w на всем диапазоне $0 \leq x \leq l$. Например, прогиб при $x = l/4$, подсчитанный по первому члену ряда (3.7), имеет значение $w = 0,0092758 ql^4 / (EJ)$, что всего на 0,015 % отличается от значения, полученного по формуле (3.7'): $\bar{w} = 0,0092773 ql^4 / (EJ)$.

Методом Рэлея—Ритца можно найти не только перемещения, но и внутренние силы и соответствующие им напряжения. Для этого необходимо использовать связь между усилиями и перемещениями. В рассматриваемом примере изгибающий момент в сечении балки

$$M = -EJ \frac{d^2\omega}{dx^2} = -\frac{4ql^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5\dots}^m \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (3.8)$$

Очевидно, что точность решения при определении напряжений меньше, чем при нахождении перемещений в связи с тем, что при дифференцировании приближенных функций их производные оказываются еще более приближенными. При $x = l/4$, если $n = 1$, метод Рэлея—Ритца дает $M = -2\sqrt{2} \pi^3 ql^2$, что на 2,8 % отличается от $M = -(3/32) ql^2$, соответствующего решению по формуле (3.7'). Однако и здесь, если использовать большее число членов ряда (3.8), можно близко подойти к точному решению.

Широко используется метод Рэлея—Ритца при решении задач устойчивости деформируемых тел. Особенность его применения состоит в том, что здесь необходимо использовать выражение для изменения полной потенциальной энергии относительно некоторого исходного состояния. Задача при этом сводится к линейной системе алгебраических однородных уравнений.

Рассмотрим пример определения критического состояния неоднородного шарнирно опертого стержня, нагруженного осевой сжимающей силой на торце. Момент инерции стержня меняется вдоль оси:

$J = J_0 [1 + \sin(\pi x/l)]$. Изменение потенциальной энергии стержня при действии силы $N_0 = -P$ по формуле (1.72) равно

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l N_0 \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx. \quad (3.9)$$

Рассмотрим формы потери устойчивости, симметричные относительно середины стержня. Ограничимся только двумя членами ряда:

$$w = C_1 \sin(\pi x/l) + C_3 \sin(3\pi x/l). \quad (3.10)$$

Каждая из функций здесь удовлетворяет граничным условиям задачи. Подставив выражение для w в формулу (3.9) и проведя интегрирование, получим

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} = & \frac{1}{2} EJ_0 \left(\frac{\pi^4}{l^4} + \frac{8}{3} \frac{\pi^3}{l^4} \right) \frac{l}{2} C_1^2 - \frac{1}{2} EJ_0 \frac{\pi^3}{l^4} \frac{48}{5} \frac{l}{2} C_1 C_3 + \\ & + \frac{1}{2} EJ_0 \left(\frac{5832}{35} + 81\pi \right) \frac{\pi^3}{l^4} \frac{l}{2} C_3^2 - \frac{1}{2} P \frac{\pi^2}{l^2} \frac{l}{2} (C_1^2 + 9C_3^2). \end{aligned}$$

Равновесное состояние, соответствующее изгибу стержня, определяется из условия

$$\frac{\partial \Delta \mathcal{E}}{\partial C_1} = 0; \quad \frac{\partial \Delta \mathcal{E}}{\partial C_3} = 0,$$

что приводит к системе однородных уравнений

$$\begin{aligned} 2 \left[\left(\frac{8}{3} + \pi \right) \pi - \frac{Pl^2}{EJ_0} \right] C_1 - \frac{48}{5} \pi C_3 &= 0; \\ -\frac{48}{5} \pi C_1 + 2 \left[\left(\frac{5832}{35} + 81\pi \right) \pi - 9 \frac{Pl^2}{EJ_0} \right] C_3 &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Отличное от нуля решение этих уравнений находится с помощью определителя, составленного из сомножителей при C_1 и C_3 . Приравняв определитель нулю, получим характеристическое уравнение

$$\left(\frac{Pl^2}{EJ_0} \right)^2 - 165 \left(\frac{Pl^2}{EJ_0} \right) + 2650 = 0,$$

позволяющее найти два значения силы P :

$$P_1 = 18,05 EJ_0/l^2; \quad P_2 = 147 EJ_0/l^2.$$

Минимальное значение силы, при превышении которой стержень теряет устойчивость, называется критическим; $P_{кр1} = P_1$. Форма потери устойчивости, определяемая уравнением (3.10), при $P = P_1$ имеет вид

$$w = C_1 \left(\sin \frac{\pi x}{l} + 0,0126 \sin \frac{3\pi x}{l} \right). \quad (3.12)$$

Коэффициент при втором слагаемом здесь найден с помощью одного из соотношений (3.11).

Зависимость (3.12) показывает, что второе слагаемое дает незначительную поправку и усилию $P = P_{кр}$ практически соответствует форма потери устойчивости с одной полуволной синусоиды вдоль оси. Если вообще не учитывать второго слагаемого в уравнении (3.10), то критическое усилие может быть определено из первого уравнения системы (3.11) при $C_3 = 0$:

$$P_{кpo} = 18,23 EJ_0/l^2.$$

Обратим внимание на то, что $P_{кpo} > P_{кp1}$, и увеличение числа членов ряда ведет к некоторому, часто незначительному уменьшению критической нагрузки. Ее значение приближается к определенному предельному значению $P_{кр}$ сверху. Это характерно для метода Рэлея—Ритца. Определенные с помощью этого метода критические силы несколько больше истинных.

Метод Бубнова — Галеркина, вообще говоря, не требует применения энергетических соотношений. Его можно рассматривать как один из приближенных методов решения дифференциальных уравнений, которыми описываются краевые задачи математической физики. Пусть нужно найти решение уравнения

$$L(\omega) = 0, \quad (3.13)$$

где L — дифференциальный оператор; ω — функция, зависящая от двух переменных x, y . Граничные условия задачи однородные. Представим решение в виде

$$\omega = \sum_{n=1}^m C_n \eta_n(x, y). \quad (3.14)$$

Каждая из функций $\eta_n(x, y)$ удовлетворяет всем граничным условиям задачи, а C_n — произвольные коэффициенты. Подставим выражение (3.14) в уравнение (3.13), и так как это выражение в общем случае не является решением уравнения (3.13), то левая часть его не равна нулю, а соответствует функции R , которую называют функция-ошибка:

$$L \left[\sum_{n=1}^m C_n \eta_n(x, y) \right] = R(C_n, x, y). \quad (3.15)$$

Потребуем выполнения условия ортогональности функции-ошибки к каждой функции η_n . Это условие сводится к m следующих уравнений:

$$\iint R(C_n, x, y) \eta_i(x, y) dx dy = 0. \quad (3.16)$$

Они и позволяют найти все значения C_n . Индекс i у функции η показывает, что n может быть не равно i ($i = 1, 2, 3, \dots, m$).

Требование выполнения условия (3.16) может следовать и из общих вариационных соотношений. Поясним это на примере задачи об изгибе балки. Уравнение (3.4) соответствует минимуму полной потенциальной энергии системы. Если решение $\omega = \sum_{n=1}^m C_n \eta_n(x)$ выбрано так, что оно удовлетворяет не только геометрическим, но и силовым гранич-

ным условиям, то второе слагаемое в формуле (3.4) равно нулю, и остается соотношение

$$\delta \mathcal{E} = \int_0^l \left(EJ \frac{d^4 w}{dx^4} - q \right) \delta w \, dx = 0.$$

Если в это вариационное уравнение вместо вариации перемещений подставить выражение $\delta w = \sum_{n=1}^m \delta C_n \eta_n(x)$ и учесть, что вариации коэффициентов произвольны, то придем к формуле

$$\int_0^l \left(EJ C_n \frac{d^4 \eta_n(x)}{dx^4} - q \right) \eta_n(x) \, dx = 0,$$

которая и является выражением метода Бубнова—Галеркина для балки, а в более общем виде определяется уравнениями (3.16). Таким образом, все коэффициенты C_n в функции (3.14) находят из уравнений (3.16). Число уравнений m соответствует числу искомых коэффициентов.

Один из наиболее сложных вопросов при применении метода Бубнова—Галеркина — выбор системы функций η_n , удовлетворяющей как геометрическим, так и силовым граничным условиям. Представим вариант метода, позволяющий облегчить этот выбор. Положим, что дифференциальное уравнение (3.13) имеет одну переменную и разрешено относительно старшей производной

$$L(w) = w^k(x) + A(w) + B(x). \quad (3.17)$$

Представим в виде ряда не саму функцию, а ее старшую производную

$$w^k(x) = \sum_{n=1}^m C_n \eta_n(x). \quad (3.18)$$

Интегрируя это соотношение, получим перемещение w , выраженное через k новых констант. Они могут быть определены и связаны с параметрами C_n через граничные условия. Таким образом получается новая система функций $w(x)$, удовлетворяющая требованиям метода Бубнова—Галеркина и имеющая m неизвестных параметров. Дальнейшие операции проводятся в обычной для метода последовательности.

§ 3.2. Матричный метод начальных параметров

Метод начальных параметров широко используется при построении решений одномерных линейных и нелинейных задач строительной механики. Он известен также как *метод стрельбы*, *баллистический*, *метод комбинации решений* и основан на сведении краевой задачи к ряду задач для той же системы уравнений, но с начальными, а не граничными условиями.

Решение для двухточечной задачи (когда граничные условия заданы в начале и конце интервала интегрирования) находят следующим

образом. На левом конце из граничных условий известна только часть значений искомых функций. Для того чтобы начать интегрирование, необходимо задать некоторые начальные параметры, число которых равно количеству граничных условий на правом конце. Интегрирование ведется несколько раз, пока не будут удовлетворены граничные условия в конце интервала интегрирования. Процедура поиска решения в этом случае может быть довольно трудоемкой, особенно при высоком порядке дифференциальных уравнений. Существуют методы, позволяющие упростить процесс нахождения решения.

Рассмотрим последовательность решения методом начальных параметров. Одномерные задачи расчета конструкций могут быть сведены к системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d}{dx} \{y\} + [A] \{y\} = \{F\}. \quad (3.19)$$

Вектор $\{y\} = \{y_1 y_2 \dots y_n\}^T$, называемый вектором состояния, и вектор нагрузки $\{F\}$ имеют размер n , $[A]$ — квадратная матрица $n \times n$. Условия на границах интервала интегрирования имеют вид

$$[B]_0 \{y\}_0 = \{D\}_0; [B]_1 \{y\}_1 = \{D\}_1, \quad (3.20)$$

где векторы $\{D\}_0$ и $\{D\}_1$ имеют размер $n/2$, а матрицы $[B]_0$ и $[B]_1$ прямоугольные размером $n/2 \times n$.

Общее решение матричного уравнения (3.19) складывается из частного решения неоднородного уравнения $\{z\}$ и решения уравнения без правой части:

$$\{y\} = \{z\} + [Y] \{C\}, \quad (3.21)$$

где $\{C\}$ — вектор констант, число которых соответствует порядку системы. Матрица $[Y]$ общих решений однородного уравнения — квадратная размером $n \times n$. Решение (3.21) может быть также записано в виде

$$\{y\} = C_1 \{y_1\} + C_2 \{y_2\} + \dots + \{z\}.$$

Векторы $\{y_1\}$; $\{y_2\}$ и др. — частные решения однородного уравнения (3.19). Подставляя выражение (3.21) в формулы (3.20), получаем

$$\begin{aligned} [B]_0 \{z\}_0 + [B]_0 [Y]_0 \{C\} &= \{D\}_0; \\ [B]_1 \{z\}_1 + [B]_1 [Y]_1 \{C\} &= \{D\}_1, \end{aligned} \quad (3.22)$$

откуда определяют вектор констант:

$$\{C\} = \begin{bmatrix} [B]_0 [Y]_0 \\ [B]_1 [Y]_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \{D\}_0 - [B]_0 \{z\}_0 \\ \{D\}_1 - [B]_1 \{z\}_1 \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Таким образом, для нахождения констант в решении (3.21) необходимо иметь значения матрицы общего решения однородного уравнения и векторов частного решения в начале и конце интервала интегрирования.

Вектор $\{z\}$ определяется любым частным решением, например найденным путем интегрирования системы (3.19) при начальном значении

$$\{z\}_0 = \{000 \dots 0\}^T. \quad (3.24)$$

Матрица однородных решений может быть подсчитана с помощью численного интегрирования системы (3.19) при $\{F\} = 0$ для начальных значений

$$[Y]_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Вектор $\{z\}_0$ и каждый вектор-столбец, составляющий матрицу $[Y]_0$, играют роль начальных параметров, позволяющих получить n линейно независимых частных решений. Значения матрицы $[Y]_1$ и вектора $\{z\}_1$ соответствуют концу интервала интегрирования.

При решении краевой задачи, описываемой системой уравнений четного порядка n , $n/2$ граничных условий должны быть удовлетворены на одной из границ, а оставшиеся $n/2$ — на другой. Если перед интегрированием системы уравнений выбрать начальные параметры определенным образом, то решение можно упростить. Представим решение в той же форме (3.21), но вектор констант $\{C\}$ пусть имеет размер $n/2$. Построим решение (3.21) так, чтобы оно удовлетворяло начальным условиям при любых значениях вектора констант. Тогда вектор $\{C\}$ может быть определен из половины полученных уравнений, тех, которые удовлетворяют граничным условиям в конце интервала интегрирования:

$$\{C\} = [[B]_1 [Y]_1]^{-1} (\{D\}_1 - [B]_1 \{z\}_1). \quad (3.26)$$

Рассмотрим пример описанного метода применительно к расчету балки. Дифференциальное уравнение поперечного изгиба балки имеет вид

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - q = 0,$$

где w — перемещение; q — распределенная нагрузка; изгибная жесткость EJ балки может быть переменна вдоль оси x . Запишем уравнение поперечного изгиба балки в виде

$$\begin{aligned} d\omega/dx - \vartheta &= 0, \\ d\vartheta/dx + M/(EJ) &= 0, \\ dM/dx - Q &= 0, \\ dQ/dx &= -q. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Здесь ω , ϑ , M , Q — соответственно перемещение, угол поворота сечения, изгибающий момент и перерезывающая сила в балке. Найдем решение этой системы уравнений при граничных условиях: при $x = 0$ $\omega = 0$ и $\vartheta = 0$; при $x = l$ $\omega = 0$ и $M = 0$.

На левом конце из всех искомым функций известны две: ω_0 и ϑ_0 . Начать интегрирование уравнений (3.27) можно, задавшись значениями начальных параметров M_0, Q_0 . Чтобы найти выражения для ω, ϑ, M, Q при любых x , воспользуемся одним из методов численного интегрирования. Например, в соответствии с *методом Эйлера* уравнения (3.27) представим в виде

$$\begin{aligned} \omega_{i+1} &= \omega_i + \vartheta_i \Delta; & M_{i+1} &= M_i + Q_i \Delta; \\ \vartheta_{i+1} &= \vartheta_i - \frac{M_i}{EJ} \Delta; & Q_{i+1} &= Q_i - q_i \Delta, \end{aligned} \quad (3.28)$$

где $\Delta = l/n$ — шаг интегрирования; n — число участков, на которые делится интервал $0 - l$; i — номер промежуточной точки. Из формул (3.28), имея значения перемещений и усилий для ($i = 0$), можно найти их в точке ($i = 1$). Затем последовательно для $i = 2, 3, \dots$ определяют значения ω, ϑ, M, Q во всех точках вплоть до $i = n$ ($x = l$). Так как начальные значения M_0 и Q_0 произвольны, полученные значения искомым функций в конце интервала интегрирования не удовлетворяют граничным условиям при $x = l$. Расчет нужно повторить и вести его, подбирая M_0 и Q_0 до тех пор, пока условия при $x = l$ не будут удовлетворены. Этот подчас сложный поиск может быть упрощен.

Рассмотрим подробнее решение данной задачи, используя матричную процедуру, описанную выше. Введем вектор состояния

$$\{y\} = \{\omega \vartheta M Q\}^T \quad (3.29)$$

и вектор нагрузки

$$\{F\} = \{0 \ 0 \ 0 \ -q\}^T. \quad (3.30)$$

Система (3.27) в матричной форме примет вид уравнения (3.19)

$$\frac{d}{dx} \{y\} + [A] \{y\} = \{F\},$$

где

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/EJ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицы граничных условий (3.20)

$$[B]_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [B]_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

Все составляющие векторов $\{D\}_0$ и $\{D\}_1$ — нулевые. Общее решение матричного уравнения (3.19) в нашем случае можно представить так:

$$\{y\} = C_1 \{y_1\} + C_2 \{y_2\} + \{z\}. \quad (3.32)$$

Значения векторов $\{y_1\}$, $\{y_2\}$, $\{z\}$ при $x = 0$ выбирают так, чтобы граничные условия удовлетворялись при произвольных C_1 и C_2 :

$$\{y_1\}_0 = \{0010\}^T, \{y_2\}_0 = \{0001\}^T, \{z\}_0 = \{0000\}^T. \quad (3.33)$$

При начальных значениях $\{y_1\}_0$ и $\{y_2\}_0$ нужно проинтегрировать однородную часть уравнения (3.19), а при $\{z\}_0$ — уравнение (3.19) с правой частью. В результате получим значения векторов при $x = l$:

$$\begin{aligned} \{y_1\}_1 &= \{\omega_1 \vartheta_1 M_1 Q_1\}_1^T, \{y_2\}_1 = \{\omega_2 \vartheta_2 M_2 Q_2\}_1^T, \\ \{z\}_1 &= \{\omega_0 \vartheta_0 M_0 Q_0\}_1^T. \end{aligned}$$

В соответствии с выражением (3.32) вектор состояния при $x = l$

$$\{y\}_1 = C_1 \{y_1\}_1 + C_2 \{y_2\}_1 + \{z\}_1 \quad (3.34)$$

и каждая составляющая векторов $\{y_1\}_1$, $\{y_2\}_1$, $\{z\}_1$ теперь известна. Первые два вектора образуют матрицу $[Y]_1$, которая вместе с матрицей $[B]_1$ из выражений (3.31) позволяет найти вектор констант $\{C\}$:

$$\{C\} = -[[B]_1 [Y]_1]^{-1} [B]_1 \{z\}_1. \quad (3.35)$$

В случае неоднородных граничных условий для нахождения вектора $\{C\}$ нужно воспользоваться соотношением (3.26). Известные теперь C_1 и C_2 соответствуют изгибающему моменту и перерезывающей силе в начале интервала интегрирования. Зная их и вектор $\{y\}_0$, систему (3.27) в матричной форме (3.19) можно проинтегрировать еще раз, тем самым определив все составляющие вектора состояния $\{y\}$ от $x = 0$ до $x = l$.

При интегрировании систем уравнений вида (3.19) применяют различные численные процедуры. Кроме метода Эйлера широко используются методы повышенной точности, такие, как метод *Рунге—Кутты*, *Кутты—Мерсона* и др. Отметим, что большинство вычислительных машин снабжены стандартными программами, реализующими эти методы.

Рассмотренная последовательность решения задач используется для расчета различных стержневых систем, пластин, оболочек, состояние которых может быть описано обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Метод начальных параметров обладает определенными преимуществами перед другими численными методами, но имеет и существенный недостаток. При большой длине интервала интегрирования и больших коэффициентах в матрице $[A]$ не всегда удается получить достаточно точное решение задачи. Оказывается, что значения векторов $\{z\}_1$, $\{y_1\}_1$, $\{y_2\}_1$ и других в конце интервала интегрирования мало чувствительны к изменению начальных параметров. Приходится иметь дело с так называемой «плохо обусловленной» задачей, когда обратная матрица, существенно влияющая на составляющие вектора констант (3.26), оказывается очень неточной. Это, в свою очередь, ведет к неточному определению вектора состояния. Существует возможность уточнить решение. Для этого весь интервал интегрирования делится на несколько участков. Интегрирование проводится отдельно для каждого участка и затем участки стыкуют друг с другом.

Найдем решение рассмотренной выше задачи, описанной обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями, число которых n , и граничными условиями, число которых $n/2$, на каждом конце интервала. Разделим всю длину вначале на два участка и обозначим граничные точки 0 и 2, а промежуточную — 1.

Решение для первого участка 0 — 1 имеет вид

$$\{y\} = C_{11} \{y_{11}\} + C_{12} \{y_{12}\} + \dots + \{z_1\}, \quad (3.36)$$

для второго участка 1 — 2

$$\{y\} = C_{21} \{y_{21}\} + C_{22} \{y_{22}\} + \dots + \{z_2\}. \quad (3.37)$$

Число частных решений однородной системы (3.19) для первого участка равно $n/2$, для второго — n . Суммарному числу $(n + n/2)$ соответствует количество неизвестных констант, которые нужно определить. Их находят из условия стыковки векторов $\{y\}$ первого и второго участков в точке 1 и из граничных условий в точке 2:

$$C_{11} \{y_{11}\}_1 + C_{12} \{y_{12}\}_1 + \dots + \{z_1\}_1 = C_{21} \{y_{21}\}_1 + C_{22} \{y_{22}\}_1 + \dots + \{z_2\}_1; \quad (3.38)$$

$$\{y\}_2 = C_{21} \{y_{21}\}_2 + C_{22} \{y_{22}\}_2 + \dots + \{z_2\}_2. \quad (3.39)$$

Векторы $\{y_{11}\}_0$, $\{y_{12}\}_0$ и т. д. выбирают так, чтобы граничные условия в точке 0 удовлетворялись тождественно; составляющие $\{z_1\}_0$ принимаются равными нулю.

Интегрирование на участке 0 — 1 позволяет найти значения этих векторов в точке 1. Векторы правой части соотношения (3.38) в точке 1 (начало интервала 1 — 2) выбирают следующим образом:

$$\begin{aligned} \{y_{21}\}_1 &= \{100 \dots 0\}^T; & \{y_{22}\}_1 &= \{010 \dots 0\}^T; \\ \{y_{23}\}_1 &= \{001 \dots 0\}^T; & \{z_2\}_1 &= \{000 \dots 0\}^T. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Вектор $\{y_2\}$ в формуле (3.39) определяет граничные условия в точке 2. Их всего $n/2$, поэтому из всех уравнений (3.39) нужно оставить только те, которые соответствуют известным условиям на границе. Векторы $\{y_{21}\}_1$; $\{y_{22}\}_1$ и т. д. находят интегрированием уравнений на участке 1 — 2 при начальных условиях (3.40).

Из уравнений (3.38), (3.39) определяют неизвестные константы C_{11} , C_{12} и т. д., позволяющие, еще раз проинтегрировав систему (3.19), найти искомые значения вектора $\{y\}$ на участках 0 — 1 и 1 — 2.

Рассмотренная процедура может быть обобщена на случай, когда во всей области имеется большее число участков. Положим, весь интервал интегрирования разделен на m участков. Число уравнений (3.38) и (3.39) будет равно m . Порядок всех уравнений, кроме последнего, равен n ; последнее, соответствующее граничному участку, имеет порядок $n/2$. Количество неизвестных констант равно $(m - 1)n + n/2 = mn - n/2$. Нужно иметь в виду, что $n/2$ граничных условий удовлетворены на границе в точке 0.

Для определения составляющих векторов в конце каждого участка нужно численно интегрировать уравнения (3.19) $(mn - n/2 + m)$ раз, т. е. столько раз решать задачу Коши. Процесс этот довольно громозд-

кий, но если он выполнен, можно переходить к нахождению констант C_{11} , C_{12} и т. д. Константы определяют из $(mn - n/2)$ неоднородных линейных алгебраических уравнений. Решение уравнений может быть получено с использованием, например, метода Гаусса. Для определения составляющих вектора $\{y\}$ необходимо еще раз проинтегрировать уравнения (3.19) при найденных константах C_{11} , C_{12} ... и т. д.

Таким образом, рассмотренный метод состоит в непосредственном интегрировании $(n + 1)$ задач с начальными условиями по всем участкам рассматриваемого интервала. После того как это сделано для всех участков, на их границах задают условия непрерывности векторов, что приводит к системе линейных алгебраических уравнений. Затем решают эту систему, что позволяет в конце концов найти составляющие вектора состояния во всех точках стыка участков.

Отметим некоторые особенности рассмотренного в этом параграфе матричного метода начальных параметров. При применении его для расчета конструкций нет необходимости сводить дифференциальные уравнения к меньшему числу уравнений более высокого порядка. Запись в матричной форме позволяет осуществить интегрирование системы в таком виде, в котором она получена при выводе уравнений.

В отличие от других численных методов здесь удается при интегрировании матричных уравнений следить за размером шага и автоматически выбирать его так, чтобы удовлетворялась требуемая точность решения. Размеры участков, на которые делится весь интервал интегрирования, могут быть разные. Предварительно их определяют, руководствуясь асимптотическими оценками, например при расчете оболочек — длиной краевой зоны. Более точная разбивка интервала может быть осуществлена с помощью повторных расчетов.

Рассмотренный метод был разработан и применен к задачам строительной механики в работе [4]. В ней же даны некоторые усовершенствованные его варианты.

§ 3.3. Метод конечных разностей

Метод конечных разностей (МКР) основан на замене непрерывных функций и их производных в дифференциальных уравнениях дискретными значениями и приведении уравнений к алгебраической системе высокого порядка.

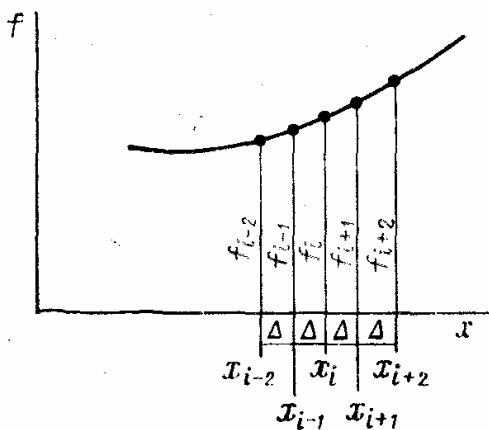


Рис. 3.1

Эффективность решения задач в разностной форме зависит от особенностей разностной аппроксимации дифференциальных уравнений, вида краевых условий и конфигурации области, в которой ищется решение.

Рассмотрим подробнее особенности разностной аппроксимации производных на примере одномерной схемы. На рис. 3.1 изображена некоторая непрерывная функция $f(x)$ и отмечены ее дискретные значения f_{i-2} ;

$f_{i-1}; f_i; f_{i+1}; f_{i+2}$. Положим, что расстояние по оси x между соседними значениями функции одинаково и равно Δ . Если $f(x)$ имеет непрерывные производные, то значения f_{i+1} и f_{i-1} могут быть представлены через значения функции f и ее производных в точке i с помощью ряда Тейлора:

$$f_{i+1} = f_i + \Delta f'_i + \frac{1}{2} \Delta^2 f''_i + \frac{1}{6} \Delta^3 f'''_i + \frac{1}{24} \Delta^4 f^{IV}_i + \dots; \quad (3.41)$$

$$f_{i-1} = f_i - \Delta f'_i + \frac{1}{2} \Delta^2 f''_i - \frac{1}{6} \Delta^3 f'''_i + \frac{1}{24} \Delta^4 f^{IV}_i + \dots \quad (3.42)$$

Первую производную в точке i из уравнений (3.41) можно записать так:

$$f'_i = (f_{i+1} - f_i) / \Delta - \Delta f''_i / 2 + \dots$$

При гладкой функции, когда вторая и высшие производные конечны и имеют примерно одинаковый порядок и когда значение Δ мало, вторым и последующими членами ряда можно пренебречь. Наибольшее из отброшенных слагаемых пропорционально первой степени шага Δ :

$$f'_i = (f_{i+1} - f_i) / \Delta + O(\Delta), \quad (3.43)$$

где $O(\Delta)$ — величина, определяющая точность аппроксимации функции.

Аналогичное соотношение можно получить из ряда (3.42)

$$f'_i = (f_i - f_{i-1}) / \Delta + O(\Delta). \quad (3.44)$$

Зависимости (3.43) и (3.44) показывают, что первая производная в точке i может быть представлена по-разному — через значения функции в этой точке и последующей (правая разность) или в этой точке и предыдущей (левая разность). В том и другом случае точность аппроксимации производной пропорциональна первой степени шага Δ .

Первую производную можно представить и с более высокой точностью. Для этого из ряда (3.41) нужно вычесть ряд (3.42):

$$f'_i = (f_{i+1} - f_{i-1}) / (2\Delta) + O(\Delta^2). \quad (3.45)$$

При решении задач часто нужно иметь разностные уравнения высокой точности, но это связано с увеличением количества точек массива, аппроксимирующего производные. Для первой производной, как видно из соотношений (3.43), (3.44), (3.45), при точности аппроксимации $O(\Delta)$ необходимы две точки, при точности $O(\Delta^2)$ — три. Большая точность требует еще большего числа точек. Получим формулы, аппроксимирующие первую производную с высокой точностью. Для этого к соотношениям (3.41) и (3.42) нужно добавить следующие:

$$f_{i+2} = f_i + 2\Delta f'_i + 2\Delta^2 f''_i + \frac{4}{3} \Delta^3 f'''_i + \frac{2}{3} \Delta^4 f^{IV}_i + \dots; \quad (3.46)$$

$$f_{i-2} = f_i - 2\Delta f'_i + 2\Delta^2 f''_i - \frac{4}{3} \Delta^3 f'''_i + \frac{2}{3} \Delta^4 f^{IV}_i - \dots \quad (3.47)$$

Исключая из них вначале f'_i, f''_i, f'''_i , затем f''''_i , получим

$$f'_i = \frac{1}{12\Delta} (f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}) + 0(\Delta^4). \quad (3.48)$$

Это так называемая «пятиточечная» центральная разностная схема, аппроксимирующая первую производную с точностью, пропорциональной четвертой степени шага.

Используя ряды (3.41), (3.42), (3.46), (3.47), можно представить вторую и другие производные в разностной форме с высокой точностью, например:

$$f''_i = \frac{1}{2\Delta^2} (f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}) + 0(\Delta^2);$$

$$f''_i = \frac{1}{12\Delta^2} (-f_{i-2} + 16f_{i-1} - 30f_i + 16f_{i+1} - f_{i+2}) + 0(\Delta^4). \text{ и т. д.}$$

При расчетах иногда необходимо иметь формулы для аппроксимации производных только вправо или только влево. Их получают аналогичным путем. Например, для правых разностей

$$f'_i = (-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2})/(2\Delta) + 0(\Delta^2);$$

$$f''_i = (+2f_i - 5f_{i+1} + 4f_{i+2} - f_{i+3})/\Delta^2 + 0(\Delta^2). \quad (3.49)$$

Эти же производные через левые разности имеют вид

$$f'_i = (3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2})/(2\Delta) + 0(\Delta^2);$$

$$f''_i = (-2f_i + 5f_{i-1} - 4f_{i-2} + f_{i-3})/\Delta^2 + 0(\Delta^2).$$

Все эти соотношения показывают, что хотя производные могут быть представлены в разностной форме с весьма высокой точностью, разностные схемы при этом становятся громоздкими и не всегда удобными для практических расчетов.

Поясним применение метода на примере расчета шарнирно опертого стержня переменной жесткости EJ , нагруженного осевой сжимающей силой P и поперечной нагрузкой q (рис. 3.2). Изгиб стержня описывается соотношением

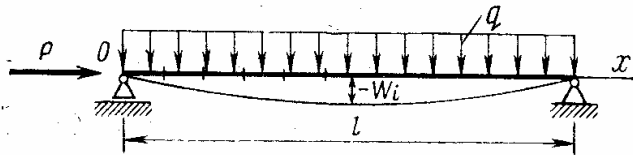


Рис. 3.2

$$EJ \frac{d^2w}{dx^2} + Pw = \frac{q(x^2 - lx)}{2}. \quad (3.50)$$

Построим решение методом конечных разностей при граничных условиях: при $x = 0$ $w = 0$; при $x = l$ $w = 0$. В разностной форме с помощью зависимости (3.49) уравнение прогиба стержня можно представить в виде

$$w_{i-1} + (k_i^2 \Delta^2 - 2) w_i + w_{i+1} = \frac{q\Delta^2}{2(EJ)_i} (x_i^2 - lx_i), \quad (3.51)$$

Коэффициенты $\alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3$ и т. д. находят последовательно по формулам (3.56). Особенность расчета методом прогонки состоит в том, что при определении коэффициентов при прямом ходе (рис. 3.3) необходимо их «запоминать», чтобы впоследствии по формуле (3.53) найти значение w_i . Для граничного условия на правом конце $w_n = 0$ при $i = n - 1$ получаем $w_{n-1} = \alpha_{n-1}$. Величина $w_{n-2} = \alpha_{n-2} + \beta_{n-2} \times w_{n-1}$. Обратный ход позволяет определить все значения w_i .

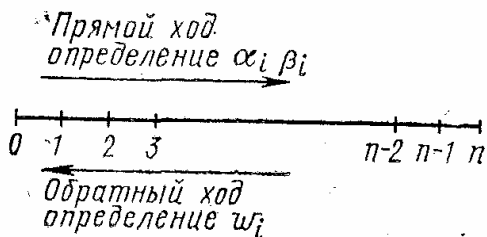


Рис. 3.3

В рассмотренном примере граничные условия заданы относительно искомой функции. Решение задачи, когда на границе задана производная, имеет некоторые особенности.

Положим, что имеют место условия:

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0 \quad A w' + B w &= C \text{ и} \\ \text{при } x = l \quad D w' + E w &= F. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Запишем эти соотношения в разностной форме, представив производную с той же точностью, что и в дифференциальном уравнении. Это можно сделать, используя, например, центральные разности (3.45), (3.48), но тогда необходимо рассматривать законтурные точки ($i = -1$; $i = n + 1$). При этом уравнения (3.57) примут вид

$$\begin{aligned} A (w_1 - w_{-1}) / (2\Delta) + B w_0 &= C; \\ D (w_{n+1} - w_{n-1}) / (2\Delta) + E w_n &= F. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Увеличим длину стержня на размер Δ влево и вправо и добавим к системе (3.52) еще два уравнения:

$$\begin{aligned} w_{-1} + (k_0^2 \Delta^2 - 2) w_0 + w_1 &= 0; \\ w_{n-1} + (k_n^2 \Delta^2 - 2) w_n + w_{n+1} &= 0. \end{aligned}$$

Значения w_{-1} и w_{n+1} теперь могут быть исключены с помощью соотношений (3.58).

Для дальнейшего расчета нужно воспользоваться той последовательностью решения задачи, которая была применена ранее.

Граничные условия (3.59) в разностной форме можно записать, не используя законтурные точки. Сохраняя точность аппроксимации производной $O(\Delta^2)$, рассмотрим первое соотношение (3.49'). Для левого края стержня граничное условие примет вид

$$(-3A + 2\Delta B) w_0 + 4A w_1 - A w_2 - 2\Delta C = 0. \quad (3.59)$$

Отсюда и из первого уравнения (3.52) нетрудно найти начальные значения коэффициентов прогонки $\alpha_1; \beta_1$. Для правого края стержня при расчете нужно воспользоваться аппроксимацией первой производной влево с точностью $O(\Delta^2)$

$$(3D + 2\Delta E) w_n - 4D w_{n-1} + D w_{n-2} - 2\Delta F = 0. \quad (3.60)$$

Это соотношение позволяет при обратном ходе начать определение всех значений перемещений w_i .

Аппроксимация граничных условий (3.59) и (3.60) избавляет от необходимости рассматривать законтурные точки и уменьшает число точек массива.

§ 3.4. Применение метода конечных разностей для решения двумерных задач

Задачи расчета конструкций, описываемые дифференциальными уравнениями в частных производных, могут быть решены методом конечных разностей. Более громоздкие по сравнению с одномерными задачами они предполагают использование аппарата матричной алгебры и ЭВМ.

Общий случай напряженно-деформированного состояния двумерных систем может быть сведен к матричному уравнению:

$$[A_1] \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{f\} + [A_2] \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{f\} + [A_3] \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \{f\} + [A_4] \frac{\partial}{\partial x} \{f\} + [A_5] \frac{\partial}{\partial y} \{f\} + [A_6] \{f\} = \{F\}, \quad (3.61)$$

где $\{f\}$ — вектор, содержащий компоненты усилий и перемещений; $[A_1] \dots [A_6]$ — квадратные матрицы; $\{F\}$ — вектор нагрузки.

Необходимо получить решение этой системы уравнений при граничных условиях, заданных в каждой точке граничного контура и выраженных через компоненты вектора $\{f\}$ и его первые производные по x и y .

Представим уравнение (3.61) в более компактном виде, для чего введем вектор производных

$$\{\Phi\} = \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad f \right\}^T \quad (3.62)$$

и матрицу, состоящую из блоков

$$[A] = [[A_1] [A_2] [A_3] [A_4] [A_5] [A_6]]. \quad (3.63)$$

Тогда уравнение (3.61) может быть представлено в виде

$$[A] \{\Phi\} = \{F\}. \quad (3.64)$$

Уравнение (3.64) является достаточно общим — им может быть описано поведение таких двумерных систем, как тонкие пластины, мембраны, оболочки и др.

Например, для мембраны, нагруженной нормальной к поверхности нагрузкой $p(x, y)$, имеющей предварительные усилия T , вектор $\{f\}$ имеет только первую составляющую, отличную от нуля. Она соответствует нормальному к поверхности прогибу w . Матрица $[A]$ имеет все нулевые члены, кроме первых двух, равных единице, а вектор нагрузки $\{F\} = p(x, y)/T$. Уравнение (3.64) принимает вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{p(x, y)}{T}. \quad (3.65)$$

При решении задач методом конечных разностей на область интегрирования наносится сетка, состоящая из четырехугольных (рис. 3.4, а) или треугольных (рис. 3.4, б) элементов. Выделяют несколько элементов, имеющих центральную узловую точку O .

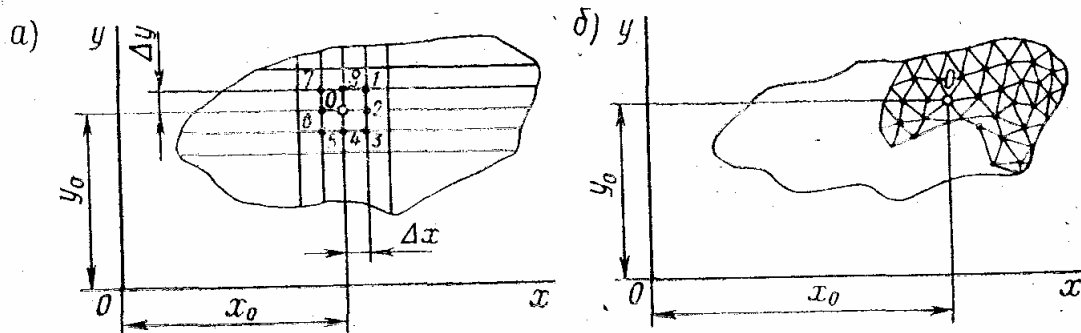


Рис. 3.4

Частные производные функции $f(x, y)$ или вектора $\{f\}$ в точке O с помощью ряда Тейлора могут быть представлены через значения функции или вектора в соседних точках $1, 2, 3 \dots$:

$$f_i = f + \Delta x_i \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y_i \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2} \Delta x_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \Delta y_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \Delta x_i \Delta y_i \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}. \quad (3.66)$$

Здесь все производные и сама функция f соответствуют точке O ; $\Delta x_i, \Delta y_i$ — расстояния по осям x и y от точки O до точки i (рис. 3.4, а).

Число соотношений (3.66) зависит от количества точек, расположенных вокруг центральной точки. Например, для четырехэлементной прямоугольной девятиточечной разностной схемы (рис. 3.5), где $\Delta x_1 = \Delta x, \Delta x_2 = \Delta x; \Delta x_3 = \Delta x; \Delta x_4 = 0; \Delta x_5 = -\Delta x; \Delta x_6 = -\Delta x; \Delta x_7 = -\Delta x; \Delta x_8 = 0; \Delta y_1 = \Delta y; \Delta y_2 = 0; \Delta y_3 = -\Delta y; \Delta y_4 = -\Delta y; \Delta y_5 = -\Delta y; \Delta y_6 = 0; \Delta y_7 = \Delta y; \Delta y_8 = \Delta y$, запишем соотношения (3.66) для каждой из восьми точек. Из всех этих уравнений можно получить несколько вариантов записи производных. Один из них следующий:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta x} (f_2 - f_6) + O(\Delta x^2); \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{2\Delta y} (f_8 - f_4) + O(\Delta y^2); \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{1}{\Delta x^2} (f_2 - 2f_0 + f_6) + O(\Delta x^2); \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{1}{\Delta y^2} (f_8 - 2f_0 + f_4) + O(\Delta y^2); \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{4\Delta x \Delta y} (f_1 - f_3 + f_5 - f_7) + O(\Delta x^2) + O(\Delta y^2). \end{aligned} \quad (3.67)$$

Точность аппроксимации производных здесь соответствует квадрату шагов Δx и Δy .

Представим (3.67) в матричной форме. Введем вектор узловых точек разностной схемы

$$\{\varphi\} = \{f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6 f_7 f_8\}^T. \quad (3.68)$$

Связь между векторами $\{\Phi\}$ и $\{\varphi\}$ определяется матрицей

$$\{\Phi\} = [C] \{\varphi\}, \quad (3.69)$$

где

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\Delta x^2} & 0 & 0 & -\frac{2}{\Delta x^2} & 0 & 0 & \frac{1}{\Delta x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\Delta y^2} & -\frac{2}{\Delta y^2} & \frac{1}{\Delta y^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4\Delta x\Delta y} & 0 & -\frac{1}{4\Delta x\Delta y} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4\Delta x\Delta y} & 0 & \frac{1}{4\Delta x\Delta y} \\ 0 & \frac{1}{2\Delta x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\Delta x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\Delta y} & 0 & -\frac{1}{2\Delta y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Подставив выражение вектора $\{\Phi\}$ в уравнение (3.64), получим соотношение

$$[K] \{\varphi\} = \{F\}, \quad (3.70)$$

соответствующее разностной форме общего уравнения (3.61), где $[K] = [A][C]$. Разностная схема (матрица $[C]$) содержит девять точек. Как уже отмечалось, формулы для разностной аппроксимации производных (3.67) могут иметь и иной вид.

Если требуется более высокая точность решения формулы должны быть значительно сложнее. В первую очередь это отражается матрицей $[C]$.

Что касается физической стороны соотношения (3.70), то когда задача решается в перемещениях и узловые функции или векторы (3.69) выбраны так, что они соответствуют узловым перемещениям, матрица $[K]$ является *матрицей жесткости метода конечных разностей*.

Она устанавливает связь между усилиями и перемещениями в узлах сетки и, можно сказать, оказывается некоторым аналогом *матрицы жесткости метода конечных элементов*.

Рассмотренный вариант прямоугольной сетки не единственный. Для областей сложной конфигурации сетку удобно выбирать так, чтобы она совпадала с граничным контуром. В этом случае треугольные

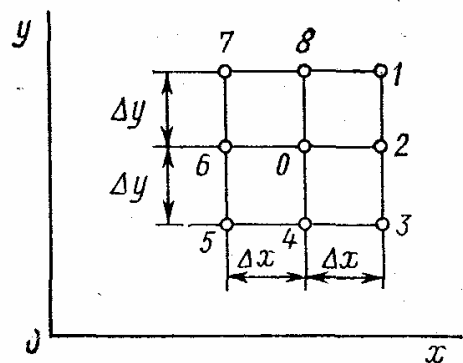


Рис. 3.5

элементы оказываются более рациональными — их можно лучше расположить вдоль криволинейной границы. Такая сетка с элементами разных размеров может применяться при расчете конструкций, имеющих отверстия, включения сложной формы, при нагружении тела локальными силами и т. д.

Рассмотрим, как записываются производные функции в точке O через значения функций в окружающих точках (рис. 3.6). Координаты точки O , так же как и точек $1 \dots 6$, считаются известными. Воспользуемся уравнением (3.66) и запишем его в матричной форме для каждой точки $i = 1 \dots 6$:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_1^2/2 & \Delta y_1^2/2 & \Delta x_1 \Delta y_1 & \Delta x_1 & \Delta y_1 & 1 \\ \Delta x_2^2/2 & \Delta y_2^2/2 & \Delta x_2 \Delta y_2 & \Delta x_2 & \Delta y_2 & 1 \\ \Delta x_3^2/2 & \Delta y_3^2/2 & \Delta x_3 \Delta y_3 & \Delta x_3 & \Delta y_3 & 1 \\ \Delta x_4^2/2 & \Delta y_4^2/2 & \Delta x_4 \Delta y_4 & \Delta x_4 & \Delta y_4 & 1 \\ \Delta x_5^2/2 & \Delta y_5^2/2 & \Delta x_5 \Delta y_5 & \Delta x_5 & \Delta y_5 & 1 \\ \Delta x_6^2/2 & \Delta y_6^2/2 & \Delta x_6 \Delta y_6 & \Delta x_6 & \Delta y_6 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ f \end{Bmatrix}, \quad (3.70')$$

или

$$\{\varphi_1\} = [R] \{\Phi\},$$

откуда обратное соотношение для вектора производных

$$\{\Phi\} = [R]^{-1} \{\varphi_1\}.$$

Уравнение двумерной задачи (3.64) в разностной форме для треугольной сетки следующее:

$$[K] \{\varphi_1\} = \{F\}, \quad (3.71)$$

где $[K] = [A] [R]^{-1}$.

Соотношения (3.70) и (3.71) имеют одинаковую структуру. Матрица $[K]$ здесь также соответствует матрице жесткости метода конечных разностей, если $\{\varphi_1\}$ — вектор перемещений.

При решении двумерных задач методом конечных разностей нужно представить в дискретной форме не только систему разрешающих уравнений, но и граничные условия. Не всегда это просто сделать, особенно для сетки, не совпадающей с граничным контуром. Некоторые области могут иметь границу, проходящую между узлами сетки. В этом случае граничные условия на заданной области A (рис. 3.7) необходимо перенести на сеточную область B , т. е. функции в точках 2 и 4 заменить на функции в точках 1, 3 и 5.

Применяя простейший вариант замены, использующий линейную интерполяцию, получаем

$$f_5 = f_4 \frac{\Delta x}{\delta x} + f_3 \left(1 - \frac{\Delta x}{\delta x}\right); \quad (3.72)$$

$$f_1 = f_2 \frac{\Delta y}{\delta y} + f_3 \left(1 - \frac{\Delta y}{\delta y}\right).$$

Здесь f_2 и f_4 — известные функции, определяемые граничными условиями, а соотношения (3.72) связывают функции в точках, близких к граничному контуру.

Чтобы получить уточненные соотношения, соответствующие нелинейной интерполяции, необходимо использовать большее количество точек. Так, функцию в точке 4 заменяют функциями в точках 3 и 5; то же касается точки 7 и др.

При решении задач граничные условия на контуре задаются не только относительно самой функции, но и относительно ее производных. Переход к граничным условиям на сеточной области в этом слу-

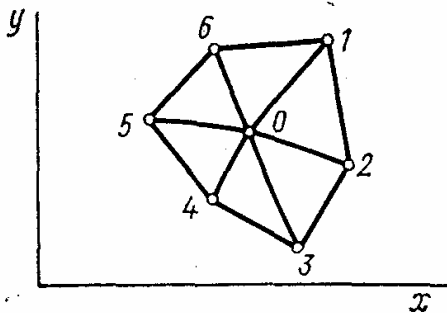


Рис. 3.6

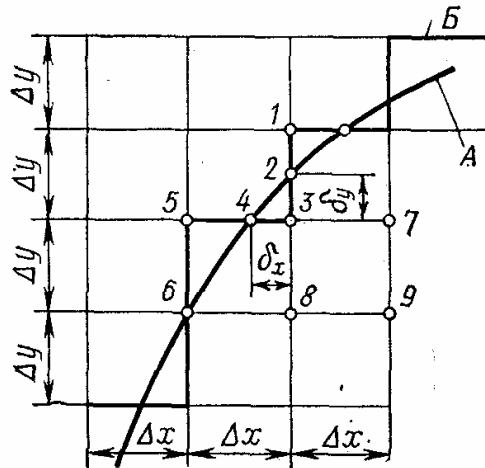


Рис. 3.7

чае несколько сложнее. Предварительно необходимо получить в граничной точке производные по каждому из направлений x и y . Эти производные заменяют разностями значений функции в близлежащих узлах сетки. Так, производная в точке 2 по направлению y может быть заменена приближенным соотношением

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_2 = - \frac{f_3 - f_2}{\delta y}.$$

Уточненные зависимости получают, используя ряд (3.66).

Уравнения и граничные условия, записанные в разностной форме, должны быть распространены на всю область интегрирования. Для этого в качестве центральной точки O последовательно рассматривают

все внутренние точки области и точки граничного контура. В результате получается алгебраическая система уравнений высокого порядка. Подобные уравнения решают известными методами линейной алгебры.

На примере расчета прямоугольной мембраны, нагруженной поперечной нагрузкой $p(x, y)$, рассмотрим решение двумерной задачи.

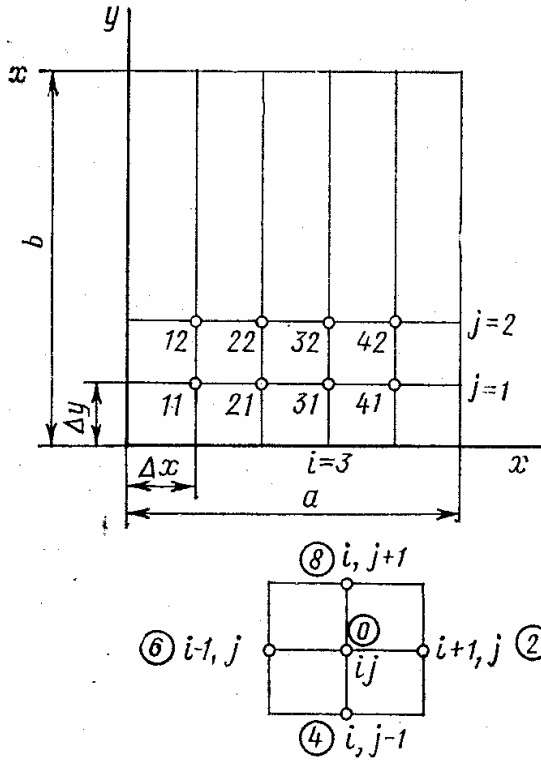


Рис. 3.8

Деформированное состояние мембраны описывается уравнением (3.65). Мембрана размера $a \times b$ (рис. 3.8) закреплена на контуре так, что во всех точках границы перемещение $w = 0$. Нанесем на поверхность мембраны сетку с шагом Δx вдоль оси x и шагом Δy вдоль оси y . Положим $\Delta x = a/5$. Вектор $\{\Phi\}$ в общей системе уравнений упрощается и принимает вид

$$\{\Phi\} = \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\}^T.$$

Матрица $[A] = [1 \ 1]$.

Узловым точкам присвоим два индекса. Центральная точка O будет иметь индекс i, j , остальные представлены на рис. 3.8. Вектор узловых перемещений принимает вид

$$\{\varphi\} = \{w_{i+1,j} \ w_{i,j+1} \ w_{i,j} \ w_{i,j-1} \ w_{i-1,j}\}^T.$$

Уравнение (3.70) в разностной форме может быть записано следующим образом:

$$[1 \ 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta x^2} & 0 & -\frac{2}{\Delta x^2} & 0 & \frac{1}{\Delta x^2} \\ 0 & \frac{1}{\Delta y^2} & -\frac{2}{\Delta y^2} & \frac{1}{\Delta y^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{i+1,j} \\ w_{i,j+1} \\ w_{i,j} \\ w_{i,j-1} \\ w_{i-1,j} \end{Bmatrix} = \{F\}. \quad (3.73)$$

Помещая центральную точку i, j последовательно на линии $i = 1, 2, 3, 4$ и оставляя индексы $j, j-1, j+1$, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} i=1) & (\omega_{2,j} - 2\omega_{1,j} + \omega_{0,j})/\Delta x^2 + (\omega_{2,j+1} - 2\omega_{1,j} + \omega_{1,j-1})/\Delta y^2 = p_{1,j}; \\ i=2) & (\omega_{3,j} - 2\omega_{2,j} + \omega_{1,j})/\Delta x^2 + (\omega_{2,j+1} - 2\omega_{2,j} + \omega_{2,j-1})/\Delta y^2 = p_{2,j}; \\ i=3) & (\omega_{4,j} - 2\omega_{3,j} + \omega_{2,j})/\Delta x^2 + (\omega_{3,j+1} - 2\omega_{3,j} + \omega_{3,j-1})/\Delta y^2 = p_{3,j}; \\ i=4) & (\omega_{5,j} - 2\omega_{4,j} + \omega_{3,j})/\Delta x^2 + (\omega_{4,j+1} - 2\omega_{4,j} + \omega_{4,j-1})/\Delta y^2 = p_{4,j}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

В первых слагаемых каждого из уравнений индекс j общий, а во вторых — общий индекс j в каждом столбце. Если ввести векторы

$$\{w\} = \{w_1 w_2 w_3 w_4\}^T; \{p\} = \{p_1 p_2 p_3 p_4\}^T,$$

то система (3.74) может быть представлена в виде

$$\frac{1}{\Delta x^2} [B] \{w\}_j + \frac{1}{\Delta y^2} (\{w\}_{j+1} - 2\{w\}_j + \{w\}_{j-1}) = \{p\}_j. \quad (3.75)$$

Учитывая, что $w_{0j} = w_{5j} = 0$, получаем матрицу

$$[B] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Решение разностного уравнения (3.75), или его несколько иначе записанного варианта

$$\{w\}_{j+1} + [F] \{w\}_j + \{w\}_{j-1} = \Delta y^2 \{p\}_j, \quad (3.76)$$

где

$$[E] = \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} [B] - 2[I],$$

может быть получено методом прогонки.

Процедура расчета здесь принципиально та же, что и в § 3.3. Разница лишь в том, что функции должны быть заменены векторами, а прогоночные коэффициенты — матрицами. При расчете необходимо осуществить прямой ход, когда определяют прогоночные матрицы из рекуррентных соотношений, и после удовлетворения условий на правой границе находят искомые векторы при обратном ходе.

§ 3.5. Метод конечных элементов

Наиболее распространенным методом расчета сложных конструкций является метод конечных элементов (МКЭ). Его особенность состоит в том, что конструкция, представляющая собой непрерывную среду, заменяется ее аналогом, составленным, как из кубиков, из конечного числа блоков — элементов, поведение каждого из которых может быть определено заранее. Взаимодействие элементов позволяет представить общую картину деформирования системы.

На рис. 3.9 изображена оболочка так называемого вафельного бака, состоящая из гладкой панели и кольцевых и продольных подкреплений. Конструкция оболочки может быть составлена из набора простых элементов: цилиндрической прямоугольной панели 1, прямого стержня 2, криволинейного стержня 3. Характеристики жесткости каждого из этих элементов определяются заранее. На рисунке обозначены узловые точки A, B, C, D , по которым элементы собираются в общую систему. Напряженное состояние такой сложной конструкции может быть определено с помощью МКЭ с единых позиций.

Методом конечных элементов решено большое количество задач прочности, устойчивости и динамики конструкций. Он используется для анализа нелинейных явлений, с его помощью удастся решить сложные многомерные задачи оптимизации и др.

Достоинства метода в его универсальности: возможности использовать элементы различных типов, произвольности рассматриваемой области, простоте приемов построения элементов высокой точности. В варианте метода, рассматриваемом ниже — методе перемещений, — при стыковке элементов требование удовлетворения

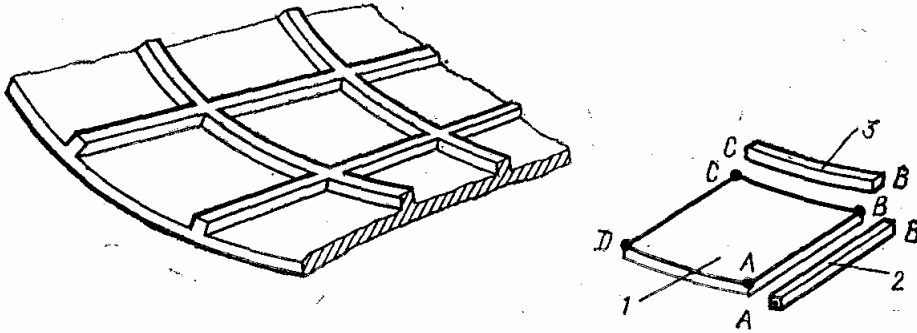


Рис. 3.9

естественных краевых условий необязательно. Этот наиболее известный вариант МКЭ использует формулировку принципа возможных перемещений (1.29).

В матричной форме для трехмерного тела ее можно представить следующим образом:

$$\iiint \{\sigma\}^T \{\delta\varepsilon\} dx dy dz = \iiint \{q\}^T \{\delta u\} dx dy dz + \iint \{p\}^T \{\delta u\} dS.$$

Это же соотношение может иметь вид

$$\iiint \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dx dy dz = \iiint \{\delta u\}^T \{q\} dx dy dz + \iint \{\delta u\}^T \{p\} dS, \quad (3.77)$$

где векторы напряжений и деформаций соответственно равны:

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= \{\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}\}^T; \\ \{\varepsilon\} &= \{\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx}\}^T; \end{aligned} \quad (3.78)$$

векторы объемных, поверхностных сил и перемещений следующие:

$$\begin{aligned} \{q\} &= \{XYZ\}^T \\ \{p\} &= \{p_x p_y p_z\}^T; \quad \{u\} = \{u v w\}^T. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Условие равновесия (3.77) не зависит от свойств материала и справедливо как для линейной, так и для нелинейной системы. Для линейно-упругого тела, имеющего начальные деформации, физические соотношения принимают вид

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} - [D] \{\varepsilon_0\}, \quad (3.80)$$

где $[D]$ — матрица упругих констант; $\{\varepsilon_0\}$ — вектор начальных деформаций. Роль начальных деформаций играют, в частности, температурные удлинения (см. § 1.4). Подстановкой зависимости (3.80) в уравнение (3.77) получаем

$$\begin{aligned} \iiint \{\delta\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dx dy dz = \iiint (\{\delta\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon_0\} + \\ + \{\delta u\}^T \{q\}) dx dy dz + \iint \{\delta u\}^T \{p\} dS. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Это условие справедливо как для отдельного элемента, так и для всей системы. В дальнейшем будем считать, что оно относится к каждому элементу и интегрирование ведется по объему и поверхности элемента. Соотношение принципа возможных перемещений для всей системы элементов отличается тем, что в этом случае применяются символы суммирования

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left[\iiint \{\delta\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dx dy dz \right]_i = \sum_{i=1}^n \left[\iiint (\{\delta\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon_0\} + \right. \\ \left. + \{\delta u\}^T \{q\}) dx dy dz + \iint \{\delta u\}^T \{p\} dS \right]_i, \end{aligned} \quad (3.82)$$

где n — общее число элементов тела.

Метод конечных элементов использует процедуры различных вариационных методов. В рассматриваемом варианте метода, так же как и в методе Рэлея—Ритца, необходимо задаться полем перемещений, но не на всей области, а лишь в пределах элемента. Перемещения задаются в виде полиномов по степеням x , y , z :

$$\{u\} = [A] \{\alpha\}, \quad (3.83)$$

где $[A]$ — матрица, зависящая от координат элемента; $\{\alpha\}$ — вектор коэффициентов полиномиального разложения функций перемещений. Количество коэффициентов соответствует числу степеней свободы элемента, а сами коэффициенты связаны с узловыми перемещениями. Если обозначить вектор узловых перемещений элемента через $\{u\}_n$, то поле перемещений определяется зависимостью

$$\{u\} = [\Phi] \{u\}_n. \quad (3.84)$$

Воспользуемся соотношениями (1.22) между деформациями и перемещениями. Подставив туда выражение (3.84), получим

$$\{\varepsilon\} = [B] \{u\}_n. \quad (3.85)$$

Матрица $[B]$, связывающая деформации с узловыми перемещениями, имеет важное значение в дальнейшем расчете. Вектор напряжений определяется уравнением (3.80), а с учетом формулы (3.85) он будет иметь вид

$$\{\sigma\} = [D] [B] \{u\}_n - [D] \{\varepsilon_0\}. \quad (3.86)$$

Рассмотрим отдельно левую и правую части условия равновесия (3.81). После подстановки вектора деформаций (3.85) в левую часть уравнения (3.81) оно будет выражено через узловые перемещения и некоторый интеграл, обозначенный символом $[K]$:

$$\begin{aligned} & \iiint \{\delta \varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dx dy dz = \\ & = \delta \{u\}_n^T \iiint [B]^T [D] [B] dx dy dz \{u\}_n = \delta \{u\}_n^T [K] \{u\}_n. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Здесь $[K]$ матрица, содержащая основную информацию о поведении малого участка деформируемой системы. Она называется матрицей жесткости элемента и является основной характеристикой системы в МКЭ.

В правой части уравнения (3.81) интегралы по объему и по поверхности можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} & \iiint (\{\delta \varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon_0\} + \{\delta u\}^T \{q\}) dx dy dz + \iint \{\delta u\}^T \{p\} dS = \\ & = \delta \{u\}_n^T \iiint [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} dx dy dz + \\ & + \delta \{u\}_n^T \iiint [\Phi]^T \{q\} dx dy dz + \delta \{u\}_n^T \iint [\Phi]^T \{p\} dS. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Этими соотношениями определяется вектор $\{F\}$ приведенных к узлам внешних сил.

Таким образом, считая известными матрицу $[\Phi]$, связывающую перемещения в любой точке элемента с узловыми перемещениями (3.84), и матрицу $[B]$, соответствующую соотношениям между деформациями и перемещениями узлов элемента по формуле (3.85), определяют матрицу жесткости $[K]$ и вектор внешних узловых сил $\{F\}$:

$$[K] = \iiint [B]^T [D] [B] dx dy dz; \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned} \{F\} = & \iiint [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} dx dy dz + \iiint [\Phi]^T \{q\} dx dy dz + \\ & + \iint [\Phi]^T \{p\} dS. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Для каждого элемента условие равновесия теперь принимает вид

$$[K] \{u\}_n = \{F\}. \quad (3.91)$$

К такой же форме приводятся соотношения для всей системы. Но вместо вектора узловых перемещений $\{u\}_n$ и матрицы жесткости $[K]$ элемента будут вектор узловых перемещений всей системы $\{\bar{u}\}_n$ и соответствующая матрица, называемая общей или глобальной матрицей жесткости $[\bar{K}]$:

$$[\bar{K}] \{\bar{u}\}_n = \{\bar{F}\}. \quad (3.91')$$

Это уравнение является основным при расчете конструкций с помощью МКЭ. Оно позволяет найти перемещения и, воспользовавшись соотношением (3.86), определить напряженное состояние в каждом элементе системы. *Основная задача расчета конструкций методом конечных элементов состоит в определении матриц жесткости элементов, общей матрицы жесткости $[\bar{K}]$ и вектора узловых сил $\{\bar{F}\}$.*

Рассмотрим на примерах, как определять эти матрицы и векторы. На рис. 3.10 изображен элемент стержня, изгибаемого поперечной распределенной нагрузкой $q(x)$. Положение элемента определяется вектором

$$\{u\}_n = \{w_1 \vartheta_1 w_2 \vartheta_2\}^T, \quad (3.92)$$

состоящим из двух узловых перемещений w_1, w_2 и двух углов поворота ϑ_1, ϑ_2 . Положим, что поле перемещений в элементе описывается алгебраическим полиномом, имеющим четыре коэффициента:

$$w = [1 \ x \ x^2 \ x^3] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = [A] \{\alpha\}. \quad (3.93)$$

Имея в виду, что сечение x поворачивается на угол $\vartheta = dw/dx$, а также, что при $x = 0$ имеем $w = w_1; \vartheta = \vartheta_1$, а при $x = l$ имеем $w = w_2; \vartheta = \vartheta_2$, находим вектор узловых перемещений

$$\{u\}_n = [C] \{\alpha\}, \quad (3.94)$$

где

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix}.$$

Вектор коэффициентов $\{\alpha\}$ с узловыми перемещениями связан обратной матрицей $[C]^{-1}$:

$$\{\alpha\} = [C]^{-1} \{u\}_n.$$

Подставив это соотношение в формулу (3.93), получим

$$w = [A] [C]^{-1} \{u\}_n = [\Phi] \{u\}_n. \quad (3.95)$$

Отсюда можно найти матрицу $[\Phi]$. Для рассматриваемой задачи это будет матрица-строка

$$[\Phi] = \left[\left(1 - 3 \frac{x^2}{l^2} + 2 \frac{x^3}{l^3} \right) \left(\frac{x}{l} - 2 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3} \right) \ l \right. \\ \left. \left(3 \frac{x^2}{l^2} - 2 \frac{x^3}{l^3} \right) \left(-\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3} \right) l \right]. \quad (3.96)$$

Относительное удлинение волокна, находящегося на расстоянии z от нейтральной оси стержня, определяется соотношением

$$\varepsilon = -z \frac{d^2 w}{dx^2}.$$

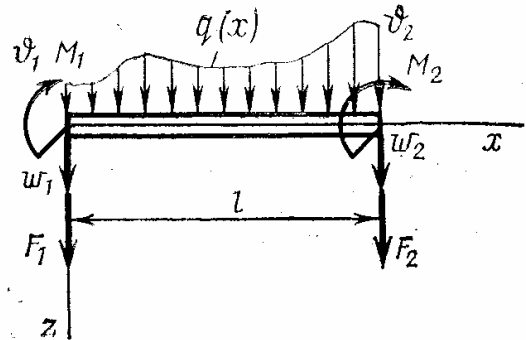


Рис. 3.10

Имея в виду соотношение (3.95), получим

$$\varepsilon = -z \frac{d^2}{dx^2} [\Phi] \{u\}_n.$$

Теперь найдем матрицу $[B]$, для чего нужно дважды продифференцировать каждую составляющую соотношения (3.96) и результат умножить на $-z$:

$$[B] = -z \frac{d^2}{dx^2} [\Phi] = -z \left[\frac{1}{l^2} \left(-6 + 12 \frac{x}{l} \right) \quad \frac{1}{l} \left(-4 + 6 \frac{x}{l} \right) \right. \\ \left. \frac{1}{l^2} \left(6 - 12 \frac{x}{l} \right) \quad \frac{1}{l} \left(-2 + 6 \frac{x}{l} \right) \right].$$

Теперь с помощью уравнения (3.91) удастся определить матрицу жесткости элемента стержня, модуль упругости и момент инерции которого в пределах элемента не меняется:

$$[K] = EJ \int_0^l \begin{bmatrix} -(6 - 12x/l)/l^2 \\ -(4 - 6x/l)/l \\ (6 - 12x/l)/l^2 \\ -(2 - 6x/l)/l \end{bmatrix} \left[-\frac{1}{l^2} \left(6 - 12 \frac{x}{l} \right) \right. \\ \left. \frac{1}{l} \left(4 - 6 \frac{x}{l} \right) \quad \frac{1}{l} \left(6 - 12 \frac{x}{l} \right) \quad -\frac{1}{l} \left(2 - 6 \frac{x}{l} \right) \right] dx.$$

Перемножив обе матрицы и проверяя интегрирование, получим окончательное выражение для матрицы жесткости элемента стержня:

$$[K] = -\frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ & & 12 & -6l \\ \text{Симм.} & & & 4l^2 \end{bmatrix}. \quad (3.97)$$

Полученная матрица связывает вектор узловых сил, состоящий из четырех компонент (рис. 3.10):

$$\{F\} = \{F_1 M_1 F_2 M_2\}^T,$$

с вектором перемещений $\{u\}_n$. Симметрия матрицы (3.97) следует из условия взаимности работ теории упругости.

Определим вектор узловых сил для балки. Для нагруженного элемента (рис. 3.10) узловые силы определяет соотношение (3.90). Для рассматриваемой задачи оно имеет вид

$$\{F\} = \int_0^l [\Phi]^T q(x) dx,$$

или в развернутой форме:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \int_0^l \begin{bmatrix} 1 - 3x^2/l^2 + 2x^3/l^3 \\ l(x/l - 2x^2/l^2 + x^3/l^3) \\ 3x^2/l^2 - 2x^3/l^3 \\ l(-x^2/l^2 + x^3/l^3) \end{bmatrix} q(x) dx.$$

Интегрирование каждой составляющей матрицы в последнем соотношении для нагрузки $q(x) = q$, не меняющейся в пределах элемента, позволяет найти для элемента вектор узловых сил:

$$\{F\} = \left\{ \frac{ql}{2} \quad \frac{ql^2}{12} \quad \frac{ql}{2} \quad -\frac{ql^2}{12} \right\}^T. \quad (3.98)$$

Этими узловыми силами заменяется распределенная нагрузка, действующая на балку.

Рассмотрим случай, когда задача о поперечном изгибе балки решается с помощью МКЭ и вся длина ее — один конечный элемент. Для консольной балки длиной $L = l$ (рис. 3.11, а) нагрузка q замене-

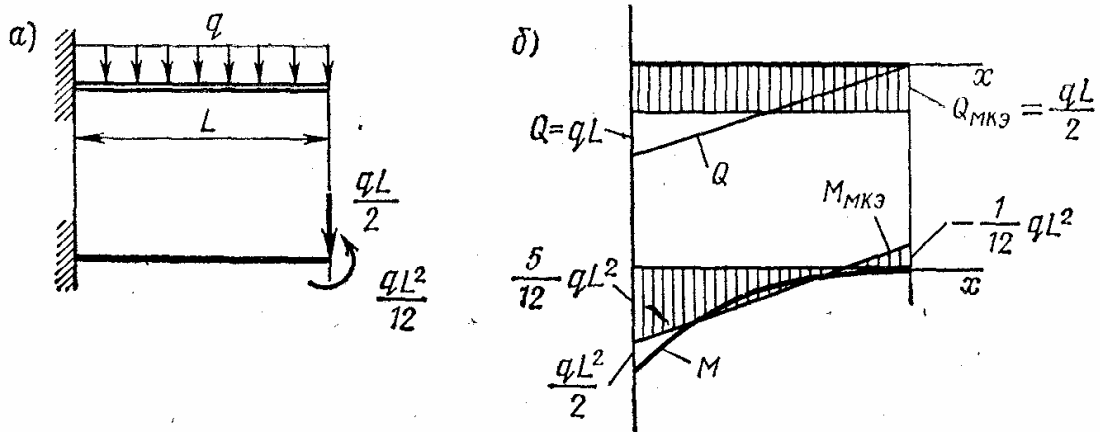


Рис. 3.11

на силой $F_2 = ql/2$ и моментом $M_2 = -ql^2/12$. Для этой эквивалентной системы с учетом условий закрепления левого края перемещения могут быть определены из соотношения

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ ql/2 \\ -ql^2/12 \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ & & 12 & -6l \\ \text{Симм.} & & & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 \\ \vartheta_2 \end{Bmatrix}.$$

Перемещения и угол поворота конца стержня соответственно равны

$$\omega_2 = ql^4/(8EJ); \quad \vartheta_2 = ql^3/(6EJ).$$

Точные выражения для перемещения и угла поворота какой-либо точки балки имеют вид

$$\omega = \frac{ql^4}{24EJ} \left(\frac{x^4}{l^4} - 4 \frac{x^3}{l^3} + 6 \frac{x^2}{l^2} \right); \quad \vartheta = \frac{ql^3}{6EJ} \left(\frac{x^3}{l^3} - 3 \frac{x^2}{l^2} + 3 \frac{x}{l} \right).$$

Для узловой точки $x = l$ перемещение и угол поворота, определенные по методу конечных элементов, дают точные значения.

На рис. 3.11, б построены точные и приближенные по МКЭ (с вертикальной штриховкой) эпюры изгибающих моментов $M(x)$ и перерезывающих сил $Q(x)$ для балки. Из графиков видно, что они существенно отличаются при нахождении решения только для одного элемента.

Существует много вариантов метода конечных элементов. Наиболее распространенная схема представлена выше. Значительно реже используется вариант, основанный на процедуре Галеркина. Он особенно эффективен при расчете таких систем, для которых затруднительно записать соотношение для полной потенциальной энергии.

Рассмотрим особенности применения метода на примере поперечного изгиба балки. Дифференциальное уравнение изгиба балки постоянной жесткости имеет вид

$$w^{VI} - q(x)/(EJ) = 0.$$

В рассматриваемой постановке вектор, аналогичный вектору узловых перемещений, должен иметь восьмой порядок, поскольку на каждом конце элемента в качестве степеней свободы необходимо принять не только перемещение и угол поворота, но и изгибающий момент и перерезывающую силу. А так как угол поворота соответствует первой производной w' от перемещения, а момент и перерезывающая сила пропорциональны второй и третьей производным, вектор $\{u\}_n$ представим в виде

$$\{u\}_n = \{w_1 w_1' w_1'' w_1''' w_2 w_2' w_2'' w_2'''\}^T.$$

Тогда перемещение в пределах элемента описывается полиномом седьмой степени

$$w = [1 \ x \ x^2 \ x^3 \ x^4 \ x^5 \ x^6 \ x^7] \{\alpha\} = [A] \{\alpha\},$$

где вектор коэффициентов

$$\{\alpha\} = \{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_7 \alpha_8\}^T.$$

При $x = 0$ и $x = l$ перемещение w и производные от него равны узловым составляющим вектора $\{u\}_n$:

$$\begin{aligned} x = 0: w &= w_1; w' = w_1'; w'' = w_1''; w''' = w_1'''; \\ x = l: w &= w_2; w' = w_2'; w'' = w_2''; w''' = w_2'''. \end{aligned}$$

Отсюда формируется связь между вектором узловых перемещений и вектором коэффициентов:

$$\{u\}_n = [C] \{\alpha\},$$

где

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 & l^4 & l^5 & l^6 & l^7 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 & 4l^3 & 5l^4 & 6l^5 & 7l^6 \\ 0 & 0 & 2 & 6l & 12l^2 & 20l^3 & 30l^4 & 42l^5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 24l & 60l^2 & 120l^3 & 210l^4 \end{bmatrix}.$$

Перемещение произвольной точки элемента, выраженное через перемещения и их производные в узлах, теперь будет иметь вид

$$w = [A] [C]^{-1} \{u\}_n = [\Phi] \{u\}_n.$$

Подставляя это соотношение в уравнение равновесия и имея в виду, что выбранная полиномиальная функция в общем случае не является его решением, получим функцию-ошибку

$$R_n = [\Phi]^{IV} \{u\}_n - q(x)/(EJ).$$

Согласно методу Галеркина функция-ошибка должна подчиняться соотношению (3.16). В варианте МКЭ оно соответствует следующей зависимости:

$$\frac{\partial}{\partial \{u\}_n} \int [\Phi] \{u\}_n R_n dx = 0.$$

Отсюда можно построить матрицу жесткости и вектор внешних сил элемента.

Метод Галеркина в конечно-элементной формулировке дает хорошие результаты для усилий и перемещений даже при небольшом числе элементов, на которые делят деформируемую систему. Поэтому кажущаяся громоздкость вычислений по сравнению с методом, основанным на принципе возможных перемещений, может быть компенсирована высокой точностью, особенно при определении внутренних усилий.

Рассмотренные примеры применения МКЭ имеют прежде всего методический смысл. Практические возможности метода неизмеримо шире. Он применяется при решении весьма сложных задач. Но основные принципы метода, как и последовательность его применения, могут быть усвоены на рассмотренных простых примерах. Более подробное изложение особенностей МКЭ можно найти в книгах [11], [19].

§ 3.6. Решение двумерных задач методом конечных элементов

Расчет тонкостенных конструкций во многих случаях сводится к решению двумерных задач. Иногда эти задачи удается свести к «квазиодномерным» — тогда область интегрирования и граничные условия позволяют воспользоваться методом разделения переменных и привести функционал, зависящий от двух переменных, к одномерному. Этот вариант решения задач часто используется, однако он не всегда возможен.

Для нерегулярных, сложных областей необходимо пользоваться двумерными элементами. В практике расчетов широкое распространение получили плоские треугольные и прямоугольные элементы, комбинации которых позволяют достаточно просто представить самые разнообразные конструкции в виде системы элементов.

На первом этапе расчета нужно построить матрицы жесткости для этих элементов. Рассмотрим, как строятся матрицы жесткости для двух типов конечных элементов: треугольных — применительно к плоской

задаче теории упругости и прямоугольных — применительно к поперечному изгибу пластин.

На рис. 3.14 изображен треугольный элемент с тремя узловыми точками i, j, k . Обход узлов от точки i производится против хода часовой стрелки.

Построим поле перемещений в элементе, полагая, что линейные и угловые компоненты деформаций в нем постоянны. Положим

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_2; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \beta_3; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_1, \quad (3.99)$$

где $\alpha_2, \beta_3, \gamma_1$ — константы. Из первых двух уравнений (3.99) следует

$$u = \alpha_2 x + D_1(y);$$

$$v = \beta_3 y + D_2(x).$$

Подставим эти соотношения в третье уравнение (3.99):

$$\frac{\partial D_1(y)}{\partial y} + \frac{\partial D_2(x)}{\partial x} = \gamma_1.$$

Здесь D_1 и D_2 — две независимые функции. Это уравнение удовлетворяется, если

$$\frac{\partial D_1(y)}{\partial y} = \alpha_3; \quad \frac{\partial D_2(x)}{\partial x} = \beta_2,$$

откуда после интегрирования получим

$$D_1(y) = \alpha_3 y + \alpha_1, \quad D_2(x) = \beta_2 x + \beta_1.$$

Следовательно, перемещения в элементе описываются следующими линейными функциями координат:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y; \quad v = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y. \quad (3.100)$$

Эти зависимости удовлетворяют условию постоянства деформаций. Константы $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \beta_1; \beta_2; \beta_3$ независимы. В матричной форме соотношения (3.100) имеют вид

$$u = [1 \ x \ y] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}; \quad v = [1 \ x \ y] \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{Bmatrix}.$$

Представим константы через перемещения и координаты узловых точек элемента

$$\{u_m\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}; \quad \{v_m\} = \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{Bmatrix},$$

или

$$\{u_m\} = [N] \{\alpha\}; \quad \{v_m\} = [N] \{\beta\}.$$

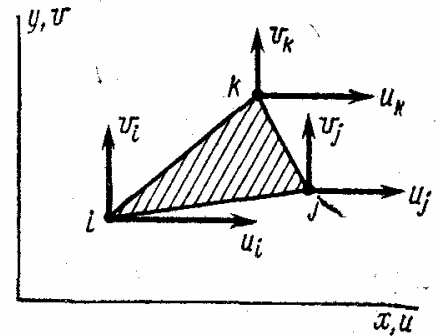


Рис. 3.14

Векторы констант

$$\{\alpha\} = [N]^{-1} \{u_m\}; \quad \{\beta\} = [N]^{-1} \{v_m\}.$$

Перемещения в любой точке элемента теперь можно определить матричными соотношениями

$$u = [\Phi] \{u_m\}; \quad v = [\Phi] \{v_m\}, \quad (3.101)$$

где $[\Phi] = [1 \ x \ y][N]^{-1}$. В развернутом виде матрица связи перемещений в элементе с узловыми перемещениями имеет вид

$$[\Phi] = \frac{1}{2\Delta} [((x_j y_k - x_k y_j) + (y_i - y_k) x + (x_k - x_j) y) \\ ((x_k y_i - x_i y_k) + (y_k - y_i) x + (x_i - x_k) y) \\ ((x_i y_j - x_j y_i) + (y_i - y_j) x + (x_j - x_i) y)],$$

где $2\Delta = (x_i - x_j)(y_j - y_k) - (x_j - x_k)(y_i - y_j)$ — удвоенная площадь треугольника.

Введем векторы узловых перемещений $\{u\}_n$ и деформаций $\{\epsilon\}_n$:

$$\{u\}_n = \{u_i v_i u_j v_j u_k v_k\}^T; \\ \{\epsilon\}_n = \{\epsilon_x \epsilon_y \gamma_{xy}\}^T. \quad (3.102)$$

Связь между ними определяется матрицей $[B]$:

$$\{\epsilon\}_n = [B] \{u\}_n.$$

Ее можно найти, имея в виду соотношения (1.17):

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}.$$

Подставив сюда соотношения (3.101) и имея в виду, что узловые перемещения соответствуют последовательности (3.102), получим

$$[B] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} y_{ik} & 0 & y_{kj} & 0 & y_{ij} & 0 \\ 0 & x_{kj} & 0 & x_{ik} & 0 & x_{ji} \\ x_{kj} & y_{jk} & x_{ik} & y_{ki} & x_{ji} & y_{ij} \end{bmatrix}. \quad (3.103)$$

Здесь $y_{ik} = y_i - y_k$, $x_{kj} = x_k - x_j$ и т. д.

Для плоского напряженного состояния общее соотношение для матрицы жесткости (3.89) принимает вид

$$[K] = h \iint [B]^T [D] [B] \, dx dy, \quad (3.104)$$

где h — толщина пластины. Матрица (1.46) упругих констант для изотропного тела без учета температурного воздействия имеет вид

$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix}. \quad (3.105)$$

Подставив выражения (3.103) и (3.105) в соотношение (3.104), получим матрицу жесткости треугольного конечного элемента для тела, находящегося в плоском напряженном состоянии

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.106)$$

где K_{11} , K_{12} и т. д. — блоки 2×2 , зависящие от координат вершин треугольника, жесткости Eh и коэффициента Пуассона, например:

$$[K_{11}] = \frac{Eh}{4\Delta(1-\mu^2)} \times \begin{bmatrix} \left(y_{jk} y_{jk} - \frac{1-\mu}{2} x_{kj} x_{kj} \right) \left(\mu y_{jk} x_{kj} + \frac{1-\mu}{2} x_{kj} y_{jk} \right) \\ \left(\mu x_{kj} y_{jk} + \frac{1-\mu}{2} y_{jk} x_{kj} \right) \left(x_{kj} x_{kj} + \frac{1-\mu}{2} y_{jk} y_{jk} \right) \end{bmatrix}.$$

Заметим, что для рассматриваемого элемента при получении матрицы $[K]$ операция интегрирования упрощается, так как матрица $[B]$ не является функцией от x и y , а зависит от координат узловых точек.

Матрица жесткости $[K]$ связывает векторы перемещений узлов и узловых сил (рис. 3.15):

$$[K] \{u\}_n = \{F\},$$

где

$$\{F\} = \{F_{xi} F_{yi} F_{xj} F_{yj} F_{xk} F_{yk}\}^T. \quad (3.107)$$

Если векторы перемещений и сил в каждой узловой точке представить в виде

$$\begin{aligned} \{u\}_n &= \{\omega_i \omega_j \omega_k\}^T; \\ \{F\} &= \{F_i F_j F_k\}^T, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \{\omega_i\} &= \{u_i v_i\}^T; \quad \{\omega_j\} = \{u_j v_j\}^T; \quad \{\omega_k\} = \{u_k v_k\}^T; \\ \{F_i\} &= \{F_{xi} F_{yi}\}^T; \quad \{F_j\} = \{F_{xj} F_{yj}\}^T; \quad \{F_k\} = \{F_{xk} F_{yk}\}^T, \end{aligned}$$

то в матрице (3.106), состоящей из блоков $[K_{11}]$, $[K_{12}]$ и т. д., каждая составляющая определяет взаимодействие узловых сил и узловых перемещений в элементе.

Рассмотрим особенности построения общей матрицы жесткости системы, состоящей из нескольких треугольных элементов. На рис.

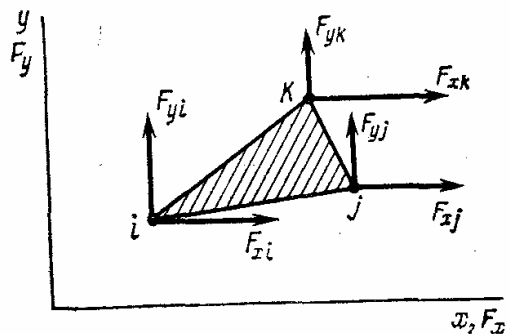


Рис. 3.15

Матрица жесткости общей системы симметрична, так как для одного и того же элемента $[K_{21}] = [K_{12}]$; $[K_{23}] = [K_{32}]$ и т. д. Полученное уравнение позволяет определить перемещения при заданных силах и силы при известных перемещениях в узлах. Если, например, пластина закреплена так, что в точках 1 и 3 запрещены перемещения, а в точках 2, 4, 5 известны силы (рис. 3.16), то в уравнении (3.108) неизвестными являются векторы перемещений $\{w_2\}$, $\{w_4\}$, $\{w_5\}$ и сил $\{F_1\}$, $\{F_3\}$.

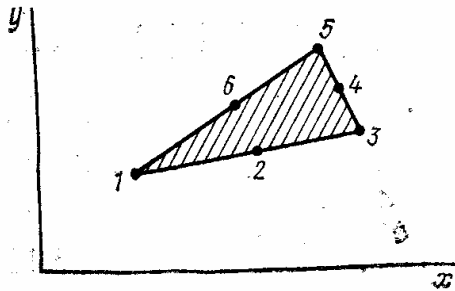


Рис. 3.17

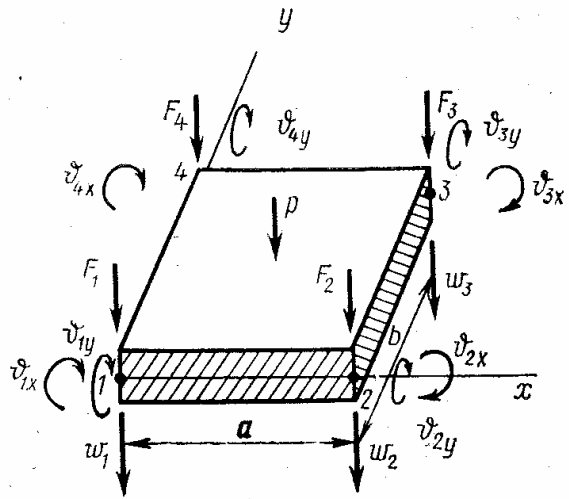


Рис. 3.18

Заметим, что в рассмотренном варианте треугольного элемента напряжения на границе элементов не непрерывны, а меняются скачком. При малом числе элементов расчет может оказаться весьма неточным. Результат можно уточнить, разбивая систему на большее число элементов или применяя элементы повышенной точности — с промежуточными точками. На рис. 3.17 изображен элемент, имеющий не три, а шесть узловых точек. Компоненты перемещений для него определяются соотношениями

$$\begin{aligned} u &= [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2] \{\alpha\}; \\ v &= [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2] \{\beta\}, \end{aligned} \quad (3.109)$$

где векторы констант

$$\begin{aligned} \{\alpha\} &= \{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6\}^T; \\ \{\beta\} &= \{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \beta_5 \beta_6\}^T. \end{aligned}$$

Описанная выше процедура позволяет построить матрицы жесткости и этого элемента. Подобным же образом определяют общую матрицу жесткости и находят напряжения. При аппроксимации поля перемещений полиномами второй степени (3.109) напряжения на границе элементов не будут иметь разрывов. Имеется возможность еще более уточнить решение, приняв на грани не одну, а две или более промежуточных точек. Матрицы жесткости элемента при этом становятся более громоздкими, но так как поле перемещений и напряжений более точно, то можно значительно уменьшить число элементов во всей системе.

Рассмотрим еще один двумерный конечный элемент применительно к задаче поперечного изгиба пластин (рис. 3.18). Деформация жест-

кой пластины определяется нормальными перемещениями и поворотами ее срединной поверхности (см. § 2.5). Прямоугольный элемент имеет в углах на срединной поверхности четыре узловые точки. Каждая точка может получить независимое перемещение w , а нормаль к срединной поверхности имеет две составляющие поворота: ϑ_x и ϑ_y .

Таким образом, общее число степеней свободы элемента равно $3 \times 4 = 12$, а вектор узловых перемещений имеет вид

$$\{u\}_n = \{w_1 \vartheta_{1x} \vartheta_{1y} w_2 \vartheta_{2x} \vartheta_{2y} w_3 \vartheta_{3x} \vartheta_{3y} w_4 \vartheta_{4x} \vartheta_{4y}\}^T. \quad (3.110)$$

Поле перемещений можно представить полиномом с двенадцатью коэффициентами

$$w = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3 \ x^3y \ xy^3] \{\alpha\} = [A] \{\alpha\}, \quad (3.111)$$

где $\{\alpha\} = \{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_7 \alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11} \alpha_{12}\}^T$.

Углы поворота пластины при поперечном изгибе определяются соотношениями

$$\vartheta_x = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \vartheta_y = \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (3.112)$$

Имея в виду, что

- 1) при $x = 0$ и $y = 0$ $w = w_1; \vartheta_x = \vartheta_{1x}; \vartheta_y = \vartheta_{1y};$
- 2) при $x = a$ и $y = 0$ $w = w_2; \vartheta_x = \vartheta_{2x}; \vartheta_y = \vartheta_{2y};$
- 3) при $x = a$ и $y = b$ $w = w_3; \vartheta_x = \vartheta_{3x}; \vartheta_y = \vartheta_{3y};$
- 4) при $x = 0$ и $y = b$ $w = w_4; \vartheta_x = \vartheta_{4x}; \vartheta_y = \vartheta_{4y};$

а также принимая во внимание соотношения (3.110), (3.111), (3.112), получаем

$$\{u\}_n = [C] \{\alpha\}.$$

Поле перемещений в элементе через узловые перемещения теперь определяется соотношением

$$w = [A] [C]^{-1} \{u\}_n = [\Phi] \{u\}_n. \quad (3.113)$$

Матрица $[\Phi]$ имеет размер 1×12 .

Деформации слоя пластины, отстоящего от срединной поверхности на расстояние z ,

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}.$$

Подставив сюда выражение (3.113), получим

$$\{\varepsilon\} = [B] \{u\}_n,$$

где

$$[B] = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}. \quad (3.114)$$

Для анизотропной пластины, свойства которой по толщине не меняются,

$$\int z [D] dz = 0; \quad \int z^2 [D] dz = [D_b] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.115)$$

Коэффициенты $D_{13} = D_{23} = 0$, когда оси x и y совпадают с осями симметрии упругих свойств (ортоотропный материал). Для пластины из изотропного материала

$$D_{11} = D_{22} = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}; \quad D_{12} = D_{21} = \mu \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}; \quad D_{33} = \frac{Eh^3}{24(1+\mu)}.$$

Используя общее соотношение (3.89) для матрицы жесткости конечного элемента и учитывая вышеприведенные соотношения, матрицу жесткости пластины представляем в виде

$$[K] = \iint [B]^T [D_b] [B] dx dy, \quad (3.116)$$

или, развернув матричную запись и имея в виду выражения (3.114) и (3.115), получим

$$\begin{aligned} [K] = \iint & \left(D_{11} \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \right. \\ & + 4D_{33} \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + D_{12} \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \\ & + 2D_{13} \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + 2D_{13} \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2D_{23} \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \\ & \left. + 2D_{23} \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Отсюда по известной матрице-строке $[\Phi]$ из формулы (3.113) и по имеющимся характеристикам изгибной жесткости пластины находят матрицу жесткости конечного элемента, имеющую размер 12×12 .

Для решения задачи необходимо знать еще вектор узловых сил. Из общей зависимости (3.90) для распределенной нагрузки p , нормальной к срединной поверхности, вектор $\{F\}$ определяется соотношением

$$\{F\} = \iint [\Phi]^T p dx dy.$$

Рассмотренный случай конечного элемента пластины соответствует минимальному числу степеней свободы. Как и для рассмотренной ранее плоской задачи, здесь можно построить элемент повышенной точности. Для этого нужно добавить количество узловых точек в элементе и в соответствии с этим повысить степень полинома, аппроксимирующего поле перемещений (3.111).

Глава 4

РАСЧЕТ КРУГОВЫХ КОЛЕЦ

Прежде чем перейти к изучению тонких упругих оболочек вращения, чему будет посвящена II часть данной книги, получим основные уравнения изгиба и рассмотрим некоторые методы расчета упругих круговых колец.

Изложенный в настоящей главе материал имеет большое практическое значение, поскольку упругое круговое кольцо является типичной расчетной схемой весьма распространенного элемента силовой конструкции ракет — шпангоута. Приводимые в главе уравнения могут быть использованы для расчета как изолированных шпангоутов, так и шпангоутов, подкрепляющих тонкую обшивку. Кроме того, задача изгиба кругового кольца имеет методическое значение: сравнительно простые уравнения равновесия элемента кольца и зависимости, связывающие перемещения и деформации, весьма полезны для облегчения понимания вывода уравнений теории оболочек вращения.

В общем случае нагружения кольцо испытывает изгиб в своей плоскости, кручение и изгиб из плоскости [7,20]. Однако для простоты изложения в главе рассмотрена только наиболее важная задача — изгиб кольца в своей плоскости.

§ 4.1. Уравнения изгиба кольца в своей плоскости

Чтобы получить общие уравнения изгиба кольца, используем гипотезы технической теории изгиба тонких стержней: гипотезу плоских сечений и гипотезу ненадавливания слоев. Эти гипотезы (см. § 1.5) применимы для расчета не только прямых стержней, но и стержней, у которых размеры поперечного сечения малы по сравнению с радиусом кривизны оси.

Рассмотрим круговое кольцо (рис. 4.1, а), нагруженное в своей плоскости переменными радиальными и касательными погонными силами $q_z = q_z(\varphi)$ и $q_y = q_y(\varphi)$ и распределенным моментом $m = m(\varphi)$. Если одна из главных осей поперечного сечения кольца лежит в плоскости кольца, то такое кольцо после деформирования останется плоским и в нем возникнут только изгибающие моменты $M = M(\varphi)$, нормальные $N = N(\varphi)$ и поперечные $Q = Q(\varphi)$ силы.

Уравнения равновесия элемента кольца составим в линейной постановке, не учитывая изменение его геометрии (рис. 4.1, б). Приравняв нулю сумму проекций всех приложенных к элементу сил на на-

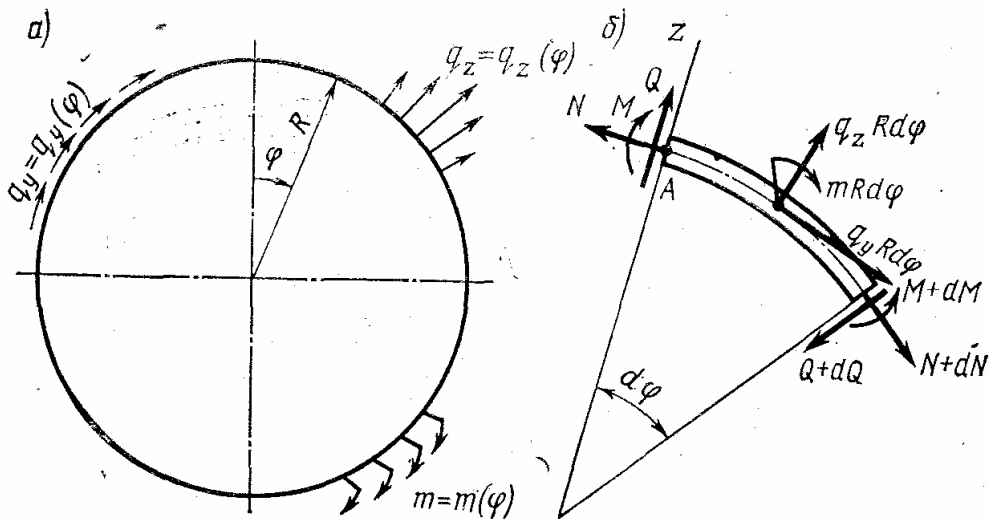


Рис. 4.1

правления касательной и нормали к оси кольца в точке A и сумму моментов, получим, отбросив слагаемые высших порядков малости, три уравнения

$$\begin{aligned} Q - \frac{dN}{d\varphi} &= Rq_y; \\ \frac{dQ}{d\varphi} + N &= Rq_z; \\ \frac{dM}{d\varphi} - QR &= Rm, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где R — радиус кривизны оси кольца.

Исключая из первых двух уравнений нормальную силу N , приходим к системе двух уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2Q}{d\varphi^2} + Q &= R \left(\frac{dq_z}{d\varphi} + q_y \right); \\ \frac{dM}{d\varphi} &= QR + Rm. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Исключая из этой системы уравнений поперечную силу Q , получаем дифференциальное уравнение относительно изгибающего момента:

$$\frac{d^3M}{d\varphi^3} + \frac{dM}{d\varphi} = R^2 \left(\frac{dq_z}{d\varphi} + q_y \right) + R \left(\frac{d^2m}{d\varphi^2} + m \right). \quad (4.3)$$

Теперь рассмотрим изменение геометрии кольца, связанное с его изгибом (рис. 4.2). Материальное волокно AB , совпадающее с элементом оси кольца, в результате изгиба кольца займет положение A_1B_1 . Радиальные и касательные перемещения точки A этого волокна обозначим соответственно через w и v , а угол поворота касательной в этой точке — через ψ . Введем подвижную ортогональную систему координат, направив ось y по касательной к оси кольца в точке A , а ось

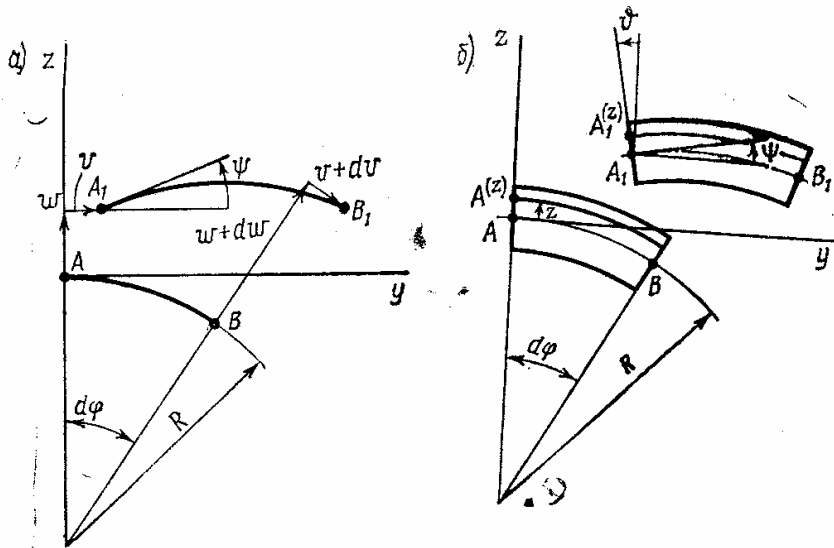


Рис. 4.2

z — по нормали к оси кольца в этой точке (рис. 4.2, а). В такой системе точки A ; B ; A_1 ; B_1 имеют (с точностью до величин высших порядков малости) следующие координаты:

	A	B	A_1	B_1
y . . .	0	$Rd\varphi$	v	$Rd\varphi + v + dv + w d\varphi$
z . . .	0	0	w	$w + dw - v d\varphi$

Используя формулу разложения $\sqrt{1 + \alpha} = 1 + \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{8} \alpha^2 \dots$, подсчитаем длину элемента $A_1 B_1$:

$$\begin{aligned}
 A_1 B_1 &= \sqrt{(y_{B_1} - y_{A_1})^2 + (z_{B_1} - z_{A_1})^2} = \\
 &= Rd\varphi \sqrt{\left[1 + \frac{1}{R} \left(w + \frac{dv}{d\varphi}\right)\right]^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{dw}{d\varphi} - v\right)^2} = \\
 &= Rd\varphi \left[1 + \frac{1}{R} \left(w + \frac{dv}{d\varphi}\right) + \frac{1}{2} \frac{1}{R^2} \left(\frac{dw}{d\varphi} - v\right)^2 + \dots\right],
 \end{aligned}$$

где y_{A_1} , y_{B_1} , z_{A_1} , z_{B_1} — координаты соответствующих точек.

Поскольку $AB = Rd\varphi$, то удлинение элемента AB

$$\varepsilon = \frac{A_1 B_1 - AB}{AB} = \frac{A_1 B_1}{AB} - 1 = \frac{1}{R} \left(w + \frac{dv}{d\varphi}\right) + \frac{1}{2} \frac{1}{R^2} \left(\frac{dw}{d\varphi} - v\right)^2 + \dots$$

Ограничившись слагаемыми, линейными относительно перемещений, получим

$$\varepsilon = \frac{1}{R} \left(w + \frac{dv}{d\varphi}\right). \quad (4.4)$$

Для определения угла поворота ψ касательной подсчитаем проекцию элемента $A_1 B_1$ на ось z . При малых ε и ψ , пренебрегая величинами высших порядков малости, имеем: $A_1 B_1 \sin \psi = R\psi d\varphi$. В то же вре-

мя эта проекция равна разности соответствующих координат точек B_1 и A_1 , т. е. $(z_{B_1} - z_{A_1}) = d\omega - v d\varphi$. Сравнивая два последних выражения, находим

$$\psi = \frac{1}{R} \left(\frac{d\omega}{d\varphi} - v \right). \quad (4.5)$$

До деформации кривизна оси кольца была равна $1/R$. Изменение кривизны оси кольца, связанное с изгибом, обозначим κ ; по определению величина κ равна скорости изменения угла поворота касательной по дуге деформированного кольца:

$$\kappa = \frac{d\psi}{ds_1}, \quad (4.6)$$

где $ds_1 = R d\varphi (1 + \varepsilon)$ — элемент деформированной оси кольца.

Обычно при подсчете изменения кривизны κ можно пренебречь растяжением оси кольца, т. е. положить $\varepsilon \approx 0$, откуда $\omega \approx -\frac{dv}{d\varphi}$. Тогда величину κ можно подсчитать по любой из следующих формул:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{R^2} \left(\frac{d^2\omega}{d\varphi^2} - \frac{dv}{d\varphi} \right); \\ \kappa &= \frac{1}{R^2} \left(\frac{d^2\omega}{d\varphi^2} + \omega \right); \\ \kappa &= -\frac{1}{R^2} \left(\frac{d^2v}{d\varphi^2} + \frac{dv}{d\varphi} \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Найдем удлинение в слое кольца, отстоящем на расстоянии z от оси (рис. 4.2, б). Гипотеза плоских сечений позволяет установить кинематическую связь между перемещениями v и ω точки A оси кольца и перемещениями $v^{(z)}$ и $\omega^{(z)}$ точки $A^{(z)}$ рассматриваемого слоя. В силу этой гипотезы угол поворота ϑ нормали равен углу поворота ψ касательной:

$$\vartheta = \psi = \frac{1}{R} \left(\frac{d\omega}{d\varphi} - v \right). \quad (4.8)$$

В силу той же гипотезы перемещения точки $A^{(z)}$

$$\begin{aligned} \omega^{(z)} &= \omega; \\ v^{(z)} &= v - z\vartheta. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Для определения деформации $\varepsilon^{(z)}$ рассматриваемого слоя достаточно в формуле (4.4) заменить перемещение v перемещением $v^{(z)}$ и радиус R радиусом $R^{(z)} = R + z$. В результате получаем

$$\varepsilon^{(z)} = \frac{1}{R(1+z/R)} \left(\omega + \frac{dv}{d\varphi} - z \frac{d\vartheta}{d\varphi} \right).$$

Отсюда, учитывая формулы (4.4), (4.6) и (4.8) и считая для тонких колец $z \ll R$, приходим к формуле

$$\varepsilon^{(z)} = \varepsilon - z\kappa. \quad (4.10)$$

Заметим, что входящую сюда величину κ можно подсчитывать по любой из формул (4.7).

Перейдем к определению соотношений, связывающих внутренние силы в кольце с его перемещениями. По гипотезе о ненадавливании слоев напряженное состояние в кольце можно считать одноосным. Тогда нормальные напряжения будут связаны с удлинениями простейшей формулой закона Гука $\sigma^{(z)} = E\varepsilon^{(z)}$, где E — модуль упругости материала кольца, а $\varepsilon^{(z)}$ подсчитано по формуле (4.10).

Нормальная сила в поперечном сечении кольца

$$N = \int_S \sigma^{(z)} dS = ES\varepsilon, \quad (4.11)$$

где S — площадь поперечного сечения. Изгибающий момент определяется выражением

$$M = - \int_S \sigma^{(z)} z dS = EJ\kappa, \quad (4.12)$$

где J — момент инерции поперечного сечения. Здесь знак момента выбран так, что положительное направление момента соответствует положительному значению величин $d^2w/d\varphi^2$ и w .

Внутреннюю поперечную силу Q нельзя выразить через перемещения непосредственно с помощью закона Гука, поскольку в силу гипотезы плоских сечений угол сдвига $\gamma_{zy} = 0$. Аналогично, если при решении задачи используется дополнительное допущение о нерастяжимости оси кольца, то для определения внутренней нормальной силы N нельзя использовать формулу (4.11).

При дополнительном допущении $\varepsilon = 0$ из формулы (4.4) следует зависимость

$$w = - \frac{dv}{d\varphi}, \quad (4.13)$$

При постоянной изгибной жесткости кольца ($EJ = \text{const}$), используя формулы (4.7) и (4.12), уравнению (4.3) можно придать такой вид

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{d^4v}{d\varphi^4} + 2 \frac{d^2v}{d\varphi^2} + v \right) = - \frac{R^3}{EJ} \left[R \left(\frac{dq_z}{d\varphi} + q_y \right) + \frac{d^2m}{d\varphi^2} + m \right]. \quad (4.14)$$

Составим выражение полной потенциальной энергии кольца с нерастяжимой осью. Энергию изгиба кольца подсчитывают так же, как энергию изгиба прямого стержня (см. с. 27):

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} EJ\kappa^2 R d\varphi. \quad (4.15)$$

Потенциал внешних сил кольца, нагруженного, как показано на рис. 4.1, а, очевидно, равен

$$\Pi = - \int_0^{2\pi} (q_y v + q_z w - m\vartheta) R d\varphi. \quad (4.16)$$

Заметим, что знак величины $m\vartheta$ отличается от остальных, поскольку положительные направления угла ϑ и распределенного момента m не совпадают.

Используя выражение (4.13), справедливое для кольца с нерастяжимой осью, можно все слагаемые полной потенциальной энергии выразить через касательное перемещение v :

$$\mathcal{E} = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \frac{EJ}{R^3} \left(\frac{d^3v}{d\varphi^3} + \frac{dv}{d\varphi} \right)^2 - R \left(q_y v - q_z \frac{dv}{d\varphi} \right) - m \left(\frac{d^2v}{d\varphi^2} + v \right) \right] R d\varphi. \quad (4.17)$$

Условие стационарности полной потенциальной энергии $\delta\mathcal{E} = 0$ приводит к дифференциальному уравнению изгиба кольца: как легко проверить, уравнение (4.14) является уравнением Эйлера (см. Приложение I) функционала полной потенциальной энергии (4.17). Кроме того, условие $\delta\mathcal{E} = 0$ можно использовать для построения приближенных решений задач изгиба кольца.

§ 4.2. Определение внутренних сил и моментов в замкнутом кольце

Предположим, что все действующие на замкнутое кольцо (рис. 4.3, а) внешние силы и реакции опор заданы или могут быть найдены из уравнений статики. Нагруженное в своей плоскости замкнутое кольцо в общем случае три раза статически неопределимо. Для раскрытия статической неопределимости воспользуемся методом сил.

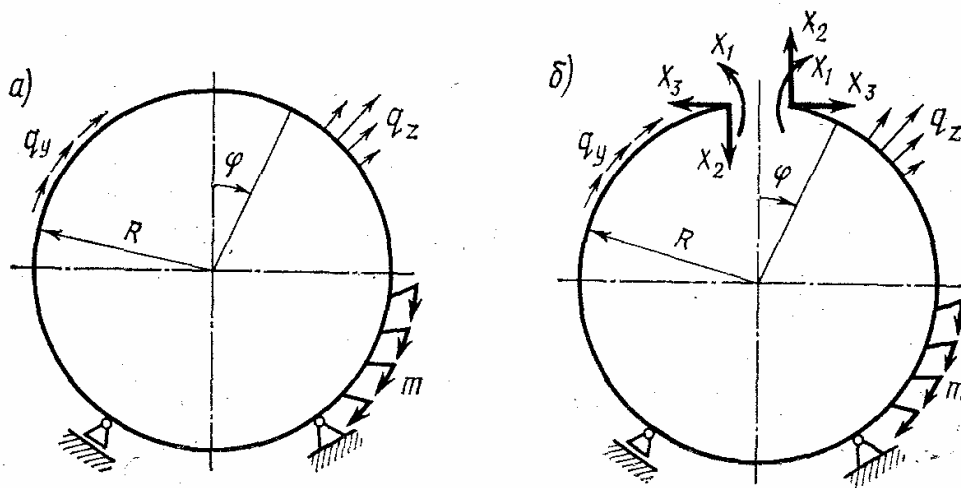


Рис. 4.3

Чтобы составить канонические уравнения метода сил, разрежем кольцо в сечении $\varphi = 0$ и приложим неизвестные силы X_1 , X_2 , X_3 (рис. 4.3, б). Изгибающие моменты от единичных сил и единичного момента, соответствующих неизвестным X_1 , X_2 , X_3 , равны

$$M_1 = 1; M_2 = 1 \cdot R \sin \varphi; M_3 = 1 \cdot R (1 - \cos \varphi). \quad (4.18)$$

Обозначим через M_F изгибающий момент в основной системе от заданных внешних нагрузок и, пренебрегая деформациями кольца от растяжения и сдвига (по сравнению с деформациями от изгиба), получим систему канонических уравнений

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{1F} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{2F} &= 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{3F} &= 0, \end{aligned} \quad (4.19)$$

где

$$\delta_{ji} = \delta_{ij} = \int_0^{2\pi} \frac{M_j M_i}{EJ} R d\varphi; \quad (4.20)$$

$$\delta_{iF} = \int_0^{2\pi} \frac{M_i M_F}{EJ} R d\varphi;$$

$EJ = EJ(\varphi)$ — жесткость кольца на изгиб в его плоскости. Определив из системы (4.19) неизвестные X_1 ; X_2 ; X_3 , находим изгибающий момент $M = M(\varphi)$, действующий в сечениях замкнутого кольца:

$$M = X_1 + X_2 R \sin \varphi + X_3 R (1 - \cos \varphi) + M_F. \quad (4.21)$$

Сопоставляя систему канонических уравнений (4.19) и выражение (4.21), можно получить три важных интегральных условия, каким должен удовлетворять закон изменения изгибающего момента $M = M(\varphi)$ в замкнутом круговом кольце:

$$\int_0^{2\pi} \frac{M}{EJ} d\varphi = 0; \quad \int_0^{2\pi} \frac{M \sin \varphi}{EJ} d\varphi = 0; \quad \int_0^{2\pi} \frac{M \cos \varphi}{EJ} d\varphi = 0. \quad (4.22)$$

Геометрический смысл этих условий тот же самый, что и геометрический смысл трех канонических уравнений: *отсутствие в разрезанном замкнутом кольце взаимных смещений по направлениям силовых факторов X_1 , X_2 , X_3* . Другими словами, выполнение интегральных условий (4.22) обеспечивает в замкнутом кольце выполнение равенств

$$\psi(0) = \psi(2\pi); \quad \omega(0) = \omega(2\pi); \quad v(0) = v(2\pi). \quad (4.22')$$

Нормальные и поперечные силы можно найти по формулам

$$\begin{aligned} N &= -X_3 \cos \varphi + X_2 \sin \varphi + N_F; \\ Q &= X_2 \cos \varphi + X_3 \sin \varphi + Q_F, \end{aligned} \quad (4.23)$$

где $N_F = N_F(\varphi)$ и $Q_F = Q_F(\varphi)$ — нормальные и поперечные силы от внешних сил в основной системе.

Определим, например, с помощью метода сил внутренние силовые факторы в замкнутом круговом шпангоуте постоянной изгибной жесткости EJ , нагруженном сосредоточенным моментом M_0 . Шпангоут связан с тонкой обшивкой и внешний момент M уравновешивает-

ся касательными распределенными силами q_y , передаваемыми обшивкой на шпангоут. Будем считать, что изгибная жесткость шпангоута настолько велика, что влиянием его деформаций на распределение касательных сил q_y можно пренебречь; тогда $q_y = \text{const}$ и из условия равновесия всего шпангоута, пренебрегая высотой шпангоута по сравнению с его радиусом, находим

$$q_y = -\frac{M_0}{2\pi R^2}. \quad (4.24)$$

Выберем основную систему, как показано на рис. 4.4, а. У симметричных систем при кососимметричной внешней нагрузке симметричные силовые факторы в плоскости симметрии обращаются в нуль. Поэтому в рассматриваемой задаче $X_1=0$;

$X_3 = 0$ и для нахождения X_2 остается одно уравнение

$$\delta_{22}X_2 + \delta_{2F} = 0.$$

Для подсчета изгибающего момента M_F введем вспомогательный угол α (рис. 4.4, а). Тогда

$$M_F = \frac{M_0}{2} - \int_0^\varphi q_y R (1 - \cos \alpha) R d\alpha = \frac{M_0}{2} \left[1 - \frac{1}{\pi} (\varphi - \sin \varphi) \right].$$

По формулам (4.20) находим

$$\delta_{22} = \int_0^{2\pi} \frac{R^3 \sin^2 \varphi}{EJ} d\varphi = \frac{\pi R^3}{EJ};$$

$$\delta_{2F} = \int_0^{2\pi} \frac{R^2 M_F \sin \varphi}{EJ} d\varphi = \frac{3}{2} \frac{M_0 R^2}{EJ}.$$

следовательно,

$$X_2 = -\frac{\delta_{2F}}{\delta_{22}} = -\frac{3}{2\pi} \frac{M_0}{R},$$

и по формулам (4.21) и (4.23) окончательно получаем:

$$M = \frac{M_0}{2} \left[1 - \frac{1}{\pi} (\varphi + 2 \sin \varphi) \right];$$

$$Q = -\frac{M_0}{2\pi R} (1 + 2 \cos \varphi); \quad (4.25)$$

$$N = -\frac{M}{\pi R} \sin \varphi.$$

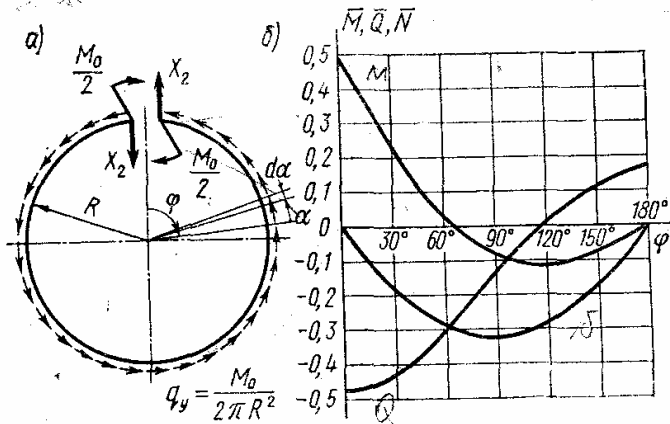


Рис. 4.4

На рис. 4.4, б изображен характер зависимости безразмерных величин $\bar{M} = M/M_0$; $\bar{Q} = QR/M_0$; $\bar{N} = NR/M_0$ от угла φ (благодаря симметрии задачи кривые приведены только от $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi$).

В некоторых задачах (например, когда внешние нагрузки изменяются непрерывно по всему кольцу) сравнительно простое решение удается получить интегрированием дифференциальных уравнений равновесия (4.2). Из первого уравнения находим

$$Q = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi + Q^*, \quad (4.26)$$

где $Q^* = Q^*(\varphi)$ — частное решение этого уравнения. Из второго уравнения получаем

$$M = RC_1 \sin \varphi - RC_2 \cos \varphi + C_3 + R \int (Q^* + m) d\varphi. \quad (4.27)$$

Три произвольные постоянные C_i можно определить из интегральных условий (4.22). Закон изменения нормальной силы $N = N(\varphi)$ находим из второго уравнения системы (4.1):

$$N = C_1 \sin \varphi - C_2 \cos \varphi - \frac{dQ^*}{d\varphi} + R q_z. \quad (4.28)$$

В качестве примера определения внутренних сил и моментов с помощью интегрирования уравнений равновесия рассмотрим следующую задачу: замкнутое кольцо постоянной изгибной жесткости EJ нагружено касательной сосредоточенной силой T (рис. 4.5, а). Силу T уравнивают распределенные касательные силы

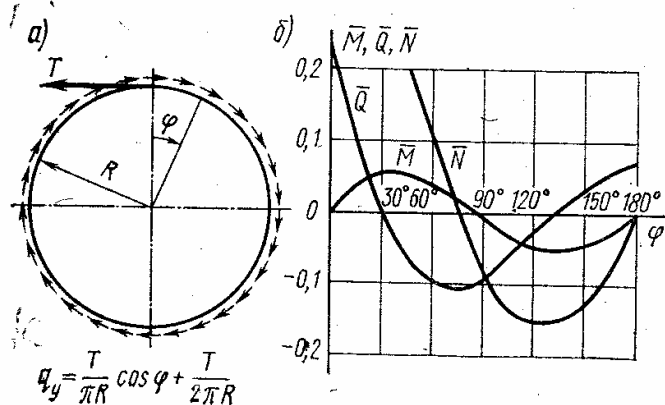


Рис. 4.5

$q_y = \frac{T}{\pi R} \cos \varphi + \frac{T}{2\pi R}$.

$$q_y = \frac{T}{\pi R} \cos \varphi + \frac{T}{2\pi R}. \quad (4.29)$$

Равнодействующая первого слагаемого в проекции на горизонтальную ось равна T , она уравнивает силу, а второе слагаемое уравнивает момент, создаваемый силой T относительно центра кольца. (Такие распределенные касательные силы возникают в шпангоуте, связанном с тонкой обшивкой, если жесткость шпангоута настолько велика, что влиянием его деформаций на распределение q_y можно пренебречь.)

Частное решение Q^* , входящее в выражение (4.26), можно найти подбором. В данной задаче можно взять

$$Q^* = \frac{T}{2\pi} (1 + \varphi \sin \varphi).$$

Тогда в соответствии с выражением (4.27)

$$M = RC_1 \sin \varphi - RC_2 \cos \varphi + C_3 + \frac{TR}{2\pi} (\varphi + \sin \varphi - \varphi \cos \varphi).$$

Из интегральных условий (4.22) находим

$$C_1 = T/(4\pi); C_2 = -T/2; C_3 = -TR/2.$$

Окончательно, используя зависимости (4.26) ... (4.28), получим:

$$M = \frac{TR}{2\pi} \left[(\pi - \varphi) (\cos \varphi - 1) + \frac{3}{2} \sin \varphi \right];$$

$$Q = \frac{T}{2\pi} \left[1 + \frac{1}{2} \cos \varphi - (\pi - \varphi) \sin \varphi \right];$$

$$N = \frac{T}{2\pi} \left[(\pi - \varphi) \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \right].$$

График изменения безразмерных величин $\bar{M} = M/(TR)$, $\bar{Q} = Q/T$ и $\bar{N} = N/T$ дан на рис. 4.5, б.

Следует отметить, что изложенные выше два способа определения внутренних сил и моментов в замкнутом кольце применимы для колец переменной жесткости. В этих случаях нужно просто учесть заданный закон изменения жесткости $EJ(\varphi)$ в формулах (4.20) или в интегральных условиях (4.22), причем при сложном законе изменения $EJ(\varphi)$ соответствующие интегралы можно подсчитать численно.

При расчете колец *постоянной изгибной жесткости*, изменив обозначения неизвестных X_i , можно выражение (4.21) записать в таком виде:

$$M = M_F + X'_1 + X'_2 \sin \varphi + X'_3 \cos \varphi, \quad (4.30)$$

где $X'_1 = X_1 + RX_3$; $X'_2 = X_2 R$; $X'_3 = -X_3 R$.

Учитывая равенства

$$\int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0; \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \pi; \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0; \quad (4.31)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \pi; \int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = 0; \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi,$$

при постоянной жесткости кольца из трех интегральных условий (4.22) сразу находим

$$X'_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M_F d\varphi; \quad X'_2 = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} M_F \sin \varphi d\varphi; \quad (4.32)$$

$$X'_3 = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} M_F \cos \varphi d\varphi.$$

Из выражения (4.30) получаем окончательную зависимость для изгибающего момента $M = M(\varphi)$ в замкнутом кольце постоянной жесткости:

$$M = M_F - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M_F d\varphi - \frac{\sin \varphi}{\pi} \int_0^{2\pi} M_F \sin \varphi d\varphi - \frac{\cos \varphi}{\pi} \int_0^{2\pi} M_F \cos \varphi d\varphi. \quad (4.33)$$

Учитывая, что $X'_2 = RX_2$ и $X'_3 = -RX_3$, из выражений (4.23) получаем окончательные зависимости для поперечных и нормальных сил:

$$Q = Q_F - \frac{\cos \varphi}{\pi R} \int_0^{2\pi} M_F \sin \varphi d\varphi + \frac{\sin \varphi}{\pi R} \int_0^{2\pi} M_F \cos \varphi d\varphi; \quad (4.34)$$

$$N = N_F - \frac{\sin \varphi}{\pi R} \int_0^{2\pi} M_F \sin \varphi d\varphi - \frac{\cos \varphi}{\pi R} \int_0^{2\pi} M_F \cos \varphi d\varphi.$$

При выводе зависимостей (4.33) и (4.34) в качестве основной статически определимой системы использовалось кольцо, полностью разрезанное в одном сечении; входящие в эти зависимости функции $M_F = M_F(\varphi)$, $Q_F = Q_F(\varphi)$, $N_F = N_F(\varphi)$ — соответствующие внутренние силовые факторы, создаваемые внешней нагрузкой. Полученный результат можно трактовать так [5]: изгибающий момент в замкнутом и произвольно нагруженном в своей плоскости круговом кольце равен моменту $M_F(\varphi)$ от внешних сил за вычетом трех первых членов разложения $M_F(\varphi)$ в ряд Фурье по окружной координате, причем выражение (4.33)

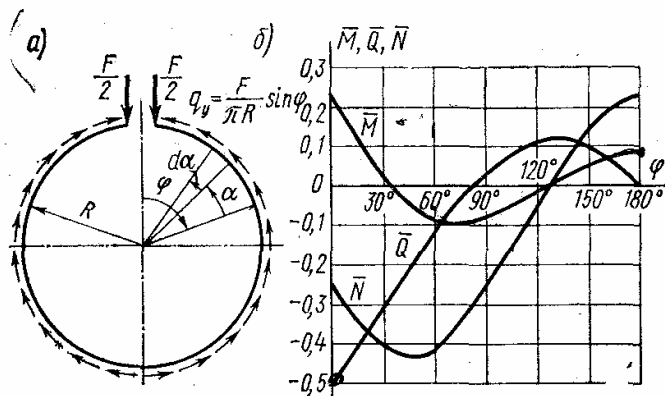


Рис. 4.6

инвариантно по отношению к выбору основной системы. Аналогично можно трактовать и выражения (4.34). В качестве примера определим внутренние силовые факторы в замкнутом кольце постоянной изгибной жесткости EJ (рис. 4.6, а), нагруженном сосредоточенной силой F , уравновешенной касательными распределенными силами:

$$q_y = -\frac{F}{\pi R} \sin \varphi. \quad (4.35)$$

(Такие касательные распределенные силы уравновешивают сосредоточенную силу в жестком шпангоуте, связанном с тонкой обшивкой.)

Выберем основную систему, разрезав кольцо по сечению $\varphi = 0$ (рис. 4.6, а). Как и в примере на рис. 4.4, для подсчета внутреннего изгибающего момента M_F в разрезанном кольце введем вспомогательный угол α . Тогда

$$\begin{aligned} M_F &= -\frac{FR}{2} \sin \varphi - \int_0^\varphi q_y (1 - \cos \alpha) R^2 d\alpha = -\frac{FR}{2} \sin \varphi - \\ &\quad - \frac{FR}{\pi} \int_0^\varphi \sin(\varphi - \alpha) (1 - \cos \alpha) d\alpha = \\ &= -\frac{FR}{2} \left[\sin \varphi + \frac{2}{\pi} (1 - \cos \varphi) - \frac{1}{\pi} \varphi \sin \varphi \right]. \end{aligned}$$

Из зависимостей (4.32) ... (4.34) после интегрирования получаем:

$$M = \frac{FR}{2\pi} \left(1 + \frac{1}{2} \cos \varphi - \pi \sin \varphi + \varphi \sin \varphi \right);$$

$$Q = \frac{F}{2\pi} \left(\frac{1}{2} \sin \varphi - \pi \cos \varphi + \varphi \cos \varphi \right);$$

$$N = -\frac{F}{2\pi} \left(\frac{3}{2} \cos \varphi + \pi \sin \varphi - \varphi \sin \varphi \right).$$

На рис. 4.6, б приведено изменение безразмерных величин, где $\bar{M} = M/(FR)$, $\bar{Q} = Q/F$, $\bar{N} = N/F$.

Заметим, что выбор места разреза в замкнутом кольце совершенно произволен и, конечно, никак не отражается на окончательном результате. Так, в рассмотренном примере разрез был произведен по силе F , и в основной системе на каждом из краев разрезанного кольца действовали силы $F/2$. Можно поступить иначе, разрезав кольцо, например, чуть правее точки приложения силы F . Это приведет к изменению функции $M_F = M_F(\varphi)$, и вместо найденного выше выражения получим

$$M_F = -\frac{FR}{\pi} \left[(1 - \cos \varphi) - \frac{1}{2} \varphi \sin \varphi \right].$$

Но окончательные зависимости для величин M , Q и N остаются теми же самыми.

При решении методом сил основную систему целесообразно выбирать таким образом, чтобы максимально использовать свойства симметрии исходной задачи. При решении задач изгиба колец постоянной изгибной жесткости изложенным методом свойства симметрии существенной роли не играют и основную систему следует выбирать так, чтобы по возможности упростить функцию $M_F(\varphi)$. С этой точки зрения вторая основная система в рассмотренном примере предпочтительнее, поскольку она приводит к более простому виду функции $M_F(\varphi)$.

§ 4.3. Определение перемещений

Рассмотрим сначала перемещения кругового кольца в своей плоскости как жесткого целого. Если кольцо (рис. 4.7, а) сместить относительно неподвижной системы координат y_1z_1 на расстояние d по направлению оси y_1 , то перемещения v и w точек его оси и угол поворота ϑ нормали соответственно будут:

$$v = d \cos \varphi; \quad w = d \sin \varphi; \quad \vartheta = 0.$$

Аналогично, смещение по направлению оси z_1 на расстояние b даст

$$v = -b \sin \varphi; \quad w = b \cos \varphi; \quad \vartheta = 0.$$

Поворот кольца относительно неподвижной системы координат на угол β (рис. 4.7, б) дает

$$v = R \sin \beta; \quad w = -R (1 - \cos \beta); \quad \vartheta = -\beta.$$

При малых углах β , оставляя в разложениях функций $\sin \beta$ и $\cos \beta$ первые степени β , можно записать

$$v = R\beta; \quad w = 0; \quad \vartheta = -\beta.$$

Поэтому перемещение кольца как жесткого целого в своей плоскости в общем случае описывается формулами

$$v = a_0 + a_1 \cos \varphi + a_2 \sin \varphi; \quad (4.36)$$

$$w = a_1 \sin \varphi - a_2 \cos \varphi; \quad (4.37)$$

$$\vartheta = -a_0/R, \quad (4.38)$$

где a_0, a_1, a_2 — произвольные постоянные.

При этом удлинение ε оси кольца, определяемое зависимостью (4.4), и изменение кривизны κ , определяемое любой из зависимостей (4.7), тождественно равны нулю.

Перейдем к определению перемещений, связанных с изгибом кольца в своей плоскости, пренебрегая при этом растяжением его оси. В тех случаях, когда статическая неопределимость замкнутого кольца уже раскрыта и изгибающий момент $M = M(\varphi)$, удовлетворяющий интегральным условиям (4.22), найден, перемещения $v = v(\varphi)$ и $w =$

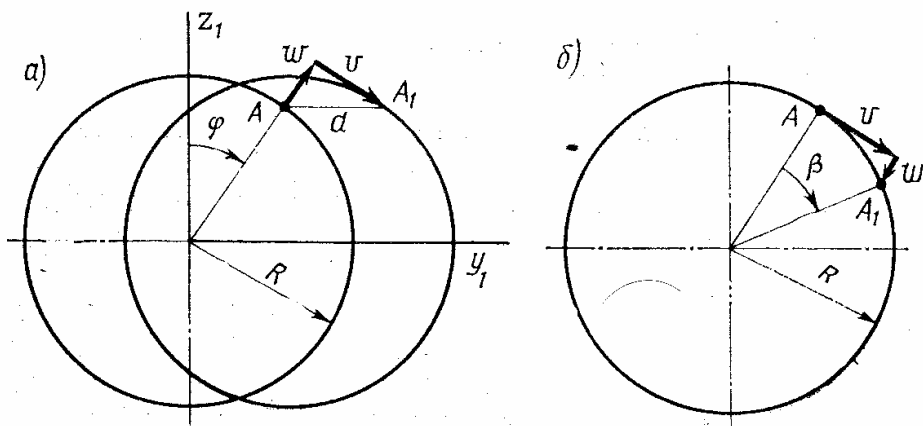


Рис. 4.7

$= \omega(\varphi)$, а также угол поворота $\vartheta = \vartheta(\varphi)$ нормали можно найти из системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^3v}{d\varphi^3} + \frac{dv}{d\varphi} &= -\frac{R^2}{EJ} M; \\ \omega &= -\frac{dv}{d\varphi}; \\ \vartheta &= -\frac{1}{R} \left(\frac{d^2v}{d\varphi^2} + v \right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Эта система следует из выражений (4.8), (4.12) и условия нерастяжимости оси кольца (4.13).

Решение первого уравнения запишем в виде суммы частного решения $v^* = v^*(\varphi)$ и решения однородного уравнения:

$$v = v^* + C_0 + C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi, \quad (4.40)$$

где C_i — произвольные постоянные.

Из двух оставшихся уравнений (4.39) находим

$$\omega = -\frac{dv^*}{d\varphi} + C_1 \sin \varphi - C_2 \cos \varphi \quad (4.41)$$

и

$$\vartheta = -\frac{1}{R} \left(\frac{d^2v^*}{d\varphi^2} + v^* \right) - \frac{C_0}{R}. \quad (4.42)$$

Произвольные постоянные C_i найти из условий замкнутости кольца нельзя: решение однородного уравнения $v^{(0)} = C_0 + C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi$ тождественно удовлетворяет условиям (4.22') при любых C_i . Заметим, кроме того, что условия замкнутости, использованные при раскрытии статической неопределенности, использовать снова было бы незаконным.

Когда закрепление кольца полностью исключает его перемещение как жесткого целого, могут быть найдены все произвольные постоянные C_i и однозначно определены все функции $v = v(\varphi)$, $\omega = \omega(\varphi)$ и $\vartheta = \vartheta(\varphi)$. Если же кольцо не закреплено относительно перемещения в своей плоскости, то значения величин v , ω и ϑ можно определить только с точностью до произвольного смещения кольца как жесткого целого. Обычно наибольший практический интерес представляют перемещения v , ω и угол ϑ поворота нормали, непосредственно вызванные изгибом кольца, а не перемещением его как жесткого целого. Выделить такие функции v , ω и ϑ можно, потребовав, чтобы функция (4.40) была ортогональна функции (4.36), описывающей касательные перемещения кольца при произвольном его смещении как жесткого целого, т. е. потребовав, чтобы при произвольных a_0, a_1, a_2 выполнялось условие

$$\int_0^{2\pi} (v^* + C_0 + C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi) (a_0 + a_1 \cos \varphi + a_2 \sin \varphi) d\varphi = 0. \quad (4.43)$$

Учитывая равенства (4.31), условие ортогональности можно записать так:

$$a_0 \left[\int_0^{2\pi} v^* d\varphi + 2\pi C_0 \right] + a_1 \left[\int_0^{2\pi} v^* \cos \varphi d\varphi + \pi C_1 \right] + a_2 \left[\int_0^{2\pi} v^* \sin \varphi d\varphi + \pi C_2 \right] = 0. \quad (4.44)$$

Для того чтобы последнее равенство выполнялось при любых a_0, a_1, a_2 , должны обращаться в нуль выражения, стоящие в квадратных скобках. Следовательно, произвольные постоянные определяются формулами

$$C_0 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^* d\varphi; \quad C_1 = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v^* \cos \varphi d\varphi;$$

$$C_2 = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v^* \sin \varphi d\varphi.$$

Подставив значения произвольных постоянных C_i в выражения (4.40) ... (4.42), получим окончательные расчетные зависимости:

$$v = v^* - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^* d\varphi - \frac{\cos \varphi}{\pi} \int_0^{2\pi} v^* \cos \varphi d\varphi - \frac{\sin \varphi}{\pi} \int_0^{2\pi} v^* \sin \varphi d\varphi; \quad (4.45)$$

$$\omega = -\frac{dv^*}{d\varphi} - \frac{\sin \varphi}{\pi} \int_0^{2\pi} v^* \cos \varphi d\varphi + \frac{\cos \varphi}{\pi} \int_0^{2\pi} v^* \sin \varphi d\varphi; \quad (4.46)$$

$$\vartheta = -\frac{1}{R} \left(\frac{d^2 v^*}{d\varphi^2} + v^* \right) + \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} v^* d\varphi. \quad (4.47)$$

Отметим, что условие ортогональности (4.43) можно трактовать как три независимых интегральных условия, которым должна удовлетворять функция $v = v(\varphi)$, описывающая перемещения, непосредственно связанные с изгибом нерастяжимого кольца:

$$\int_0^{2\pi} v d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} v \cos \varphi d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} v \sin \varphi d\varphi = 0. \quad (4.48)$$

Следствием этих интегральных условий (но не новыми независимыми условиями) являются еще четыре интегральных условия

$$\int_0^{2\pi} \omega d\varphi = 0; \quad \int_0^{2\pi} \omega \cos \varphi d\varphi = 0; \quad \int_0^{2\pi} \omega \sin \varphi d\varphi = 0; \quad \int_0^{2\pi} \vartheta d\varphi = 0. \quad (4.49)$$

Эти интегральные условия можно использовать для проверки правильности найденных функций $v = v(\varphi)$; $\omega = \omega(\varphi)$; $\vartheta = \vartheta(\varphi)$.

Найдем по изложенной схеме перемещения v , w и угол поворота ϑ нормали в кольце постоянной жесткости, изображенном на рис. 4.4. Учитывая зависимость (4.25) для изгибающего момента M , запишем первое уравнение системы (4.39) в следующем безразмерном виде:

$$\frac{d^3 \bar{v}}{d\varphi^3} + \frac{d\bar{v}}{d\varphi} = -\frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{\pi} (\varphi + 2 \sin \varphi) \right], \quad (4.50)$$

где $v = vEJ/(M_0R^2)$.

Подбором находим частное решение

$$\bar{v}^* = -\frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{4\pi} \varphi^2 - \frac{1}{2} \frac{\varphi}{\pi} \sin \varphi.$$

Зная частное решение, подсчитываем определенные интегралы:

$$\int_0^{2\pi} \bar{v}^* d\varphi = -\frac{1}{2} \frac{(2\pi)^2}{2} + \frac{1}{4\pi} \frac{(2\pi)^3}{3} - \frac{1}{2\pi} (-2\pi) = -\frac{\pi^2}{3} + 1;$$

$$\int_0^{2\pi} \bar{v}^* \cos \varphi d\varphi = 0 + \frac{1}{4\pi} (4\pi) - \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \frac{5}{4};$$

$$\int_0^{2\pi} \bar{v}^* \sin \varphi d\varphi = -\frac{1}{2} (-2\pi) + \frac{1}{4\pi} (-4\pi^2) - \frac{1}{2\pi} (\pi^2) = -\frac{\pi}{2}$$

и по расчетным зависимостям (4.45) ... (4.47) получаем

$$\bar{v} = -\frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{4\pi} \varphi^2 - \frac{1}{2} \frac{\varphi}{\pi} \sin \varphi + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi^2}{3} - 1 \right) - \frac{5}{4} \frac{\cos \varphi}{\pi} + \frac{1}{2} \sin \varphi;$$

$$\bar{w} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \varphi - \frac{3}{4\pi} \sin \varphi + \frac{1}{2} \frac{\varphi}{\pi} \cos \varphi + \frac{1}{2} \cos \varphi;$$

$$\bar{\vartheta} = -\frac{\pi}{6} + \frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi^2}{4\pi} + \frac{1}{\pi} \cos \varphi,$$

где $\bar{w} = wEJ/(M_0R^2)$, $\bar{\vartheta} = \vartheta EJ/(M_0R)$.

На рис. 4.8, а изображены полученные результаты.

Аналогично можно найти значения v , w и ϑ для двух других рассмотренных в § 4.2 задач. Так, для шпангоута постоянной жесткости, изображенного на рис. 4.5, получим

$$\bar{v} = \frac{1}{2\pi} \left[1 - \frac{\pi^2}{3} + \pi\varphi - \frac{\varphi^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{23}{4} - \pi\varphi + \frac{\varphi^2}{2} \right) \cos \varphi - \right. \\ \left. - \frac{3}{2} (\pi - \varphi) \sin \varphi \right];$$

$$\bar{w} = \frac{1}{2\pi} \left[(\pi - \varphi) (\cos \varphi - 1) + \frac{1}{2} \left(\frac{11}{4} - \frac{\pi^2}{3} + \pi\varphi - \frac{\varphi^2}{2} \right) \sin \varphi \right];$$

$$\bar{\vartheta} = \frac{1}{2\pi} \left[-1 + \frac{\pi^2}{3} - \pi\varphi + \frac{\varphi^2}{2} - \frac{5}{2} \cos \varphi + (\pi - \varphi) \sin \varphi \right];$$

где $\bar{v} = vEJ/(TR^3)$; $\bar{w} = wEJ/(TR^3)$; $\bar{\vartheta} = \vartheta EJ/(TR^2)$. На рис. 4.8, б эти результаты изображены графически.

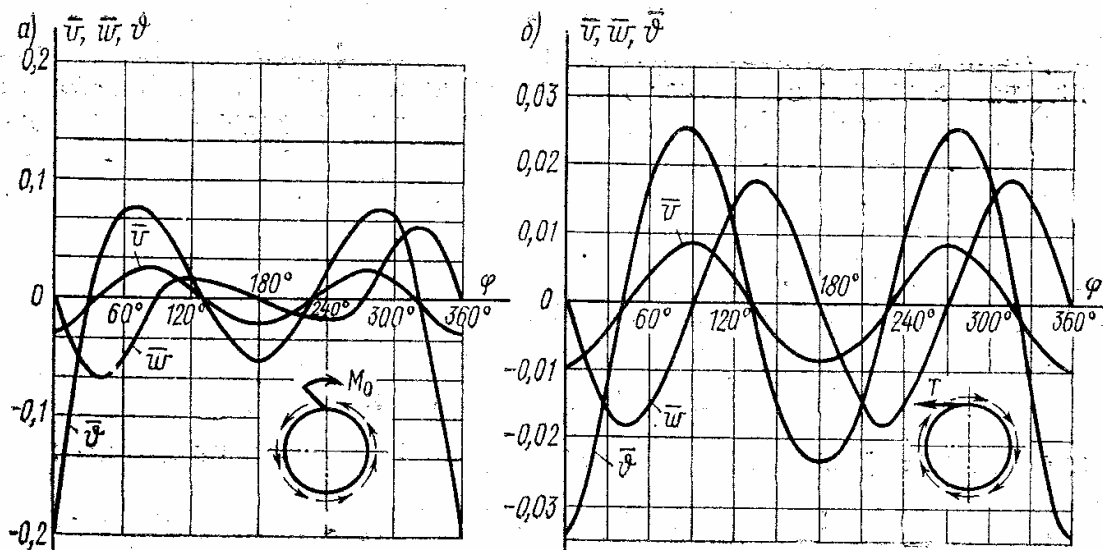


Рис. 4.8

В изложенной схеме расчета определению перемещений предшествует определение изгибающих моментов в кольце. Возможна и обратная схема, когда расчет начинают с определения перемещений, а затем подсчитывают изгибающие моменты. В этом случае решение начинается с интегрирования уравнения (4.14) изгиба кольца в перемещениях. Интеграл этого уравнения равен

$$v = v^* + C_0 + C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi + C_3 \varphi + C_4 \varphi \sin \varphi + C_5 \varphi \cos \varphi, \quad (4.51)$$

где v^* — частное решение; C_i — произвольные постоянные.

При известной правой части частное решение $v^* = v^*(\varphi)$ можно находить подбором. Шесть произвольных постоянных C_i можно найти из трех условий замкнутости кольца (4.22) и трех интегральных условий (4.48).

Определив функцию $v = v(\varphi)$, находим,

$$\omega = -\frac{dv}{d\varphi}; \quad (4.52)$$

$$\vartheta = -\frac{1}{R} \left(\frac{d^2v}{d\varphi^2} + v \right).$$

Изгибающий момент подсчитывают с помощью зависимости

$$M = -\frac{EJ}{R^2} \left(\frac{d^3v}{d\varphi^3} + \frac{dv}{d\varphi} \right). \quad (4.53)$$

Внутренние силы $Q = Q(\varphi)$ и $N = N(\varphi)$ определяют из уравнений равновесия (4.1):

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{R} \frac{dM}{d\varphi} - m; \\ N &= -\frac{dQ}{d\varphi} + Rq. \end{aligned} \quad (4.54)$$

§ 4.4. Расчет замкнутых колец с помощью тригонометрических рядов

Приближенные решения задач изгиба замкнутых круговых колец иногда бывает удобно строить в тригонометрических рядах. При этом можно исходить из дифференциального уравнения изгиба кольца или из условия стационарности его полной потенциальной энергии.

Прежде чем излагать схему решения, отметим, что для кругового кольца, нагруженного самоуравновешенной системой внешних сил (рис. 4.9), выполняются следующие условия:

$$\int_0^{2\pi} (q_z \cos \varphi - q_y \sin \varphi) R d\varphi + \sum_j F_j \cos \varphi_j - \sum_i T_i \sin \varphi_i = 0;$$

$$\int_0^{2\pi} (q_z \sin \varphi + q_y \cos \varphi) R d\varphi + \sum_j F_j \sin \varphi_j + \sum_i T_i \cos \varphi_i = 0; \quad (4.55)$$

$$\int_0^{2\pi} (q_y R + m) R d\varphi + \sum_i T_i R + \sum_k M_k = 0,$$

где φ_i , φ_j и φ_k — угловые координаты точек приложения сосредоточенных нормальных и касательных сил F_j , T_i и моментов M_k ; суммирование производится по всем приложенным к кольцу внешним силам и моментам. Первые два условия соответственно означают равенство нулю суммы проекций всех действующих на кольцо внешних сил на неподвижные оси z_1 и y_1 , а третье — равенство нулю суммы моментов относительно центра кольца.

В общем случае нагружения замкнутого кругового кольца функцию $v = v(\varphi)$ можно записать в виде ряда

$$v = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\varphi. \quad (4.56)$$

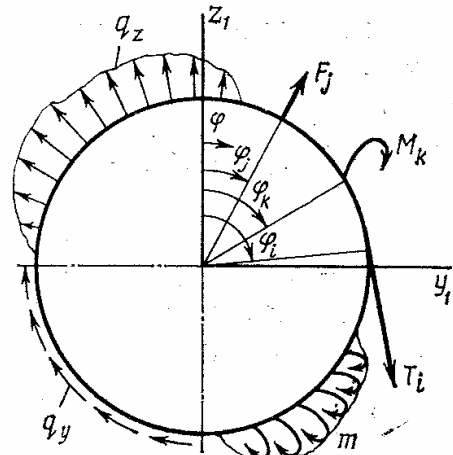


Рис. 4.9

Тогда для кольца с нерастяжимой осью по формулам (4.7), (4.8) и (4.13) находим

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \sin n\varphi - \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \cos n\varphi; \quad (4.57)$$

$$\vartheta = -a_0 \frac{1}{R} + \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 - 1) a_n \cos n\varphi + \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 - 1) b_n \sin n\varphi; \quad (4.58)$$

$$\kappa = -\frac{1}{R^2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n^2 - 1) a_n \sin n\varphi + \frac{1}{R^2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n^2 - 1) b_n \cos n\varphi. \quad (4.59)$$

Рассмотрим использование ряда (4.56) для решения задачи изгиба кольца методом Рэлея—Ритца (см. § 3.1). При решении этим методом координатные функции должны удовлетворять всем геометрическим граничным условиям задачи. Для замкнутого кольца геометрические граничные условия сводятся к условиям замкнутости (4.22'); как видно из выражений (4.56) ... (4.58), все эти три условия замкнутости кольца удовлетворяются при любых a_n и b_n .

Внутреннюю энергию изгиба кольца подсчитываем по формуле (4.15), используя при этом выражение (4.59):

$$U = \frac{1}{2R^3} \int_0^{2\pi} EJ \left[- \sum_{n=2}^{\infty} n(n^2-1) a_n \sin n\varphi + \sum_{n=2}^{\infty} n(n^2-1) b_n \cos n\varphi \right]^2 d\varphi. \quad (4.60)$$

Отметим, что для кольца постоянной изгибной жесткости в силу ортогональности тригонометрических функций

$$U = \frac{\pi EJ}{2R^3} \sum_{n=2}^{\infty} n^2(n^2-1)^2 (a_n^2 + b_n^2). \quad (4.61)$$

При подсчете потенциала внешних сил учтем сосредоточенные силы и моменты и вместо формулы (4.16) запишем

$$\Pi = - \int_0^{2\pi} (q_y v + q_z w - m \vartheta) R d\varphi - \sum_i T_i v_i - \sum_j F_j w_j + \sum_k M_k \vartheta_k, \quad (4.62)$$

где $v_i = v(\vartheta_i)$ и $w_j = w(\vartheta_j)$ — касательные и нормальные перемещения точек приложения сосредоточенных сил T_i и F_j ; $\vartheta_k = \vartheta(\varphi_k)$ — угол поворота нормали в точке приложения сосредоточенного момента M_k ; суммирование производится по всем приложенным к кольцу сосредоточенным силам и моментам.

Подставив в последнее выражение ряды (4.56) ... (4.58), получим

$$\begin{aligned} \Pi = & - \int_0^{2\pi} q_y (a_0 + a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi) R d\varphi - \\ & - \int_0^{2\pi} q_z (a_1 \sin \varphi + b_1 \cos \varphi) R d\varphi - \int_0^{2\pi} m a_0 d\varphi - \\ & - \sum_i T_i (a_0 + a_1 \cos \varphi_i + b_1 \sin \varphi_i) - \sum_j F_j (a_1 \sin \varphi_j - b_1 \cos \varphi_j) - \\ & - \sum_k M_k a_0 - \sum_n A_n a_n - \sum_n B_n b_n, \end{aligned}$$

где

$$A_n = \int_0^{2\pi} q_y \cos n\varphi R d\varphi + n \int_0^{2\pi} q_z \sin n\varphi R d\varphi + (n^2 - 1) \int_0^{2\pi} m \cos n\varphi d\varphi + \\ + \sum_i T_i \cos n\varphi_i + n \sum_j F_j \sin n\varphi_j - (n^2 - 1) \frac{1}{R} \sum_k M_k \cos n\varphi_k; \quad (4.63)$$

$$B_n = \int_0^{2\pi} q_y \sin n\varphi R d\varphi - n \int_0^{2\pi} q_z \cos n\varphi R d\varphi - (n^2 - 1) \int_0^{2\pi} m \sin n\varphi d\varphi + \\ + \sum_i T_i \sin n\varphi_i - n \sum_j F_j \cos n\varphi_j - (n^2 - 1) \frac{1}{R} \sum_k M_k \sin n\varphi_k.$$

В силу условий (4.55) самоуравновешенности внешних нагрузок суммы слагаемых, имеющих множителями b_1 , a_1 и a_0 , оказываются тождественно равными нулю и окончательно получаем

$$\Pi = - \sum_{n=2}^{\infty} A_n a_n - \sum_{n=2}^{\infty} B_n b_n. \quad (4.64)$$

Полная потенциальная энергия кольца $\mathcal{E} = U + \Pi$; условие ее стационарности $\delta\mathcal{E} = 0$, заменяемое согласно методу Рэлея—Ритца условиями

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial a_n} = 0; \quad \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial b_n} = 0, \quad (4.65)$$

дает систему линейных уравнений, позволяющую найти любое число постоянных a_n и b_n (при $n \geq 2$) для произвольно нагруженного кольца переменной изгибной жесткости $EJ = EJ(\varphi)$.

Для кольца постоянной изгибной жесткости, когда значение величины U определяется выражением (4.61), система уравнений (4.65) резко упрощается: получается цепочка независимых уравнений

$$\frac{\pi EJ}{R^3} n^2 (n^2 - 1)^2 a_n - A_n = 0; \\ \frac{\pi EJ}{R^3} n^2 (n^2 - 1)^2 b_n - B_n = 0.$$

Откуда сразу находим (для $n \geq 2$)

$$a_n = \frac{R^3}{\pi EJ} \frac{A_n}{n^2 (n^2 - 1)^2}; \\ b_n = \frac{R^3}{\pi EJ} \frac{B_n}{n^2 (n^2 - 1)^2}. \quad (4.66)$$

Постоянные a_0 , a_1 и b_1 остались ненайденными. Как отмечалось в предыдущем параграфе, эти постоянные связаны со смещениями кольца в своей плоскости как жесткого целого:

$$\begin{aligned} v &= a_0 + a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi; \\ \omega &= a_1 \sin \varphi - b_1 \cos \varphi; \\ \vartheta &= -a_0/R. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Функции $v = v(\varphi)$, $\omega = \omega(\varphi)$, $\vartheta = \vartheta(\varphi)$, определяющие только изгиб кольца, выражаются при постоянной изгибной жесткости $EJ = \text{const}$ рядами:

$$v = \frac{R^3}{\pi EJ} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_n \cos n\varphi}{n^2 (n^2-1)^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n \sin n\varphi}{n^2 (n^2-1)^2} \right]; \quad (4.68)$$

$$\omega = \frac{R^3}{\pi EJ} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_n \sin n\varphi}{n (n^2-1)^2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n \cos n\varphi}{n (n^2-1)^2} \right]; \quad (4.69)$$

$$\vartheta = \frac{R^2}{\pi EJ} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_n \cos n\varphi}{n^2 (n^2-1)} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n \sin n\varphi}{n^2 (n^2-1)} \right]. \quad (4.70)$$

Изгибающий момент $M = EJ\kappa$; поэтому, учитывая зависимости (4.59) и (4.66), находим

$$M = -\frac{R}{\pi} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_n \sin n\varphi}{n (n^2-1)} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n \cos n\varphi}{n (n^2-1)} \right]. \quad (4.71)$$

Действуя далее формально, из уравнений равновесия (4.1) можно получить выражения для поперечных и нормальных сил:

$$Q = \frac{1}{R} \frac{dM}{d\varphi} - m = -\frac{1}{\pi} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_n \cos n\varphi}{n^2-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n \sin n\varphi}{n^2-1} \right] - m; \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned} N = -\frac{dQ}{d\varphi} + Rq_z = & -\frac{1}{\pi} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{nA_n \sin n\varphi}{n^2-1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{nB_n \cos n\varphi}{n^2-1} \right] + \\ & + Rq_z + \frac{dm}{d\varphi}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Сходимость рядов, входящих в выражения (4.68) ... (4.73), оценим на конкретных примерах. Рассмотрим, например, шпангоут (см. рис. 4.4, а), нагруженный в сечении $\varphi_1 = 0$ сосредоточенным моментом $M_1 = M_0$, уравновешенным распределенной касательной силой $q_v = M_0/(2\pi R^2)$.

По формулам (4.63) находим

$$A_n = \frac{1}{R} (n^2-1) M_0; \quad B_n = 0$$

и из выражений (4.68) ... (4.70) получаем

$$v = \frac{R^2 M_0}{\pi E J} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n^2 (n^2 - 1)}; \quad w = \frac{R^2 M_0}{\pi E J} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n (n^2 - 1)};$$

$$\vartheta = \frac{R M_0}{\pi E J} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n^2}.$$

Эти ряды — сходящиеся, а поскольку исходная система координатных функций (4.56) полная, при $n \rightarrow \infty$ приходим к точному решению. Например, используя табличную сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

из полученного решения находим при $\varphi = 0$

$$\vartheta(0) = \frac{R^2 M_0}{\pi E J} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{R^2 M_0}{\pi E J} \left[\frac{\pi^2}{6} - 1 \right],$$

что совпадает с результатом замкнутого аналитического решения, полученного в § 4.3.

Ряды, входящие в выражения (4.68) ... (4.73), получают последовательно один из другого с использованием операции дифференцирования по φ , что приводит к нарастающему ухудшению их сходимости. В рассматриваемом примере ряд, входящий в выражение (4.71), уже не пригоден для практических расчетов, а ряды в выражениях (4.72) и (4.73) оказываются расходящимися.

В качестве следующего примера возьмем шпангоут (см. рис. 4.5, а), нагруженный в сечении $\varphi = 0$ сосредоточенной касательной силой $T_1 = T$ и касательной распределенной силой, изменяющейся по закону (4.29). По формулам (4.63) находим

$$A_n = T; \quad B_n = 0$$

и из выражений (4.68) ... (4.70) получаем

$$v = \frac{R^3 T}{\pi E J} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n^2 (n^2 - 1)^2}; \quad w = \frac{R^3 T}{\pi E J} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n (n^2 - 1)^2};$$

$$\vartheta = \frac{R^2 T}{\pi E J} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n^2 (n^2 - 1)}.$$

В данном примере и для изгибающего момента ряд оказывается достаточно быстро сходящимся: из выражения (4.71) получаем

$$M = -\frac{RT}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n(n^2-1)}.$$

Наконец, в тех случаях, когда на кольцо действуют только распределенные касательные силы, а сосредоточенные касательные нагрузки отсутствуют, ряды достаточно хорошо сходятся и в выражениях (4.72) и (4.73), определяющих силы Q и N .

Для колец постоянной жесткости результаты, полученные методом Рэлея—Ритца, можно получить, интегрируя в тригонометрических рядах уравнение (4.14). При этом правую часть уравнения следует разложить в ряд Фурье и решение искать в виде (4.56). Такой метод решения приводит к тем же самым окончательным зависимостям (4.68) ... (4.73).

В заключение отметим, что определять перемещение кругового кольца обычно удобнее с помощью тригонометрических рядов, а не путем аналитического интегрирования уравнений изгиба кольца. Однако внутренние силы и моменты, как правило, надежнее и удобнее находить одним из методов, изложенных в § 4.2.

Часть II

ОСНОВЫ ТЕОРИИ И РАСЧЕТА ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Глава 5

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Теория оболочек лежит в основе расчетов на прочность тонкостенных конструкций, в том числе сложных и ответственных отсеков и агрегатов ракет. Общая теория основывается на гипотезах, позволяющих свести сложные трехмерные задачи механики к двумерным. Однако уравнения равновесия и геометрические соотношения при этом оказываются весьма громоздкими. Их можно упростить, если рассматривать наиболее распространенные в ракетной технике оболочки вращения. Тем не менее решить задачи аналитически удастся лишь в отдельных частных случаях. Наиболее простой вариант — безмоментная теория оболочек. Она широко применяется при расчетах, позволяя в большинстве случаев получить простые решения. Более сложные подходы требуют создания численных алгоритмов расчета.

В этой главе даются основы безмоментной и моментной теории оболочек вращения при осесимметричном и несимметричном нагружении. Уделяется внимание пояснению механического смысла каждого из сложных соотношений теории оболочек и возможности построения приближенных решений задач.

§ 5.1. Геометрия оболочек

Основными геометрическими понятиями теории оболочек постоянной толщины являются понятия срединной поверхности и слоя оболочки. Срединной или средней поверхностью оболочки называется *поверхность, равноудаленная от ее внутренней и наружной поверхностей*. Срединная поверхность делит толщину h оболочки пополам. Откладывая по внутренним нормальям к срединной поверхности оболочки отрезки длиной z и соединяя их концы, получим новую поверхность, которую назовем слоем z оболочки. Поверхность $z = h/2$ соответствует внутренней поверхности оболочки, а поверхность $z = -h/2$ — внешней (рис. 5.1, а).

Произвольную точку срединной поверхности вращения определим как *точку пересечения параллели и меридиана* (рис. 5.1, б). Каждой параллели будет соответствовать угол θ между осью вращения

оболочки и нормалью n к срединной поверхности; это как бы широта параллели, отсчитываемая от северного полюса. Положение меридиана на этой поверхности можно определить углом φ в плоскости параллели. Система координат θ , φ и z определяет положение произвольной точки A_z внутри тела оболочки. Это ортогональная криволинейная система координат в пространстве. В точке A срединной поверхности можно построить три взаимно ортогональных вектора единичной длины: вектор касательной к меридиану \vec{t}_1 , вектор касательной к параллели \vec{t}_2 и вектор нормали \vec{n} к поверхности. Векторы \vec{t}_1 и \vec{t}_2 лежат в плоскости, касательной к поверхности. При движении точки A по поверхности трехгранник, образованный векторами \vec{t}_1 , \vec{t}_2 и \vec{n} , будет перемещаться в пространстве, обкатывая плоскостью $t_1 t_2$ поверхность. В дифференциальной геометрии этот трехгранник называется **трехгранником Дарбу**.

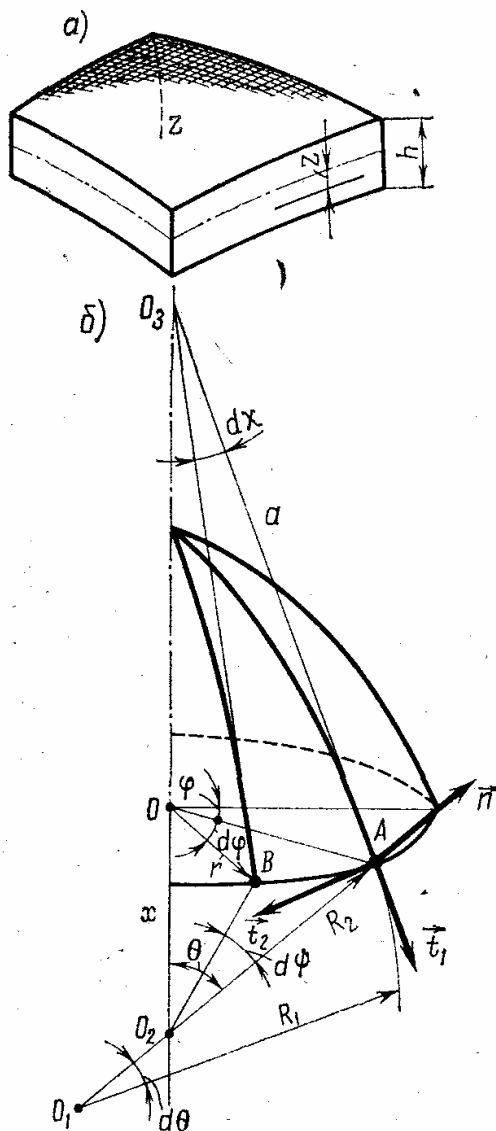


Рис. 5.1

Вместо угловой координаты θ можно ввести координату s , отсчитываемую по длине меридиана срединной поверхности. Точка пересечения O_1 двух бесконечно близких нормалей в плоскости меридиана будет центром кривизны меридиана. Кривизна меридиана определяется как величина, обратная радиусу кривизны R_1 :

$$\frac{1}{R_1} = \frac{d\theta}{ds}. \quad (5.1)$$

Если нормалью \vec{n} , двигаясь по окружности параллели, разрежем оболочку, то в сечении получим поверхность конуса с длиной образующей h . Вершина этой конической поверхности будет в точке O_2 на оси вращения оболочки (ось x на рис. 5.1, б). Отрезок AO_2 определяет размер второго радиуса кривизны R_2 срединной поверхности. Это радиус кривизны в точке A плоской кривой, образованной пересечением срединной поверхности с нормальной плоскостью $\vec{n} \vec{t}_2$, в которой лежит касательная \vec{t}_2 к параллели в точке A .

Рассмотрим еще одну характерную точку O_3 пересечения касательных к меридианам, проведенных из точек одной параллели. В си-

лу симметрии точка O_3 также будет лежать на оси вращения срединной поверхности. Обозначим радиус параллели поверхности через r и длину отрезка AO_3 — через a . Отрезки AO_3 и AO_2 образуют в точке A прямой угол. Из рассмотрения треугольников O_2AO и O_3AO получаем

$$R_2 = r/\sin \theta; \quad (5.2)$$

$$a = r/\cos \theta. \quad (5.3)$$

Пусть x — координата, отсчитываемая по оси вращения срединной поверхности. Тогда x и r можно рассматривать как декартовы координаты в плоскости меридиана. Следовательно,

$$\frac{dx}{ds} = \sin \theta, \quad \frac{dr}{ds} = \cos \theta. \quad (5.4)$$

Умножая обе части уравнения (5.2) на $\sin \theta$ и дифференцируя по θ , получаем

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} (R_2 \sin \theta) = \frac{dR_2}{d\theta} \sin \theta + R_2 \cos \theta.$$

Но согласно формулам (5.1) и (5.4)

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{d\theta} = R_1 \cos \theta,$$

следовательно,

$$\frac{dR_2}{d\theta} = (R_1 - R_2) \operatorname{ctg} \theta. \quad (5.5)$$

Уравнение (5.5) является важным соотношением, связывающим радиусы кривизны R_1 и R_2 срединной поверхности оболочки.

Пусть две точки A и B соответствуют приращению $d\varphi$ угловой координаты φ в плоскости параллели. Длина дуги AB равна $r d\varphi$. Угол $d\psi$ между двумя соседними нормальными AO_2 и BO_2 определится из равенства

$$R_2 d\psi = r d\varphi,$$

т. е.

$$d\psi = \frac{r}{R_2} d\varphi = \sin \theta d\varphi. \quad (5.6)$$

Угол $d\chi$ между двумя отрезками O_3A и O_3B определяется из равенства

$$a d\chi = r d\varphi,$$

откуда

$$d\chi = \frac{r}{a} d\varphi = \cos \theta d\varphi. \quad (5.7)$$

Пусть вследствие каких-либо причин оболочка деформировалась. Обозначим через u , v и w перемещения точки A срединной поверхности соответственно вдоль меридиана, параллели и внешней нормали

(рис. 5.2, а). Перемещения в направлении оси x и радиуса r (рис. 5.2, б) будут:

$$u_x = u \sin \theta - w \cos \theta; \quad (5.8)$$

$$u_r = u \cos \theta + w \sin \theta. \quad (5.9)$$

Перемещения u , v , w , u_r , u_x и их производные будем считать достаточно малыми, т. е. можно пренебречь их квадратами и произведениями.

Определим деформации срединной поверхности оболочки. Рассмотрим на этой поверхности элемент AA_1B_1B (рис. 5.3), образованный пересечением двух близких меридианов и

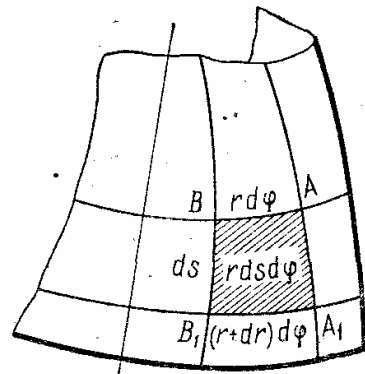
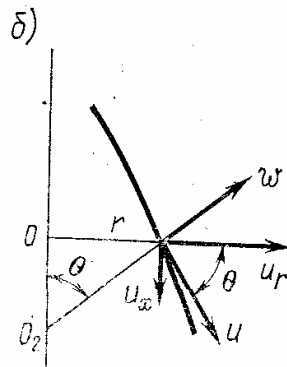
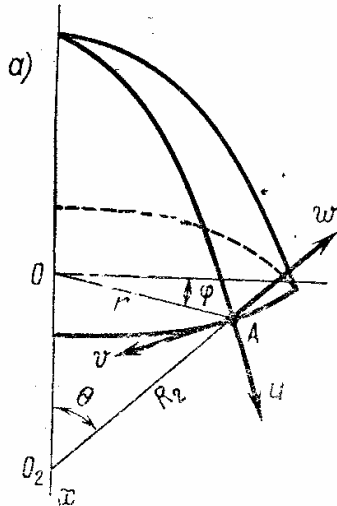


Рис. 5.2

Рис. 5.3

параллелей. Длины дуг BB_1 и AA_1 равны $ds = R_1 d\theta$, длина дуги AB равна $rd\phi$, дуги A_1B_1 — $(r + dr) d\phi$. Площадь четырехугольника AA_1B_1B с точностью до величин высшего порядка малости равна $rdsd\phi$. Будем считать перемещения u , v , w , u_x и u_r функциями независимых переменных θ (или s) и ϕ . В результате перемещения u элемент AA_1 (рис. 5.4) длиной ds получит относительное удлинение

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{1}{R_1} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Перемещения v перпендикулярны плоскости меридиана и при принятом предположении об их малости они не вызовут его удлинения. Относительное удлинение элемента AA_1 от перемещения w можно найти как относительное удлинение w/R_1 дуги окружности радиуса R_1 . Полное относительное удлинение элемента AA_1 равно

$$\epsilon_1 = \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right). \quad (5.10)$$

Выражение (5.10) определяет деформацию срединной поверхности в плоскости меридиана. Относительное удлинение элемента AB параллели легко получить, повторяя соответствующие рассуждения. Так как малые перемещения u_x не вызовут удлинений элемента AB , то достаточно рассмотреть перемещения только в плоскости параллели.

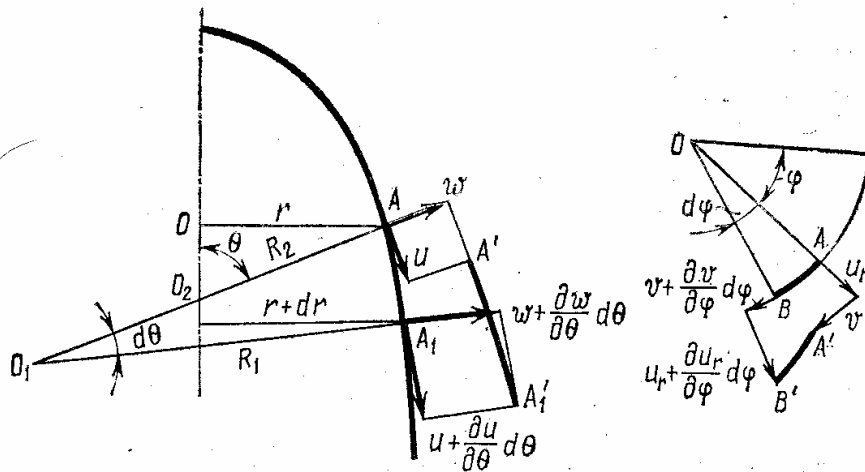


Рис. 5.4

Поскольку начальная длина элемента AB равна $r d\varphi$, получим для относительного удлинения ϵ_2 выражение

$$\epsilon_2 = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u_r \right), \quad (5.11)$$

или с учетом формул (5.9) и (5.2)

$$\epsilon_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \cos \theta + \frac{w}{R_2}. \quad (5.12)$$

Формулой (5.12) выражается деформация срединной поверхности в направлении параллели. Сложнее вычислить деформацию сдвига, т. е. изменение первоначального прямого угла $BA A_1$, элемента $AA_1 B_1 B$. Перемещение w при принятом предположении о его малости не влияет на значение деформации сдвига. Поэтому вместо элемента поверхности $AA_1 B_1 B$ можно рассмотреть его проекцию на плоскость, проходящую через точки A, A_1, B_1 и B . Вычислим уменьшение угла $BA A_1$ отдельно от перемещения u и от перемещения v .

Перемещения точек A и B вдоль касательных к меридианам будут соответственно u и $u + (du/d\varphi) d\varphi$ (рис. 5.5) Уменьшение угла $BA A_1$ от перемещения u равно

$$\gamma_2 = \left(u + \frac{\partial u}{\partial \varphi} d\varphi - u \right) / (r d\varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Перемещения точек A и B вдоль касательных к параллелям будут v и $v + (\partial v/\partial \theta) d\theta$. Но разность этих перемещений уже не будет полностью определять изменение угла $BA A_1$, так как вращение элемента $AA_1 B_1 B$ как твер-

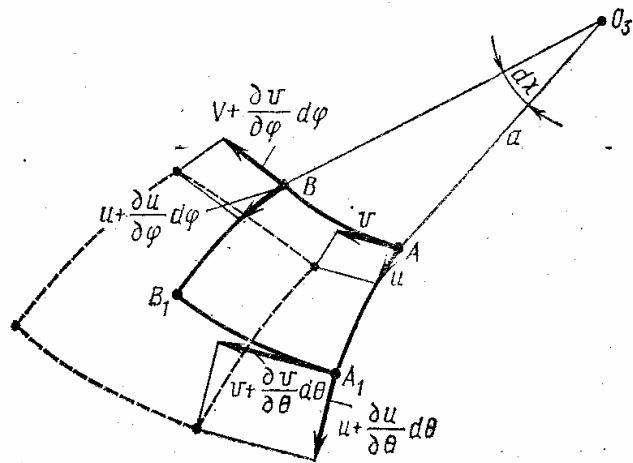


Рис. 5.5

дого тела вокруг точки O_3 влияет на эту разность. Без деформаций сдвига перемещению v отрезка AB будет соответствовать перемещение отрезка A_1B_1 , выражаемое соотношением

$$v = \frac{O_3A_1}{O_3A} = v \frac{a+ds}{a} = v \left(1 + \frac{dr}{r} \right).$$

Следовательно, сдвиг определится как

$$v + \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta - v \left(1 + \frac{dr}{r} \right) = \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta - v \frac{dr}{r}.$$

Окончательно уменьшение угла $BA A_1$ вследствие только перемещений v равно

$$\gamma_1 = \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{d\theta}{ds} - \frac{v}{r} \frac{dr}{ds} = \frac{1}{R_1} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \cos \theta.$$

Суммарное уменьшение угла $BA A_1$, т. е. деформация сдвига элемента срединной поверхности оболочки,

$$\gamma = \gamma_2 + \gamma = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \cos \theta. \quad (5.13)$$

Если смотреть на касательную плоскость со стороны внешней нормали, то углы γ_1 и γ_2 будут углами поворота векторов \vec{t}_1 и \vec{t}_2 вокруг нормали по часовой стрелке (см. рис. 5.1, б). Формулы (5.10), (5.12) и (5.13) определяют деформации срединной поверхности оболочки в касательной (тангенциальной) плоскости. Их часто называют тангенциальными деформациями.

Изгибные деформации срединной поверхности оболочки определяются через углы поворота нормали. В меридиональной плоскости вследствие перемещений u и w векторы \vec{t}_1 и \vec{n} повернутся на угол

$$\vartheta_1 = \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_1} = \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - u \right) \quad (5.14)$$

по движению часовой стрелки, если смотреть в направлении вектора \vec{t}_2 . В плоскости AO_2B векторы \vec{t}_2 и \vec{n} повернутся на угол

$$\vartheta_2 = \frac{1}{R_2} \left(\frac{\partial w}{\partial \psi} - v \right) = \frac{\partial w}{r \partial \varphi} - \frac{v}{R_2} \quad (5.15)$$

против движения часовой стрелки, если смотреть в направлении вектора \vec{t}_1 . Углы γ_1 , γ_2 , ϑ_1 и ϑ_2 полностью определяют повороты векторов \vec{t}_1 , \vec{t}_2 , \vec{n} при малых перемещениях u , v , w . При переходе от угловой координаты θ к линейной s , отсчитываемой вдоль меридиана от какой-либо условной параллели, следует пользоваться простой зависимостью

$$R_1 d\theta = ds. \quad (5.16)$$

В случае цилиндрической оболочки с радиусом R срединной поверхности имеем $\theta = \pi/2$, $R_1 = \infty$, $r = R_2 = R$, $R_1 d\theta = ds = dx$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right); \quad \gamma = \frac{\partial u}{R \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \gamma_2 &= \frac{\partial u}{R \partial \varphi}, \quad \gamma_1 = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \vartheta_1 = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \vartheta_2 = \frac{\partial w}{R \partial \varphi} - \frac{v}{R}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

§ 5.2. Уравнения безмоментной теории

Безмоментную оболочку можно рассматривать как приближенную модель реальной оболочки, если в последней не учитывать изгибающие и крутящие моменты; безмоментная теория оболочек — это приближенная теория расчета, не учитывающая изгибающих и крутящих моментов; замена реальной оболочки безмоментной недопустима, если ее срединная поверхность при заданном способе закрепления может изгибаться без растяжений и сдвигов.

Обозначим σ_θ — меридиональные напряжения, σ_φ — кольцевые напряжения и τ — напряжения сдвига. Вместо этих напряжений, которые в безмоментной теории считаются равномерно распределенными по толщине h оболочки, удобно рассматривать погонные силы $T_1 = \sigma_\theta h$; $T_2 = \sigma_\varphi h$; $S = \tau h$, действующие в срединной поверхности оболочки. Составим дифференциальные уравнения равновесия элемента ABB_1A_1 срединной поверхности, к которой отнесены силы T_1 , T_2 и S (рис. 5.6).

Внешние нагрузки, действующие на оболочку, отнесенные к площади элемента срединной поверхности, обозначим так: p_θ — тангенциальная нагрузка в направлении касательной к меридиану; p_φ — тангенциальная нагрузка в направлении касательной к параллели; p_n — нормальная нагрузка, действующая в направлении внешней нормали.

Площадь элемента ABB_1A_1 равна $rd\varphi ds$. Внешние силы $p_\theta rd\varphi ds$, $p_\varphi rd\varphi ds$ и $p_n rd\varphi ds$ производят работу на перемещениях u , v и w соответственно. Чтобы составить уравнения равновесия в тангенциальной плоскости, надо рассмотреть равновесие плоской трапеции ABB_1A_1 с углом $d\chi$ между направлениями AA_1 и BB_1 . Длины сторон AB , A_1B_1 и AA_1 , BB_1 трапеции соответственно равны $rd\varphi$; $(r + dr) d\varphi$ и ds .

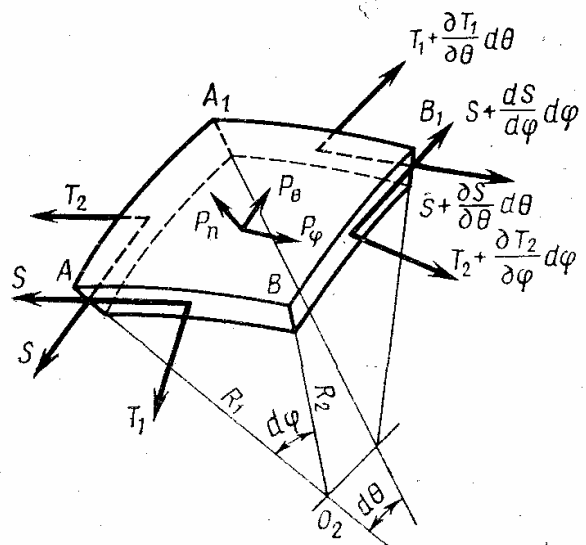


Рис. 5.6

Так как $\cos d\chi \approx 1$, $\sin \frac{1}{2} d\chi = \frac{1}{2} d\chi$; $d\chi = \frac{r}{a} d\varphi$, то, проектируя все силы на ось, перпендикулярную сторонам AB и A_1B_1 трапеции, получим

$$\begin{aligned} & \left(T_1 + \frac{\partial T_1}{\partial \theta} d\theta \right) (r + dr) d\varphi - T_1 r d\varphi - T_2 ds \frac{1}{2} d\chi - \\ & - \left(T_2 + \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} d\varphi \right) ds \frac{1}{2} d\chi + \left(S + \frac{\partial S}{\partial \varphi} d\varphi \right) ds - S ds + p_\theta r d\varphi ds = 0. \end{aligned}$$

Сокращая на величину $dsd\varphi$ и полагая в соответствии с правилами дифференциального исчисления $dr \rightarrow 0$, $d\varphi \rightarrow 0$ получаем

$$T_1 \frac{dr}{ds} + r \frac{\partial T_1}{\partial \theta} \frac{d\theta}{ds} - T_2 \frac{d\chi}{d\varphi} + \frac{\partial S}{\partial \varphi} + r p_\theta = 0. \quad (5.18)$$

Но

$$\frac{d\chi}{d\varphi} = \frac{r}{a} = \frac{dr}{ds} = \cos \theta; \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R_1}, \quad (5.19)$$

следовательно, разделив уравнение (5.18) на величину r , получим

$$\frac{1}{R_1} \frac{\partial T_1}{\partial \theta} + (T_1 - T_2) \frac{\cos \theta}{r} + \frac{\partial S}{r \partial \varphi} + p_\theta = 0. \quad (5.20)$$

Второе уравнение равновесия в тангенциальной плоскости удобнее всего получить, взяв сумму моментов всех сил относительно точки O_3 пересечения сторон AA_1 и BB_1 трапеции (см. рис. 5.5):

$$\begin{aligned} & \left(T_2 + \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} d\varphi \right) \left(a + \frac{1}{2} ds \right) ds - T_2 \left(a + \frac{1}{2} ds \right) ds + \\ & + \left(S + \frac{\partial S}{\partial \theta} d\theta \right) \left(a + ds \right) \times \\ & \times (r + dr) d\varphi - S a r d\varphi + p_\varphi r d\varphi ds \left(a + \frac{1}{2} ds \right) = 0. \end{aligned}$$

Сократив на величину $dsd\varphi$ и полагая $ds \rightarrow 0$; $d\varphi \rightarrow 0$, найдем

$$\frac{\partial T_2}{\partial \varphi} a + \frac{\partial S}{\partial \theta} ar \frac{d\theta}{ds} + rS + aS \frac{dr}{ds} + rap_\varphi = 0. \quad (5.21)$$

Разделив уравнение (5.21) на величину ar и учитывая тождества (5.19), получим

$$\frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial S}{\partial \theta} + 2 \frac{S}{r} \cos \theta + p_\varphi = 0. \quad (5.22)$$

Третье уравнение равновесия получим, составив сумму проекций всех сил на направление внутренней нормали к поверхности. Силы $T_1 r d\varphi$ и $\left(T_1 + \frac{\partial T_1}{\partial \theta} d\theta \right) (r + dr) d\varphi$ лежат в плоскости меридиана и угол между ними составляет $d\theta$. С точностью до величин второго порядка малости силы $T_2 ds$ и $\left(T_2 + \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} d\varphi \right) ds$ лежат в нормальной плоскости AO_2B и угол между ними равен $d\varphi$ (см. рис. 5.1, б). Сумма

проекций всех сил на нормаль с требуемой точностью будет

$$T_1 r d\varphi d\theta + T_2 ds d\psi - p_n r d\varphi ds = 0. \quad (5.23)$$

Разделив это уравнение на $r d\varphi ds$, с учетом выражений (5.1), (5.6) получим

$$T_1/R_1 + T_2/R_2 = p_n. \quad (5.24)$$

Три уравнения (5.20), (5.22) и (5.24) являются искомыми уравнениями равновесия элемента безмоментной оболочки вращения.

Силы T_1 , T_2 и S связаны законом Гука с деформациями ε_1 , ε_2 , γ срединной поверхности, вычисленными в § 5.1. Для изотропной упругой оболочки с учетом температурного расширения

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{Eh} (T_1 - \mu T_2) + \alpha (t - t_0); \quad (5.25)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{Eh} (T_2 - \mu T_1) + \alpha (t - t_0); \quad (5.26)$$

$$\gamma = \frac{1}{Gh} S. \quad (5.27)$$

Здесь E и G — соответственно модуль Юнга и модуль сдвига материала оболочки; α — коэффициент линейного расширения и $(t - t_0)$ приращение температуры в срединной поверхности оболочки.

Система уравнений будет полной, если добавить ранее полученные выражения деформаций через перемещения u , v , w :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right); \quad (5.28)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \cos \theta + \frac{w}{R_2}; \quad (5.29)$$

$$\gamma = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \cos \theta. \quad (5.30)$$

Через перемещение u_r вдоль радиуса r удлинение ε_2 выражается формулой

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}. \quad (5.31)$$

Отличительной чертой полученных уравнений является то, что они допускают раздельное интегрирование. Интегрируя уравнения (5.20), (5.22), (5.24), можно найти общие выражения для сил T_1 , T_2 , S , затем определить деформации ε_1 , ε_2 , γ из выражений (5.25) ... (5.27) закона Гука и, наконец, найти общие выражения для перемещений u , v , w , интегрируя уравнения (5.28) ... (5.30).

При расчете оболочки по безмоментной теории принципиально важна правильная формулировка граничных условий. Безмоментная оболочка является расчетной схемой реальной оболочки и правильно отражает ее главные свойства только при определенных условиях загрузки или закрепления.

Если на одном из краев оболочки заданы только силовые граничные условия, т. е. нет ограничений для перемещений, то можно по-

ставить задачу о нахождении сил T_1 , T_2 и S , используя только уравнения равновесия (5.20), (5.22), (5.24) и силовые граничные условия. Используя терминологию строительной механики стержневых систем, можно сказать, что безмоментная оболочка обладает внутренней статической определимостью. Статическая определимость, неопределимость или геометрическая изменяемость безмоментной оболочки как механической системы зависят в значительной степени от граничных условий на торцах.

Анализ полной системы уравнений показывает, что в безмоментной теории оболочек на каждом торце можно задавать только два тангенциальных граничных условия, в которые могут входить либо тангенциальные силы T_1 , S , либо тангенциальные перемещения u , v . Может существовать комбинация величин T_1 и v или S и u , и невозможно рассматривать условия T_1 одновременно с u , так же как S с v . Далее будет показано, что граничные условия по w можно удовлетворить, рассматривая моментную теорию оболочек.

§ 5.3. Осесимметричная задача для безмоментной оболочки

Принимая $p_\varphi = 0$, $v = 0$, $S = 0$, а перемещения u , w и силы T_1 , T_2 зависящими только от координаты θ (или s), получаем уравнения равновесия:

$$\frac{1}{R_1} \frac{dT_1}{d\theta} + (T_1 - T_2) \frac{\cos \theta}{r} + p_\theta = 0; \quad (5.32)$$

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} = p_n; \quad (5.33)$$

выражения деформаций через перемещения:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{R_1} \frac{du}{d\theta} + \frac{w}{R_1}; \quad (5.34)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{u}{r} \cos \theta + \frac{w}{R_2} = \frac{u_r}{r}, \quad (5.35)$$

где

$$u_r = u \cos \theta + w \sin \theta;$$

закон Гука с учетом температурного расширения:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{Eh} (T_1 - \mu T_2) + \alpha (t - t_0); \quad (5.36)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{Eh} (T_2 - \mu T_1) + \alpha (t - t_0).$$

Из уравнения (5.33) окружная сила равна

$$T_2 = R_2 (p_n - T_1/R_1). \quad (5.37)$$

Подставляя выражение (5.37) в уравнение (5.32) и учитывая, что

$$R_1 d\theta = ds; \quad R_2 (\cos \theta)/r = \operatorname{ctg} \theta,$$

получаем

$$\frac{dT_1}{ds} + \left(\frac{\cos \theta}{r} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_1} \right) T_1 + p_\theta - p_n \operatorname{ctg} \theta = 0. \quad (5.38)$$

Примем

$$T_1 = P/(2\pi r \sin \theta),$$

где $P = P(s)$ — новая искомая функция. Ее смысл будет рассмотрен ниже. Подставляя это выражение для T_1 в уравнение (5.38) и учитывая тождества

$$\frac{dr}{ds} = \cos \theta, \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R_1},$$

получаем после умножения на $2\pi r \sin \theta$:

$$\frac{dP}{ds} = 2\pi r (p_n \cos \theta - p_\theta \sin \theta).$$

Отсюда

$$P = P_0 + 2\pi \int_{s_1}^s (p_n \cos \theta - p_\theta \sin \theta) r ds, \quad (5.39)$$

где s_1 определяет граничное сечение оболочки. Величина $p_n \cos \theta - p_\theta \sin \theta = p_x$ есть проекция нагрузки на ось x .

Формулу (5.39) можно представить в виде

$$P = P_0 + 2\pi \int_{s_1}^s p_x r ds. \quad (5.40)$$

Все величины, входящие в формулу (5.40), имеют следующий смысл (рис. 5.7): P — продольная сила в рассматриваемом сечении оболочки; P_0 — продольная сила, приложенная в торцовом сечении; $2\pi p_x r ds$ — осевая нагрузка, действующая на элементарное кольцо оболочки длиной ds . Следовательно, формула (5.40) определяет эпюру продольных сил, растягивающих оболочку как стержень переменного сечения.

Окружное усилие определяется из формулы (5.37):

$$T_2 = p_n R_2 - T_1 (R_2/R_1). \quad (5.41)$$

Рассмотрим подробнее практически важный случай нагружения оболочки гидростатическим давлением. Принимая $p_\theta = 0$ и $\cos \theta ds = dr$, из уравнения (5.39) получаем

$$P = P_0 + 2\pi \int r p_n dr. \quad (5.42)$$

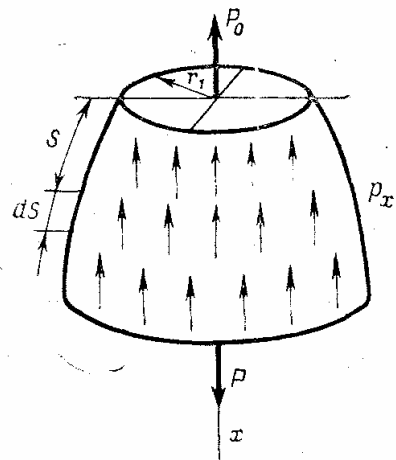


Рис. 5.7

Если замкнутая в вершине оболочка ($r_1 = 0$) нагружена внутренним постоянным давлением $p_n = p = \text{const}$, то

$$P = 2\pi p \int_0^r r dr = \pi r^2 p. \quad (5.43)$$

Формулу (5.43) легко получить непосредственно из теоремы Паскаля, так как πr^2 — проекции поверхности оболочки на плоскость, перпендикулярную направлению силы P . В этом случае меридиональное усилие $T_1 = pr/(2 \sin \theta)$. Но $r = R_2 \sin \theta$. Следовательно,

$$T_1 = pR_2/2.$$

Кольцевое усилие

$$T_2 = pR_2 [1 - R_2/(2R_1)].$$

Для цилиндрической оболочки радиусом r , имеющей на торцах днища и нагруженной внутренним давлением p , имеем

$$T_1 = pr/2; \quad T_2 = pr.$$

Для сферической оболочки радиусом r

$$T_1 = T_2 = pr/2.$$

По безмоментной теории оболочек перемещения точек срединной поверхности легко найти из уравнений (5.34), (5.35), (5.36), если известны силы T_1 и T_2 :

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} + w &= \frac{R_1}{Eh} (T_1 - \mu T_2) + \alpha R_1 (t - t_0); \\ u \operatorname{ctg} \theta + w &= \frac{R_2}{Eh} (T_2 - \mu T_1) + \alpha R_2 (t - t_0). \end{aligned} \quad (5.44)$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$\frac{du}{d\theta} - u \operatorname{ctg} \theta = f(\theta), \quad (5.45)$$

где $f(\theta) = R_1 (T_1 - \mu T_2)/(Eh) - R_2 (T_2 - \mu T_1)/(Eh) + \alpha (R_1 - R_2) (t - t_0)$.

Интегрируя выражение (5.45), находим

$$u = C \sin \theta + \sin \theta \int f(\theta) \frac{d\theta}{\sin \theta}. \quad (5.46)$$

Произвольная константа C соответствует перемещению оболочки как твердого тела вдоль оси x . Из уравнения (5.44) получим

$$w = \frac{R_2}{Eh} (T_2 - \mu T_1) + \alpha R_2 (t - t_0) - C \cos \theta - \cos \theta \int f(\theta) \frac{d\theta}{\sin \theta}. \quad (5.47)$$

Согласно соотношению (5.35) перемещение в плоскости параллели

$$u_r = \frac{r}{Eh} (T_2 - \mu T_1) + \alpha r (t - t_0). \quad (5.48)$$

Перемещение в направлении оси вращения оболочки определяется формулой $u_x = u \sin \theta - w \cos \theta$. Тогда получаем

$$u_x = C + \int f(\theta) \frac{d\theta}{\sin \theta} - \frac{R_2 \cos \theta}{Eh} (T_2 - \mu T_1) - \alpha R_2 \cos \theta (t - t_0). \quad (5.49)$$

Для цилиндрических и конических оболочек, где неудобно пользоваться независимой переменной θ , можно оперировать формулами (5.34) ... (5.36), принимая $R_1 \rightarrow \infty$ и $R_1 d\theta = ds$. Получим

$$\frac{du}{ds} = \frac{1}{Eh} (T_1 - \mu T_2) + \alpha (t - t_0).$$

Отсюда интегрированием определяют перемещение u . Перемещение w определяют из уравнения (5.44). Для сферической оболочки $R_1 = R_2 = R$ и

$$f(\theta) = \frac{R}{Eh} (1 + \mu) (T_1 - T_2);$$

$$u = C \sin \theta + \frac{R(1 + \mu)}{Eh} \sin \theta \int \frac{T_1 - T_2}{\sin \theta} d\theta.$$

Рассмотрим условия сопряжения двух оболочек вращения на основе безмоментной теории. Пусть две оболочки, нагруженные осесимметричной нагрузкой, соединяются по параллели радиуса r_0 (рис. 5.8). В месте стыка угол θ меняется скачком на величину $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$. Все значения углов и сил для верхней оболочки будем снабжать индексом (1), а для нижней — индексом (2). Спроектировав силы $T_1^{(1)}$ и $T_1^{(2)}$ вблизи стыка на ось вращения оболочек, получим первое условие сопряжения

$$T_1^{(1)} \sin \theta_1 = T_1^{(2)} \sin \theta_2.$$

Проекция этих же сил на плоскость параллели даст погонную нагрузку

$$q_r = T_1^{(1)} \cos \theta_1 - T_1^{(2)} \cos \theta_2.$$

Эта нагрузка не может быть воспринята безмоментными оболочками. Стык должен быть усилен достаточно прочным и жестким шпангоутом. Нагрузка q_r будет расчетной сжимающей нагрузкой для этого шпангоута.

Сжимающее усилие в шпангоуте

$$N = q_r r_0 = (T_1^{(1)} \cos \theta_1 - T_1^{(2)} \cos \theta_2) r_0.$$

Например, для шпангоута в стыке цилиндрической оболочки со сферическим днищем, нагруженным равномерным гидростатическим давлением p , имеем $q_r = (pR/2) \cos \theta_1$, так как в этом случае $T_1^{(1)} = pR/2$, где R — радиус кривизны днища, а $\theta_2 = \pi/2$.

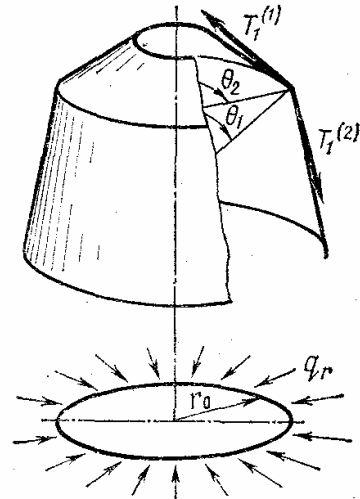


Рис. 5.8

§ 5.4. Уравнения моментной теории оболочек

Рассмотрим слой оболочки на расстоянии z от срединной поверхности. Произвольной точке A срединной поверхности (рис. 5.9) будет соответствовать точка A_z слоя. Обе точки лежат на одной нормали к срединной поверхности и имеют одни и те же координаты θ и φ .

В теории тонких оболочек деформации слоя z определяются гипотезой о прямой нормали, согласно которой точки, лежащие до деформации оболочки на какой-либо нормали к срединной поверхности, будут перемещаться вместе с этой нормалью в процессе деформирования оболочки.

Эта гипотеза устанавливает кинематическую связь между перемещениями u, v, w точки A и перемещениями u_z, v_z, w_z точки A_z :

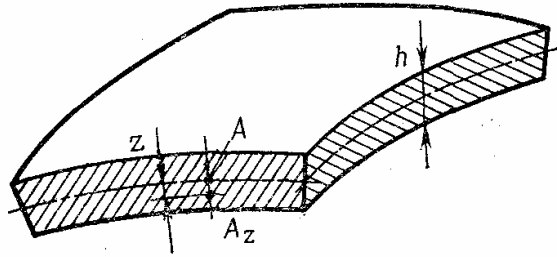


Рис. 5.9

$$u_z = u + z\vartheta_1; \quad (5.50)$$

$$v_z = v + z\vartheta_2; \quad (5.51)$$

$$w_z = w. \quad (5.52)$$

Углы поворота ϑ_1 и ϑ_2 нормали к срединной поверхности в точке A определяются формулами (5.14), (5.15).

Для определения деформаций $\varepsilon_{1z}, \varepsilon_{2z}, \gamma_z$ слоя z воспользуемся формулами (5.10), (5.12) и (5.13), заменяя в них перемещения u, v перемещениями u_z, v_z и геометрические величины R_1, R_2, r срединной поверхности геометрическими величинами R_{1z}, R_{2z}, r_z поверхности слоя z . Получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1z} &= \frac{1}{R_{1z}} \left(\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + w \right); \quad \varepsilon_{2z} = \frac{1}{r_z} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + \frac{u_z}{r_z} \cos \theta + \frac{w}{R_{2z}}; \\ \gamma_z &= \frac{\partial u_z}{r_z \partial \varphi} + \frac{1}{R_{1z}} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{v_z}{r_z} \cos \theta. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Подставляя в эти уравнения значения u_z, v_z из выражений (5.50), (5.51) и учитывая, что

$$\frac{1}{R_{1z}} = \frac{1}{R_1} \left/ \left(1 - \frac{z}{R_1} \right) \right.; \quad \frac{1}{R_{2z}} = \frac{1}{R_2} \left/ \left(1 - \frac{z}{R_2} \right) \right.; \quad \frac{1}{r_z} = \frac{1}{r} \left/ \left(1 - \frac{z}{R_2} \right) \right.,$$

получаем с точностью до первой степени величины z :

$$\varepsilon_{1z} = \varepsilon_1 + z\kappa_1, \quad \varepsilon_{2z} = \varepsilon_2 + z\kappa_2, \quad \gamma_z = \gamma + 2z\kappa_{12}, \quad (5.54)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma$ — тангенциальные деформации срединной поверхности, определяемые формулами (5.10), (5.12), (5.13);

$$\kappa_1 = \frac{1}{R_1} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \theta} + \frac{1}{R_1} \varepsilon_1 \approx \frac{1}{R_1} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \theta}; \quad (5.55)$$

$$\kappa_2 = \frac{\partial \vartheta_2}{r \partial \varphi} + \vartheta_1 \frac{\cos \theta}{r} + \frac{1}{R_2} \varepsilon_2 \approx \frac{\partial \vartheta_2}{r \partial \varphi} + \vartheta_1 \frac{\cos \theta}{r}; \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{12} = & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vartheta_1}{r \partial \varphi} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \theta} - \vartheta_2 \frac{\cos \theta}{r} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial u}{r \partial \varphi} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{R_1^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{v}{R_2 r} \cos \theta \right) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vartheta_1}{r \partial \varphi} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \theta} - \vartheta_2 \frac{\cos \theta}{r} \right) \quad (5.57) \end{aligned}$$

— параметры изменения кривизны срединной поверхности. Формулу (5.57) можно представить в другом виде:

$$\kappa_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vartheta_1}{r \partial \varphi} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \theta} - \frac{\vartheta_2}{r} \cos \theta + \frac{\gamma}{R_2} - \frac{1}{R_1 R_2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{R_1^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right).$$

В предлагаемых выражениях для κ_1 , κ_2 , κ_{12} иногда пренебрегают деформациями ε_1 , ε_2 и поворотами γ_1 , γ_2 элемента поверхности оболочки в его плоскости. Другими словами, параметры κ_1 , κ_2 и κ_{12} в основном определяются поворотами нормали к срединной поверхности оболочки.

Чтобы определить погонные силы и моменты, слой оболочки считают находящимся в условиях плоского напряженного состояния. Закон Гука для слоя z изотропной оболочки без учета температурных деформаций можно представить в форме

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{1z} + \mu \varepsilon_{2z}); \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{2z} + \mu \varepsilon_{1z}); \\ \tau &= G \gamma_z = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_z. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Согласно формулам (5.58) и (5.54) напряжения σ_θ , σ_φ и τ линейно изменяются по толщине оболочки. Вместо напряжений можно ввести статически эквивалентные им погонные силы T_1 , T_2 и S и погонные моменты M_1 , M_2 , M_{12} . Поскольку радиусы кривизны для слоя z мало отличаются от радиусов кривизны среднего слоя, получим следующие выражения меридиональной погонной силы:

$$T_1 = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\theta dz = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2); \quad (5.59)$$

кольцевой погонной силы

$$T_2 = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\varphi dz = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1); \quad (5.60)$$

погонной сдвигающей силы

$$S = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau dz = Gh \gamma = \frac{Eh}{2(1+\mu)} \gamma; \quad (5.61)$$

погонного изгибающего момента в меридиональной плоскости

$$M_1 = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\theta z dz = D (\kappa_1 + \mu \kappa_2); \quad (5.62)$$

погонного окружного изгибающего момента

$$M_2 = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\varphi z dz = D (\kappa_2 + \mu \kappa_1); \quad (5.63)$$

погонного крутящего момента

$$M_{12} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau z dz = D (1 - \mu) \kappa_{12}. \quad (5.64)$$

Здесь $D = Eh^3/[12(1 - \mu^2)]$ — цилиндрическая жесткость оболочки на изгиб. Положительные направления моментов показаны на рис. 5.10. Моменты изображены в виде векторов, перпендикулярных плоскостям

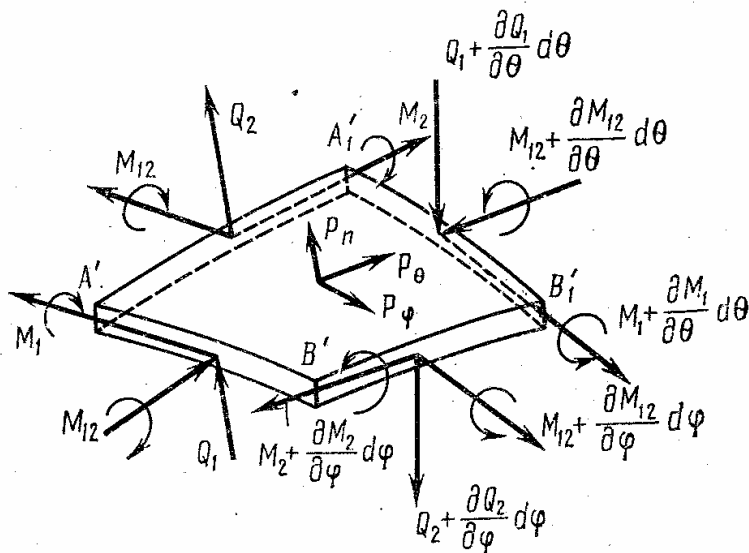


Рис. 5.10

их действия; положительное направление векторов соответствует правилу правого винта. В § 5.3 были составлены уравнения равновесия для элемента безмоментной оболочки, т. е. когда моменты $M_1 = M_2 = M_{12} = 0$. В рассматриваемой моментной оболочке при составлении уравнений равновесия элемента $A'B'ViAi$ срединной поверхности, к которой отнесены силы T_1, T_2, S и моменты M_1, M_2, M_{12} , надо еще учесть погонные перерезывающие силы Q_1 и Q_2 . Это чисто статические факторы, определяемые из уравнений равновесия элемента $A'B'ViAi$. На рис. 5.10, чтобы его не усложнять, показаны только силы Q_1, Q_2 и моменты M_1, M_2, M_{12} .

Повторяя рассуждения, которые были подробно изложены в предыдущем параграфе, получим уравнения равновесия элемента $A'B'ViAi$ моментной оболочки. Из равенства нулю суммы моментов относительно линии $A_i B_i$ определяют силу

$$Q_1 = \frac{1}{R_1} \frac{\partial M_1}{\partial \theta} + (M_1 - M_2) \frac{\cos \theta}{r} + \frac{\partial M_{12}}{r \partial \varphi}. \quad (5.65)$$

Аналогично из уравнения моментов относительно линии $B'B'_1$ определяют силу

$$Q_2 = \frac{\partial M_2}{r \partial \varphi} + \frac{\partial M_{12}}{R_1 \partial \theta} + 2M_{12} \frac{\cos \theta}{r}. \quad (5.66)$$

Получим уравнения равновесия в проекции на касательную к меридиану:

$$\frac{1}{R_1} \frac{\partial T_1}{\partial \theta} + (T_1 - T_2) \frac{\cos \theta}{r} + \frac{\partial S}{r \partial \varphi} - \frac{Q_1}{R_1} + p_\theta = 0; \quad (5.67)$$

то же, для касательной к параллели:

$$\frac{\partial T_2}{r \partial \varphi} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial S}{\partial \theta} + \frac{2S}{r} \cos \theta - \frac{Q_2}{R_2} + p_\varphi = 0; \quad (5.68)$$

и уравнение равновесия в проекции на нормаль:

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial Q_1}{\partial \theta} + Q_1 \frac{\cos \theta}{r} + \frac{\partial Q_2}{r \partial \varphi} - p_n = 0. \quad (5.69)$$

Здесь, как и в теории безмоментных оболочек, p_θ ; p_φ ; p_n — составляющие внешней нагрузки, отнесенные к площади элемента срединной поверхности.

Шестое уравнение равновесия элемента $A'B'B'_1A'_1$ — равенство нулю суммы моментов относительно нормали — должно быть следствием парности касательных напряжений и удовлетворяться автоматически при точных выражениях усилий и моментов через деформации и параметры изменения кривизны.

Для полученных выражений (5.59) ... (5.64) это уравнение точно не удовлетворяется вследствие отождествления радиусов кривизны рассматриваемого слоя и срединной поверхности. Так как система пяти уравнений равновесия в принципе достаточна для полного решения задач о деформации оболочки, шестое уравнение равновесия можно не рассматривать.

§ 5.5. Классификация напряженных состояний

Из уравнений (5.65) ... (5.69) можно исключить перерезывающие силы Q_1 , Q_2 , а в оставшиеся уравнения подставить выражения сил T_1 , T_2 , S и моментов M_1 , M_2 , M_{12} через перемещения u , v , w и их производные и получить три дифференциальных уравнения в частных производных для определения перемещений. Однако практическое решение этих уравнений наталкивается на большие математические трудности. В то же время очевидна специфика уравнений моментной теории оболочек: силы T_1 , T_2 и S пропорциональны первой степени, а моменты M_1 , M_2 и M_{12} — третьей степени толщины оболочки. По предположению толщина h оболочки мала по сравнению с характерными размерами, например R_1 или R_2 , срединной поверхности. Следовательно, можно максимально упростить уравнения с учетом малости толщины оболочки.

Рассмотрим метод упрощения уравнений моментной теории оболочек, основанный на малости толщины оболочки по сравнению с ее

радиусами кривизны. Средние по толщине оболочки напряжения можно определить из уравнений (5.59) ... (5.61):

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta \text{ ср}} &= \frac{T_1}{h} = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2); \\ \sigma_{\varphi \text{ ср}} &= \frac{T_2}{h} = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1); \\ \tau_{\text{ср}} &= \frac{S}{h} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma.\end{aligned}\quad (5.70)$$

Моментные (изгибные) напряжения при $z = \pm h/2$ можно определить из уравнений (5.62) ... (5.64):

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta \text{ и}} &= \pm 6 \frac{M_1}{h^2} = \pm \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} (\kappa_1 + \mu\kappa_2); \\ \sigma_{\varphi \text{ и}} &= \pm 6 \frac{M_2}{h^2} = \pm \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} (\kappa_2 + \mu\kappa_1); \\ \tau_{\text{и}} &= \pm 6 \frac{M_{12}}{h^2} = \pm \frac{Eh}{2(1+\mu)} \kappa_{12}.\end{aligned}\quad (5.71)$$

В этих формулах величина $h^2/6$ есть погонный момент сопротивления нормальных сечений оболочки, высота которых равна h , а ширина равна единице.

Рассмотрим структуру выражений для деформаций ε_1 , ε_2 , γ и параметров κ_1 , κ_2 , κ_{12} изменений кривизны. Возьмем для определенности выражения ε_2 и κ_1 :

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \cos \theta + \frac{w}{R_2}; \quad (5.72)$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{R_1} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \theta} + \frac{\varepsilon_1}{R_1}. \quad (5.73)$$

Эти выражения не зависят явно от толщины h оболочки. Пусть R_0 — какой-либо характерный размер срединной поверхности, например радиус кривизны R_2 торцового сечения оболочки. Введем вместо величин κ_1 , κ_2 , κ_{12} безразмерные величины $\bar{\kappa}_1 = R_0 \kappa_1$, $\bar{\kappa}_2 = R_0 \kappa_2$, $\bar{\kappa}_{12} = R_0 \kappa_{12}$. Тогда согласно формулам (5.70), (5.71) суммарные напряжения в оболочке при $z = \pm h/2$

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta} &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2 \pm \frac{h}{2R_0} (\bar{\kappa}_1 + \mu\bar{\kappa}_2) \right]; \\ \sigma_{\varphi} &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1 \pm \frac{h}{2R_0} (\bar{\kappa}_2 + \mu\bar{\kappa}_1) \right]; \\ \tau &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\gamma \pm \frac{h}{2R_0} \bar{\kappa}_{12} \right).\end{aligned}\quad (5.74)$$

Так как величина $h/(2R_0)$ мала, то на первый взгляд из формул (5.74) следует парадоксальный вывод, что все слагаемые с изменениями кривизны можно отбросить. Но в этом случае напряжения будут определяться только деформациями ε_1 , ε_2 , γ безмоментного состояния.

Более глубокий анализ показывает, что величины κ_1 , κ_2 , κ_{12} , а следовательно, и $\bar{\kappa}_1$, $\bar{\kappa}_2$, $\bar{\kappa}_{12}$ отличаются от величин ε_1 , ε_2 , γ порядками частных производных от перемещения w . Так, из рассмотрения формул (5.72) и (5.73) видно, что в выражение для деформации ε_2 входит только само перемещение w , а в выражение для параметра κ_1 — вторая производная от этого перемещения.

Но дифференцирование функции может увеличить порядок ее величины, т. е. максимальное значение производной может быть больше максимального значения самой функции. Порядок абсолютного значения какой-либо функции можно обозначить введением фигурных скобок. Например, порядок величины w обозначается $\{w\}$. Предположим, что решение уравнений моментной теории оболочек в каком-либо частном случае можно представить в форме

$$w = Ae^{-\lambda\theta} \cos n\varphi, \quad (5.75)$$

где $\lambda > 1$. Тогда

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = -\lambda Ae^{-\lambda\theta} \cos n\varphi; \quad \frac{\partial w}{\partial \varphi} = -nAe^{-\lambda\theta} \cos n\varphi. \quad (5.76)$$

Из этих формул следует

$$\left\{ \frac{\partial w}{\partial \theta} \right\} = \lambda \{w\}; \quad \left\{ \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right\} = n \{w\}.$$

Если λ и n — большие числа, то можно сказать, что дифференцирование функции w по θ увеличивает ее порядок величины в λ раз, а дифференцирование по φ — в n раз. В теории оболочек коэффициенты λ и n называются коэффициентами изменемости напряженного или деформированного состояния. Положим теперь, что $\lambda = \sqrt{R_0/h}$. Тогда $\{\bar{\kappa}_1\} = \lambda \{w\}$ и соответствующими слагаемыми в формулах (5.74) уже нельзя пренебрегать. В этом случае

$$\left\{ \frac{h}{2R_0} \bar{\kappa}_1 \right\} = \{\varepsilon_2\}. \quad (5.77)$$

Из этого простого анализа следуют три важных вывода.

1. Напряженное состояние моментной оболочки, описываемое функциями с малой изменемостью, т. е. функциями, порядок которых не возрастает при дифференцировании, можно приближенно найти по безмоментной теории оболочек, полагая $M_1 = M_2 = M_{12} = 0$.

2. Если средние напряжения от сил T_1 , T_2 , S и изгибные напряжения от моментов M_1 , M_2 , M_{12} имеют один и тот же порядок, то соответствующее напряженное состояние имеет большой коэффициент изменемости (в одном или двух направлениях). Его можно определить из общих уравнений теории оболочек, а также приближенных уравнений, учитывающих различные порядки величин производных от перемещений, усилий и моментов.

3. Если изгибные напряжения значительно больше средних напряжений от сил T_1 , T_2 , S , то перемещения u , v , w для такого напряженного состояния можно определить из уравнений

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \gamma = 0. \quad (5.78)$$

Это напряженное состояние соответствует деформированию оболочки без растяжения и сдвига средней поверхности.

В общей теории тонких оболочек первое напряженное состояние называется **б е з м о м е н т н ы м**, второе — **с м е ш а н н ы м**, третье — **м о м е н т н ы м**.

Действительное напряженное состояние конкретной оболочки при заданных внешних нагрузках и граничных условиях в общем случае не определяется каким-либо одним видом напряженного состояния, а может складываться из этих характерных состояний. Каждое из них является частным интегралом уравнений теории моментных оболочек.

Другими словами, малость параметра $h/(2R_0)$ позволяет определять различные частные интегралы дифференциальных уравнений теории тонких оболочек из решений соответствующих упрощенных уравнений. Так как дифференциальные уравнения теории оболочек являются линейными, то общее решение их можно искать в виде суммы частных интегралов, содержащих достаточное число произвольных функций или констант интегрирования для удовлетворения граничных условий. Суммарное напряженное состояние в различных частях оболочки может быть близким к тому или другому характерному напряженному состоянию.

Г л а в а 6

ПРИКЛАДНЫЕ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

В практических расчетах элементов конструкций на прочность и устойчивость широко применяются так называемые **п р и к л а д н ы е т е о р и и о б о л о ч е к**. При их создании обычно принимают дополнительные упрощения, которые позволяют получить простые аналитические решения задач. Однако эти теории могут быть использованы для расчета только определенного класса конструкций. Например, рассмотренная в этой главе **т е о р и я к р а е в о г о э ф ф е к т а** применяется для определения напряжений лишь на узких участках оболочек, близких к цилиндрическим. **Т е о р и я п о л о г и х о б о л о ч е к** используется при расчете элементов, геометрия которых мало отличается от плоских пластин. С помощью **п о л у б е з м о м е н т н о й т е о р и и** удается получить простые формулы для расчета тонкостенного цилиндра, когда изменяемость деформированного состояния по окружности существенно выше, чем вдоль образующей. **Т е о р и я м я г к и х о б о л о ч е к** применяется при расчете конструкций весьма малой толщины, в тех случаях когда можно не учитывать изгибающие моменты.

§ 6.1. Краевой эффект

В общих уравнениях моментной теории в случае осесимметричной деформации положим $v = 0$, $p_\varphi = 0$ и все величины — не зависящими от угловой координаты φ . В этом случае $\gamma = 0$; $\kappa_{12} = 0$, $M_{12} = 0$, $Q_2 = 0$.

Полная система уравнений будет иметь вид:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{R_1} \left(\frac{du}{d\theta} + w \right); \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{R_2} (u \operatorname{ctg} \theta + w); \quad \vartheta_1 = \frac{1}{R_1} \left(\frac{dw}{d\theta} - u \right); \quad (6.1)$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{R_1} \frac{d}{d\theta} \left[\frac{1}{R_1} \left(\frac{dw}{d\theta} - u \right) \right]; \quad \kappa_2 = \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_1 R_2} \left(\frac{dw}{d\theta} - u \right); \quad (6.2)$$

$$M_1 = D(\kappa_1 + \mu \kappa_2); \quad M_2 = D(\kappa_2 + \mu \kappa_1); \quad (6.3)$$

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2); \quad T_2 = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1); \quad (6.4)$$

$$Q_1 = \frac{1}{R_1} \frac{dM_1}{d\theta} + (M_1 - M_2) \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_2}; \quad (6.5)$$

$$\frac{1}{R_1} \frac{dT_1}{d\theta} + (T_1 - T_2) \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_2} - \frac{Q_1}{R_1} + p_\theta = 0; \quad (6.6)$$

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} + \frac{1}{R_1} \frac{dQ_1}{d\theta} + Q_1 \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_2} - p_n = 0. \quad (6.7)$$

Если нагрузки p_θ и p_n меняются вдоль меридиана достаточно плавно, частное решение уравнений можно, как уже указывалось, найти по формулам безмоментной теории оболочек.

Рассмотрим однородные уравнения, когда $p_\theta = p_n = 0$. Моментное напряженное состояние при осесимметричной деформации теряет смысл, так как из решения уравнений $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ получаются перемещения u и w , соответствующие лишь движению оболочки как твердого тела вдоль оси симметрии. Для приближенного определения смешанного напряженного состояния, которое соответствует краевому эффекту, рассмотрим упрощения исходных уравнений, следующие из условия быстрой изменяемости напряженного состояния вдоль меридиана. Будем считать, что для всех искомых сил и перемещений выполняется условие

$$\left\{ \frac{d}{d\theta} (*) \right\} = \sqrt{\frac{R_{20}}{h}} \{ (*), \}$$

где R_{20} — окружной радиус кривизны у края оболочки.

Будем также считать, что величина $\operatorname{ctg} \theta$ для любого края оболочки не слишком велика и радиусы кривизны R_1 , R_2 изменяются вдоль меридиана достаточно плавно. Естественно предположить, что порядок величины перемещения w выше порядка величины перемещения u . Положим, что $\{w\} = \left\{ \frac{du}{d\theta} \right\}$. Тогда главные значения величин, определенных формулами (6.1) и (6.2), равны:

$$\varepsilon_2 = \frac{w}{R_2}; \quad \vartheta_1 = \frac{1}{R_1} \frac{dw}{d\theta}; \quad \kappa_1 = \frac{1}{R_1^2} \frac{d^2 w}{d\theta^2}; \quad \kappa_2 = \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_1 R_2} \frac{dw}{d\theta}. \quad (6.8)$$

Из этих уравнений следует, что $\{\kappa_1\} > \{\kappa_2\}$. Поэтому можно считать, что

$$M_1 = D\kappa_1 = \frac{D}{R_1^2} \frac{d^2 w}{d\theta^2}; \quad M_2 = \mu D\kappa_1 = \mu M_1. \quad (6.9)$$

Из соотношения (6.5) с той же точностью следует

$$Q_1 = \frac{D}{R_1^3} \frac{d^3 w}{d\theta^3}. \quad (6.10)$$

Уравнения равновесия (6.6) и (6.7) сразу упростить нельзя, так как неизвестен относительный порядок величин T_1 и T_2 . Исключим из этих двух уравнений величину T_2 . Умножим уравнение (6.7) на $\operatorname{ctg} \theta$ и сложим его с уравнением (6.6). Так как по условию $p_\theta = p_n = 0$, получим

$$\frac{1}{R_1} \frac{dT_1}{d\theta} + T_1 \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_2} + T_1 \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_1} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_1} \frac{dQ_1}{d\theta} - \frac{Q_1}{R_1} + Q_1 \frac{\operatorname{ctg}^2 \theta}{R_2} = 0.$$

Умножив последнее уравнение на $r \sin \theta$, получим

$$\frac{d}{ds} (rT_1 \sin \theta + rQ_1 \cos \theta) = 0.$$

Константа, полученная при интегрировании, соответствует продольной силе. Отнесем ее к безмоментному напряженному состоянию и при исследовании краевого эффекта примем равной нулю:

$$T_1 = -Q_1 \operatorname{ctg} \theta. \quad (6.11)$$

Уравнение (6.7) для краевого эффекта примет вид

$$\frac{D}{R_1^4} \frac{d^4 w}{d\theta^4} + \frac{T_2}{R_2} = 0. \quad (6.12)$$

Сравним порядки величин меридионального и окружного усилий в краевой зоне. Из соотношения (6.12) следует

$$T_2 = -D \frac{R_2}{R_1^4} \frac{d^4 w}{d\theta^4}.$$

Из уравнения (6.10) и (6.11) получим

$$T_1 = -D \frac{1}{R_1^3} \frac{d^3 w}{d\theta^3} \operatorname{ctg} \theta.$$

При принятых предположениях порядок силы T_2 выше порядка силы T_1 , т. е. $\{T_2\} > \{T_1\}$.

Следовательно, из соотношений (6.4) и (6.8) получим

$$T_2 = Eh \frac{w}{R_2}.$$

Подставив эту зависимость в выражение (6.12), получим

$$\frac{d^4 w}{d\theta^4} + \frac{EhR_1^4}{DR_2^2} w = 0.$$

Обозначим $EhR_1^4/(DR_2^2) = 12(1 - \mu^2)R_1^4/(h^2R_2^2) = 4k^4$. Тогда можно написать

$$\frac{d^4 w}{d\theta^4} + 4k^4 w = 0. \quad (6.13)$$

Для сферической оболочки $R_1 = R_2 = R$ и коэффициент $k = \sqrt[4]{3(1-\mu^2)} \sqrt{R/h}$ является постоянным большим числом (при $R/h > 100$; $k > 10$).

При постоянном коэффициенте k общий интеграл уравнения (6.13) можно представить в виде

$$\omega = e^{-k\theta}(A \cos k\theta + B \sin k\theta) + e^{k\theta}(C \cos k\theta + D \sin k\theta), \quad (6.14)$$

где A, B, C и D — произвольные константы.

Выражение (6.14) обладает тем свойством, что при каждом дифференцировании оно возрастает в k раз:

$$\left\{ \frac{d\omega}{d\theta} \right\} = k \{\omega\}; \left\{ \frac{d^2\omega}{d\theta^2} \right\} = k^2 \{\omega\} \text{ и т. д.}$$

Следовательно, это решение удовлетворяет условию малости функции по сравнению с производной.

Рассмотрим теперь затухающую часть выражения (6.14):

$$\omega = e^{-k\theta}(A \cos k\theta + B \sin k\theta). \quad (6.15)$$

Величины $\cos k\theta$ и $\sin k\theta$ являются периодическими функциями угловой координаты θ — по значению они не больше единицы. При увеличении угла θ на период перемещения ω уменьшается в $e^{2\pi}$ раз, т. е. становится пренебрежимо малой величиной. Длина отрезка меридиана, соответствующая этому периоду, равна

$$\Delta s = \frac{2\pi}{k} R = \frac{2\pi}{\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}} \sqrt{Rh}$$

(при $R/h = 400$, например, $\Delta s/R = 0,122$). Отсюда можно сделать вывод, что длина Δs мала. Коэффициент k в уравнении (6.13) можно считать постоянным.

Рассмотрим последовательность расчета осесимметрично нагруженной оболочки вращения по моментной теории с разделением напряженного состояния на безмоментное и краевой эффект.

Сначала по безмоментной теории определяют силы T_1, T_2 и перемещения u, w по заданным внешним нагрузкам и граничным условиям для величины T_1 или u . (В выражение для перемещений может входить константа интегрирования, соответствующая перемещению оболочки как твердого тела.)

Затем, решая однородные уравнения краевого эффекта для каждого торца, находят общие выражения для величин $\varepsilon_2, \vartheta_1, M_1$ и Q_1 через соответствующие константы интегрирования (по две константы на каждом торце).

Наконец, составляют граничные условия для каждого торца оболочки. Если заданы силовые граничные условия, т. е. величины M_1 и Q_1 , то сразу определяют константы интегрирования уравнений краевого эффекта. Если заданы геометрические условия, т. е. величины ε_2 и ϑ_1 , то по значениям перемещений u и w безмоментного решения определяют величины ε_{20} и ϑ_{10} (перемещение оболочки как твердого

тела в них не войдет) и составляют суммарные выражения для ε_2 и ϑ_1 от безмоментного решения и краевого эффекта. Константы интегрирования, входящие в эти выражения, определяют из заданных геометрических граничных условий.

§ 6.2. Расчет полой сферической оболочки

Для пологих оболочек вращения решения, соответствующие краевому эффекту, не справедливы, но и здесь можно применить некоторые упрощения и построить приближенную схему расчета.

Рассмотрим пологую сферическую оболочку, нагруженную равномерным внутренним давлением p (рис. 6.1). Будем считать углы θ малыми и $\cos \theta = 1$, $\sin \theta = \operatorname{tg} \theta = \theta$, $ds = R d\theta = dr$, $\operatorname{ctg} \theta = \cos \theta / \sin \theta = R/r$. В качестве независимой переменной примем радиус r . Для полой оболочки можно считать, что угол ϑ_1 поворота касательной к меридиану не зависит от тангенциального перемещения u , тогда согласно уравнению (6.1)

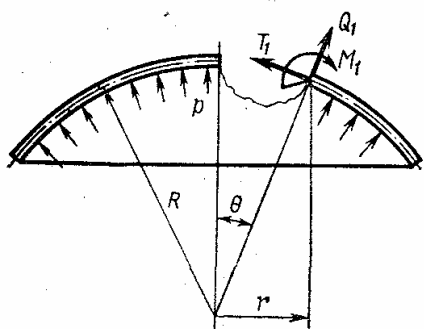


Рис. 6.1

$$\vartheta_1 = \frac{dw}{ds} = \frac{dw}{dr}. \quad (6.16)$$

Соответственно из уравнений (6.2), (6.3) следует

$$\kappa_1 = \frac{d^2 w}{dr^2}; \quad \kappa_2 = \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}; \quad (6.17)$$

$$M_1 = D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \mu \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right); \quad (6.18)$$

$$M_2 = D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \mu \frac{d^2 w}{dr^2} \right). \quad (6.19)$$

Эти формулы совпадают с аналогичными формулами в теории осесимметричного изгиба круглых пластин (см. § 2.4).

Согласно соотношению (6.5) перерезывающее усилие

$$Q_1 = \frac{dM_1}{dr} + \frac{1}{r} (M_1 - M_2).$$

Подставляя сюда выражения для моментов M_1 и M_2 из формул (6.18) и (6.19), получаем

$$Q_1 = D \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right). \quad (6.20)$$

Составив проекции всех сил, действующих на часть оболочки, ограниченную радиусом r , на направление вертикальной оси симметрии, получим

$$p\pi R^2 = 2\pi r (T_1 \sin \theta + Q_1 \cos \theta).$$

Отсюда

$$T_1 = pR/2 - Q_1 R/r. \quad (6.21)$$

Уравнение равновесия (6.7) в проекции на нормаль будет иметь вид

$$\frac{1}{R} (T_1 + T_2) + \frac{dQ_1}{dr} + \frac{Q_1}{r} = p.$$

С учетом (6.21) получим

$$T_2 = \frac{pR}{2} - R \frac{dQ_1}{dr}. \quad (6.22)$$

Деформации ε_1 и ε_2 согласно уравнениям (6.1) равны

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{dr} + \frac{w}{R}, \quad \varepsilon_2 = \frac{u}{r} + \frac{w}{R}.$$

Имея в виду выражение (6.4), можно записать

$$\frac{du}{dr} + \frac{w}{R} = \frac{1}{Eh} (T_1 - \mu T_2); \quad (6.23)$$

$$\frac{u}{r} + \frac{w}{R} = \frac{1}{Eh} (T_2 - \mu T_1).$$

Исключая из этих соотношений перемещение u и подставляя силы T_1 и T_2 из уравнений (6.21) и (6.22), получаем

$$w = \frac{1-\mu}{2Eh} pR^2 - \frac{1}{Eh} \frac{R^2}{r} \frac{d}{dr} (rQ_1) + C_0. \quad (6.24)$$

Здесь константа C_0 соответствует перемещению оболочки как твердого тела. Перемещение вдоль касательной к меридиану $u = (1 + \mu) \times RQ_1/(Eh) - C_0 r/R$. Согласно формуле (6.20)

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (Q_1 r) = D \left(\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} \right). \quad (6.25)$$

Для упрощения записи введем дифференциальный оператор

$$\Delta_r = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right).$$

Это — оператор Лапласа в полярных координатах для осесимметричных задач. Теперь формула (6.20) примет вид

$$Q_1 = D \frac{d}{dr} \Delta_r w, \quad (6.26)$$

а формула (6.25) — вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (Q_1 r) = D \Delta_r \Delta_r w. \quad (6.27)$$

Выражение $\Delta_r \Delta_r$ есть бигармонический оператор. Его развернутое выражение соответствует многочлену в скобках правой части уравнения (6.25). Дифференциальное уравнение (6.24) теперь можно представить так:

$$\frac{R^2 D}{Eh} \Delta_r \Delta_r w + w = \frac{1-\mu}{2Eh} pR^2 + C_0. \quad (6.28)$$

Приведем уравнение к безразмерному виду. Для этого введем параметр $\xi = r/l$, где l — некоторая размерная величина. Уравнение (6.28) теперь можно записать в более простом виде:

$$\Delta \Delta w + w = \frac{1-\mu}{2Eh} pR^2 + C_0, \quad (6.29)$$

$$\text{где } \Delta = \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d}{d\xi} \right) = \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi}.$$

Частное решение уравнения (6.29) при постоянном давлении таково:

$$w^* = \frac{1-\mu}{2Eh} pR^2 + C_0. \quad (6.30)$$

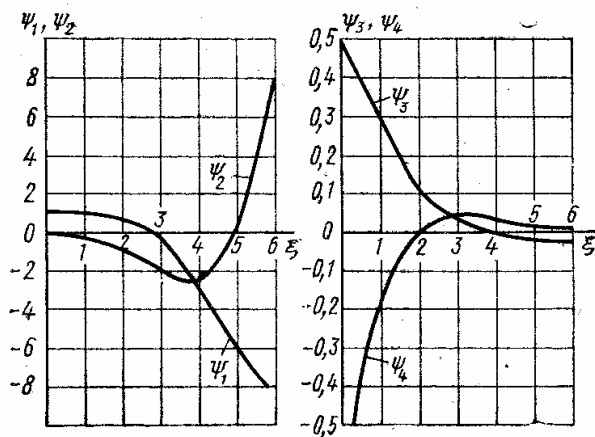


Рис. 6.2

Для этого частного решения получим

$$M_1 = M_2 = 0; Q_1 = 0; T_{10} = T_{20} = pR/2; u_0 = -C_0 r/R_0. \quad (6.31)$$

Но формулы (6.30) и (6.31) соответствуют решению задачи по безмоментной теории. Следовательно, и в теории полой сферической оболочки напряженное состояние разделяют на безмоментное и смешанное. Только в этом случае смешанное напряженное состояние уже нельзя определять по теории краевого эффекта — его определяют решением однородного уравнения

$$\Delta \Delta w + w = 0. \quad (6.32)$$

Общее решение этого уравнения выражается через четыре табулированные функции $\psi_1(\xi)$, $\psi_2(\xi)$, $\psi_3(\xi)$, $\psi_4(\xi)$:

$$w = C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2 + C_3 \psi_3 + C_4 \psi_4. \quad (6.33)$$

Эти функции удовлетворяют системе уравнений

$$\Delta \psi_1 = \psi_2; \Delta \psi_2 = -\psi_1; \Delta \psi_3 = \psi_4; \Delta \psi_4 = -\psi_3.$$

На рис. 6.2 представлены графики функций $\psi_1 \dots \psi_4$. Перерезывающая сила выражается через производные этих функций:

$$Q_1 = \frac{D}{l^3} \left(C_1 \frac{d\psi_2}{d\xi} - C_2 \frac{d\psi_1}{d\xi} + C_3 \frac{d\psi_4}{d\xi} - C_4 \frac{d\psi_3}{d\xi} \right).$$

В полюсе ($\xi = 0$) функция $\psi_4 \rightarrow -\infty$, а ее производная $\psi_4' \rightarrow \infty$.

Из условия ограниченности перемещения в полюсе ($\xi = 0$) получим $C_4 = 0$, а из условия ограниченности перерезывающего усилия

получим $C_3 = 0$. Константа $C_3 \neq 0$ только если сферическая оболочка нагружена сосредоточенной силой в вершине.

Итак, вид общего решения полного уравнения (6.29) в рассматриваемом случае будет

$$\omega = \frac{1-\mu}{2Eh} pR^2 + C_0 + C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2;$$

перерезывающая сила

$$Q_1 = \frac{Ehl}{R^2} \left(C_1 \frac{d\psi_2}{d\xi} - C_2 \frac{d\psi_1}{d\xi} \right);$$

тангенциальное перемещение

$$u = (1+\mu) \frac{l}{R} \left(C_1 \frac{d\psi_2}{d\xi} - C_2 \frac{d\psi_1}{d\xi} \right) - C_0 \frac{r}{R};$$

меридиональная сила

$$T_1 = \frac{pR}{2} - \frac{Eh}{R} \frac{1}{\xi} \left(C_1 \frac{d\psi_2}{d\xi} - C_2 \frac{d\psi_1}{d\xi} \right);$$

сумма

$$T_1 + T_2 = pR + \frac{Eh}{R} (C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2);$$

перемещение вдоль радиуса r

$$u_r = u \cos \theta + \omega \sin \theta = u + \omega \frac{r}{R} = \frac{1-\mu}{2Eh} pRr + \\ + \frac{l}{R} \left[C_1 \xi \psi_1 + C_2 \xi \psi_2 + (1+\mu) C_1 \frac{d\psi_2}{d\xi} - (1+\mu) C_2 \frac{d\psi_1}{d\xi} \right];$$

удлинение параллели

$$\epsilon_r = \frac{u_r}{r} = \frac{1-\mu}{2Eh} pR + \frac{1}{R} (C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2) + \frac{1+\mu}{R\xi} \left(C_1 \frac{d\psi_2}{d\xi} - C_2 \frac{d\psi_1}{d\xi} \right);$$

угол поворота касательной к меридиану

$$\vartheta_1 = \frac{1}{l} \left(C_1 \frac{d\psi_1}{d\xi} + C_2 \frac{d\psi_2}{d\xi} \right);$$

погонный изгибающий момент в меридиональной плоскости

$$M_1 = \frac{D}{l^2} \left[C_1 \psi_2 - C_2 \psi_1 - \frac{1-\mu}{\xi} \left(C_1 \frac{d\psi_1}{d\xi} + C_2 \frac{d\psi_2}{d\xi} \right) \right].$$

Составляющая сил T_1 и Q_1 в направлении оси симметрии оболочки тогда равна

$$T_1 \sin \theta + Q_1 \cos \theta = T_1 r/R + Q_1 = pr/2,$$

т. е. полностью определяется безмоментным решением. Смешанное напряженное состояние, соответствующее решению уравнения (6.33), определяет значение погонного момента M_1 и силы Q_r в плоскости параллели $Q_r = Q_1 R/r$. Для смешанного напряженного состояния величина Q_r есть проекция погонных сил T_1 и Q_1 на плоскость параллели.

Действительно, при $p = 0$ получаем $T_1 = -Q_1 \operatorname{ctg} \theta$ и $Q_r = Q_1 \times \sin \theta - T_1 \cos \theta = Q_1 / \sin \theta = Q_1 R / r$, или через функции ψ_1 и ψ_2 :

$$Q_r = \frac{Eh}{R\xi} \left(C_1 \frac{d\psi_2}{d\xi} - C_2 \frac{d\psi_1}{d\xi} \right).$$

Таким образом, схема расчета рассматриваемой пологой оболочки остается в принципе такой же, как и для непологой, только уравнение (6.13) краевого эффекта заменяется уравнением (6.32) смешанного напряженного состояния.

В обоих случаях тангенциальное перемещение u , соответствующее решениям однородных уравнений, т. е. смешанному напряженному состоянию, значительно меньше нормального перемещения w . В формулу для u входит множитель

$$\frac{l}{R} = \sqrt{h/R} \sqrt[4]{12(1-\mu^2)} \ll 1.$$

Чтобы найти константы C_1 и C_2 , надо задать два граничных условия. Вид этих граничных условий определяется способом закрепления или нагружения оболочки на торцовой параллели $\xi = \xi_1$. На этой параллели можно задать силу Q_r или удлинение ε_2 , момент M_1 или угол поворота ϑ_1 .

В любом случае при составлении граничных условий для пологой или непологой оболочки надо помнить, что погонная меридиональная сила T_1 соответствует силе T_{10} только безмоментного напряженного состояния, а погонная сила Q_r и момент M_1 соответствуют лишь смешанному напряженному состоянию. Направления сил T_{10} и Q_r не ортогональны. Расчетная для оболочки сила на торце складывается из безмоментной силы T_{10} и проекции силы Q_r на касательную к меридиану. Величины Q_r и M_1 на торце оболочки служат для определения констант интегрирования однородных уравнений смешанного напряженного состояния, когда заданы силовые граничные условия.

§ 6.3. Деформация цилиндрических оболочек

Для цилиндрических оболочек общая система уравнений, представленная в § 5.4, упрощается. Пусть R — радиус средней поверхности оболочки, x, φ — координаты точек этой поверхности в цилиндрической системе координат. Для круговой цилиндрической поверхности

$$1/R_1 = 0; \quad 1/R_2 = 1/R; \quad \cos \theta = 0, \quad R_2 d\theta = dx.$$

Деформация элемента средней поверхности

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right); \quad \gamma = \frac{\partial u}{R \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad (6.34)$$

углы поворота нормали

$$\vartheta_1 = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \vartheta_2 = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} - v \right).$$

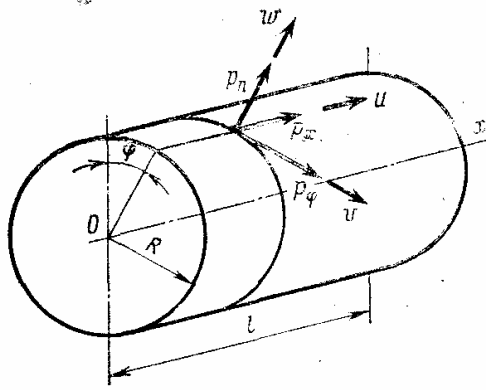


Рис. 6.3

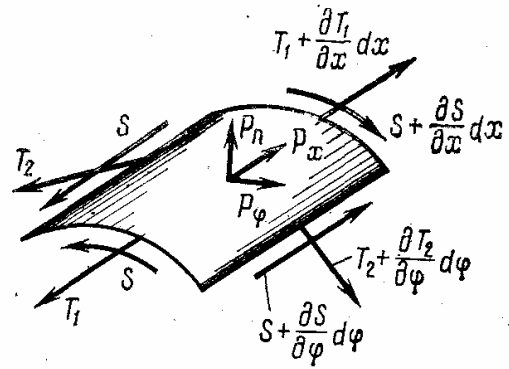


Рис. 6.4

В этих формулах u — перемещение точек средней поверхности в направлении возрастания координаты x ; v — перемещение в направлении возрастания угла φ ; w — перемещение в направлении внешней нормали (рис. 6.3). Согласно формулам (5.55) ... (5.57) параметры κ_1 , κ_2 , κ_{12} , изменения кривизны средней поверхности можно представить следующим образом:

$$\kappa_1 = \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \kappa_2 = \frac{\partial \vartheta_2}{R \partial \varphi} = \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right); \quad (6.35)$$

$$\kappa_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vartheta_1}{R \partial \varphi} + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} - \frac{1}{2R} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Уравнение равновесия элемента цилиндрической оболочки в соответствии с формулами (5.65) ... (5.69) можно представить в таком виде:

$$Q_1 = \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial M_{12}}{R \partial \varphi}; \quad (6.36)$$

$$Q_2 = \frac{\partial M_2}{R \partial \varphi} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x}; \quad (6.37)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{R \partial \varphi} + p_x = 0; \quad (6.38)$$

$$\frac{\partial T_2}{R \partial \varphi} + \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{Q_2}{R} + p_\varphi = 0; \quad (6.39)$$

$$\frac{T_2}{R} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{R \partial \varphi} = p_n, \quad (6.40)$$

где p_x , p_φ и p_n — составляющие внешних поверхностных нагрузок в направлении перемещений u , v и w (рис. 6.3); T_1 , T_2 и S — погонные тангенциальные силы (рис. 6.4):

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\epsilon_1 + \mu \epsilon_2); \quad T_2 = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\epsilon_2 + \mu \epsilon_1); \quad S = Gh\gamma; \quad (6.41)$$

Q_1, Q_2 — погонные перерезывающие силы; M_1, M_2, M_{12} — погонные моменты (рис. 6.5):

$$M_1 = D (\kappa_1 + \mu \kappa_2); M_2 = D (\kappa_2 + \mu \kappa_1); M_{12} = D (1 - \mu) \kappa_{12}. \quad (6.42)$$

Частное решение системы уравнений (6.34) ... (6.42) соответствует безмоментной теории. Силы и перемещения в этом случае могут быть

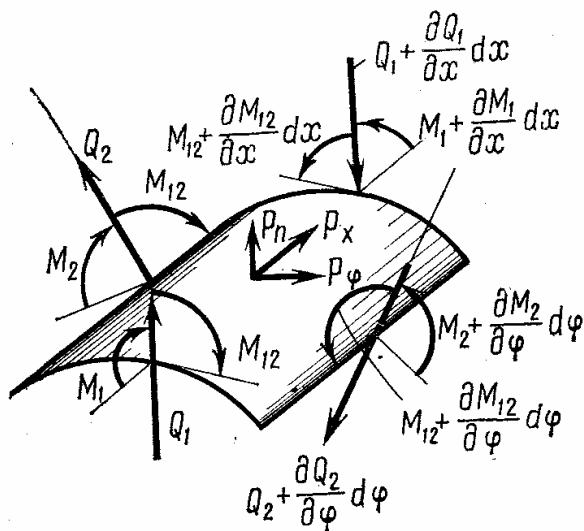


Рис. 6.5

определены последовательным интегрированием уравнений равновесия и геометрических соотношений. При произвольных поверхностных нагрузках p_x, p_φ, p_n уравнения равновесия элемента безмоментной оболочки, отнесенные к координатам x и φ , будут иметь вид

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{R \partial \varphi} = -p_x; \quad (6.43)$$

$$\frac{\partial T_2}{R \partial \varphi} + \frac{\partial S}{\partial x} = -p_\varphi; \quad (6.44)$$

$$T_2 = p_n R. \quad (6.45)$$

Из уравнений (6.44) и (6.45) получаем

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -p_\varphi - \frac{\partial p_n}{\partial \varphi}.$$

Следовательно, сдвигающая сила равна

$$S = \Phi_1(\varphi) - \int_0^x \left(p_\varphi + \frac{\partial p_n}{\partial \varphi} \right) dx,$$

где $\Phi_1(\varphi)$ — произвольная функция интегрирования.

Подставляя найденное значение силы сдвига в уравнение (6.43), получаем

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = -p_x - \frac{d\Phi_1(\varphi)}{R d\varphi} + \frac{1}{R} \int_0^x \left(\frac{\partial p_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 p_n}{\partial \varphi^2} \right) dx.$$

Интегрируя, найдем силу, действующую вдоль образующей:

$$T_1 = \Phi_2(\varphi) - x \frac{d\Phi_1(\varphi)}{R d\varphi} - \frac{1}{R} \int_0^x \left[p_x - \int_0^x \left(\frac{\partial p_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 p_n}{\partial \varphi^2} \right) dx \right] dx,$$

где $\Phi_2(\varphi)$ — вторая произвольная функция интегрирования.

Обозначим

$$S^* = - \int_0^x \left(p_\varphi + \frac{\partial p_n}{\partial \varphi} \right) dx;$$

$$T_1^* = - \int_0^x p_x dx - \int_0^x \frac{\partial S}{\partial \varphi} dx,$$

где S^* , T_1^* — частные решения уравнений (6.43) ... (6.45). Это известные функции, определяемые внешними поверхностными нагрузками.

При этих обозначениях

$$S = \Phi_1(\varphi) + S^*,$$

$$T_1 = \Phi_2(\varphi) - x \frac{d\Phi_1(\varphi)}{Rd\varphi} + T_1^*.$$

Перемещения u , v и w определяют с помощью следующих уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Eh} (T_1 - \mu T_2); \quad \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial u}{R\partial \varphi} + \frac{S}{Gh};$$

$$w = - \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{R}{Eh} (T_2 - \mu T_1).$$

Интегрируя первые два уравнения, получаем

$$u = \Phi_3(\varphi) + \frac{1}{Eh} \left[x\Phi_2(\varphi) - \frac{1}{2} x^2 \frac{d\Phi_1(\varphi)}{Rd\varphi} + \int_0^x T_1^* dx \right] -$$

$$- \mu \frac{R}{Eh} \int_0^x p_n dx,$$

$$v = \Phi_4(\varphi) - x \frac{d\Phi_3(\varphi)}{Rd\varphi} -$$

$$- \frac{1}{Eh} \left[\frac{x^2}{2} \frac{d\Phi_2(\varphi)}{Rd\varphi} - \frac{x^3}{6R^2} \frac{d^2\Phi_1(\varphi)}{d\varphi^2} + \int_0^x \int_0^x \frac{\partial T_1^*}{R\partial \varphi} dx^2 \right] +$$

$$+ \frac{1}{Gh} \left[x\Phi_1(\varphi) + \int_0^x S^* dx \right],$$

где $\Phi_3(\varphi)$ и $\Phi_4(\varphi)$ — новые произвольные функции интегрирования.

Обозначим

$$u^* = \frac{1}{Eh} \int_0^x T_1^* dx - \mu \frac{R}{Eh} \int_0^x p_n dx;$$

$$v^* = -\frac{1}{Eh} \int_0^x \int_0^x \frac{\partial T_1^*}{R \partial \varphi} dx^2 + \frac{1}{Gh} \int_0^x S^* dx.$$

Используя эти обозначения, выражения для перемещений u и v можно записать так:

$$u = \Phi_3(\varphi) + \frac{1}{Eh} \left[x \Phi_2(\varphi) - \frac{x^2}{2} \frac{d\Phi_1(\varphi)}{R d\varphi} \right] + u^*;$$

$$v = \Phi_4(\varphi) - x \frac{d\Phi_3(\varphi)}{R d\varphi} - \frac{1}{Eh} \left[\frac{x^2}{2} \frac{d\Phi_2(\varphi)}{R d\varphi} - \frac{x^3}{6R^2} \frac{d^2\Phi_1(\varphi)}{d\varphi^2} \right] +$$

$$+ \frac{1}{Gh} x \Phi_1(\varphi) + v^*.$$

Функции u^* и v^* имеют смысл частных решений.

Нормальное перемещение

$$w = -\frac{d\Phi_4(\varphi)}{d\varphi} + x \frac{d^2\Phi_3(\varphi)}{R d\varphi^2} + \frac{1}{Eh} \left[\frac{x^2}{2} \frac{d^2\Phi_2(\varphi)}{R d\varphi^2} - \frac{x^3}{6R^2} \frac{d^3\Phi_1(\varphi)}{d\varphi^3} \right] -$$

$$-\frac{dv^*}{d\varphi} - \frac{1}{Gh} x \frac{\partial \Phi_1(\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\mu}{Eh} x \frac{\partial \Phi_1(\varphi)}{\partial \varphi} -$$

$$- \mu \frac{R}{Eh} \Phi_2(\varphi) + \frac{p_n R^2}{Eh} - \mu \frac{T_1^* R}{Eh}.$$

Таким образом, решение уравнений безмоментной теории содержит четыре произвольных функции интегрирования. Они должны определяться из четырех граничных условий на торцах оболочки. Расчет по безмоментной теории цилиндрических оболочек чрезвычайно прост и достаточно надежен, если внешние нагрузки изменяются по координатам x и φ не слишком резко. К таким нагрузкам относятся, как правило, гидростатические и аэродинамические нагрузки.

Найти в аналитической форме решение уравнений (6.34) ... (6.42) моментной цилиндрической оболочки для различных граничных условий при произвольных нагрузках затруднительно.

Относительно простой результат в двойных тригонометрических рядах можно получить для практически важного случая, когда оболочка свободно шарнирно опирается на торцах. Под свободным шарнирным опиранием понимаются следующие граничные условия: $w = v = 0$; $T_1 = 0$; $M_1 = 0$.

Представим уравнения в перемещениях. Для этого подставим переизбыточные силы Q_1 и Q_2 из уравнений (6.36) и (6.37) в формулы (6.39), (6.40). Далее выразим их через деформации и изменения кривизн с помощью зависимостей (6.41), (6.42). Окончательные уравнения в

перемещениях получаются с использованием выражений (6.34) и (6.35):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{R^2 \partial \varphi^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x R \partial \varphi} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} = -p_x \frac{1-\mu^2}{Eh}; \quad (6.46)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1+\mu}{2R} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial x} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{R^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial w}{R^2 \partial \varphi} + \\ & + \frac{h^2}{12R^2} \left(-\frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \varphi} + \frac{\partial^3 w}{R^2 \partial \varphi^3} \right) = \\ & = -p_\varphi \frac{1-\mu^2}{Eh}; \end{aligned} \quad (6.47)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{R^2 \partial \varphi} + \frac{w}{R^2} + \frac{h^2}{12R^2} \left(-\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \varphi} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3} + \right. \\ & \left. + R^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) = p_n \frac{1-\mu^2}{Eh}. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Слагаемые в скобках в последних двух уравнениях соответствуют моментным членам. Перед ними стоит сомножитель $h^2/(12R^2)$, являющийся малым параметром. Казалось бы, при рассмотрении тонких оболочек можно не учитывать этих членов в скобках. Отметим, однако, что производные от перемещений v и w здесь имеют высокий порядок. Как уже отмечалось ранее, в некоторых задачах теории оболочек перемещения гораздо меньше по значению, чем их производные. Именно поэтому малый параметр $h^2/(12R^2)$, умноженный на производные высокого порядка, дает величины, соизмеримые с теми, которые соответствуют безмоментной теории.

Это подтверждается, в частности, для осесимметричного случая. Общий вид уравнений при этом упрощается:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\mu}{R} \frac{dw}{dx} = -p_x \frac{1-\mu^2}{Eh}; \\ & \frac{w}{R^2} + \frac{\mu}{R} \frac{du}{dx} + \frac{h^2}{12} \frac{d^4 w}{dx^4} = p_n \frac{1-\mu^2}{Eh}. \end{aligned}$$

Исключая касательное перемещение и учитывая, что постоянная интегрирования первого уравнения

$$C = (p_x x + T_1) (1 - \mu^2)/(Eh),$$

получаем

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{12(1-\mu^2)}{R^2 h^2} w = p_n \frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3} - \frac{\mu T_1}{R} \frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3}. \quad (6.49)$$

Это известное уравнение осесимметричного изгиба цилиндрической оболочки. Оно соответствует рассмотренному ранее уравнению краевого эффекта моментной оболочки вращения, и общие интегралы их одинаковы.

Получим решение уравнений (6.46) ... (6.48) в двойных тригонометрических рядах. Положим, что оболочка нагружена нормальным к поверхности распределенным усилием $p_n = p$, симметричным отно-

сительно плоскости $\varphi = 0$. Разложим величину p в двойной ряд Фурье:

$$p = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \cos n\varphi,$$

где l — длина оболочки. Коэффициенты ряда в силу ортогональности тригонометрических функций определяются формулами:

для осесимметричного случая ($n = 0$) при произвольном m

$$p_{m0} = \frac{2l}{\pi R} \int_0^l \int_0^\pi p(x, \varphi) \sin \frac{m\pi x}{l} dx d\varphi;$$

при $n = 1, 2, \dots$ и произвольном m

$$p_{mn} = \frac{4l}{\pi R} \int_0^l \int_0^\pi p(x, \varphi) \sin \frac{m\pi x}{l} \cos n\varphi dx d\varphi.$$

Решение уравнений (6.46) ... (6.48) будем искать в форме

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \cos \frac{m\pi x}{l} \cos n\varphi; \quad v = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin n\varphi;$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \cos n\varphi. \quad (6.50)$$

Каждый из членов этого ряда удовлетворяет граничным условиям на торцах оболочки ($x = 0, x = l$). Подставив выражения (6.50) в уравнения (6.46) ... (6.48), получим алгебраическую систему уравнений относительно искомым коэффициентов A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} :

$$\left. \begin{aligned} & \left[-\frac{m^2 \pi^2}{l^2} - \frac{1-\mu}{2} \frac{n^2}{R^2} \right] A_{mn} + \left[\frac{1+\mu}{2} \frac{n}{R} \frac{m\pi}{l} \right] B_{mn} + \\ & \quad + \left[\mu \frac{1}{R} \frac{m\pi}{l} \right] C_{mn} = 0; \\ & \left[\frac{1+\mu}{2} \frac{m\pi}{l} \frac{n}{R} \right] A_{mn} + \left[-\frac{n^2}{R^2} - \frac{1-\mu}{2} \frac{m^2 \pi^2}{l^2} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{h^2}{12R^2} \left(\frac{n^2}{R^2} - \frac{1-\mu}{2} \frac{m^2 \pi^2}{l^2} \right) \right] B_{mn} + \\ & \quad + \left[-\frac{h}{R^2} + \frac{h^3}{12R^2} \left(\frac{n^2}{R^2} + n \frac{m^2 \pi^2}{l^2} \right) \right] C_{mn} = 0; \\ & \left[-\mu \frac{1}{R} \frac{m\pi}{l} \right] A_{mn} + \left[\frac{n}{R^2} + \frac{h^2}{12R^2} \left(\frac{m^2 \pi^2}{l^2} + \frac{n^2}{R^2} \right) \right] B_{mn} + \\ & \quad + \left[\frac{1}{R^2} + \frac{h^2}{12R^2} \left(R^2 \frac{m^4 \pi^4}{l^4} + 2 \frac{m^2 \pi^2}{l^2} n^2 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{n^4}{R^2} \right) \right] C_{mn} = \frac{1-\mu^2}{Eh} p_{mn}. \end{aligned} \right\} \quad (6.51)$$

Коэффициенты A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} соответствуют амплитудным значениям перемещений u , v , w . Из соотношений (6.51) следует, что если нагрузка $p(x, \varphi)$ изменяется достаточно плавно и при ее разложении в двойной ряд Фурье можно ограничиться несколькими первыми членами ($m = 1, 2, 3, n = 0, 1, 2, 3$), то можно не учитывать слагаемые в скобках из выражений (6.46) ... (6.48), и решение будет соответствовать расчету по безмоментной теории.

При нагрузках, быстро изменяющихся по координатам x и φ , определить перемещения по формулам (6.51) весьма сложно из-за медленной сходимости двойных рядов. Еще медленней будут сходиться ряды при определении усилий. Расчеты оболочек в этих случаях целесообразно проводить с помощью методов, изложенных в гл. 5.

§ 6.4. Полубезмоментная теория цилиндрических оболочек

Наиболее простой приближенной теорией, позволяющей проводить расчеты конструкций при нагрузках, быстро меняющихся вдоль окружной координаты, является полубезмоментная теория. Она строится с использованием трех видов гипотез: статических, предполагающих равенство нулю меридиональных изгибающих и крутящих моментов, а также перерезывающих сил в продольном направлении ($M_1 = M_{12} = 0, Q_1 = 0$); кинематических, считающих, что окружная деформация и деформация сдвига оказывают незначительное влияние на деформированное состояние оболочки и их можно считать равными нулю ($\varepsilon_2 = 0, \gamma = 0$); физических не учитывающих при построении уравнений значение коэффициента Пуассона ($\mu = 0$).

При $M_1 = M_{12} = 0$ и $Q_1 = 0$ уравнения равновесия элемента оболочки в координатах x и φ (рис. 6.6) согласно выражениям (6.36) ... (6.40) имеют вид

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{R \partial \varphi} = -p_x; \quad (6.52)$$

$$\frac{\partial T_2}{R \partial \varphi} + \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{Q_2}{R} + p_\varphi = 0; \quad (6.53)$$

$$\frac{T_2}{R} + \frac{\partial Q_2}{R \partial \varphi} = p_n; \quad (6.54)$$

$$Q_2 = \frac{\partial M_2}{R \partial \varphi}. \quad (6.55)$$

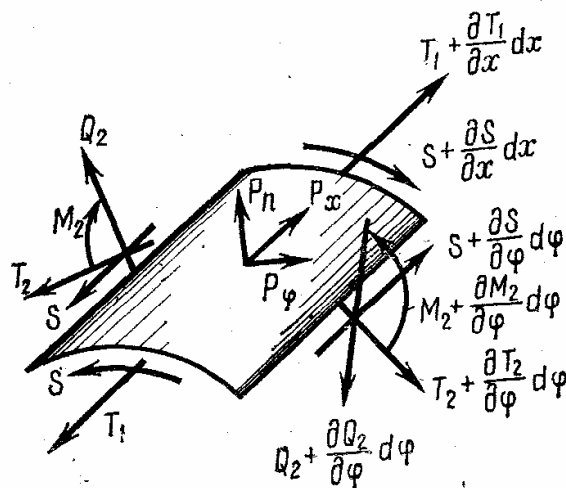


Рис. 6.6

При окружной деформации $\varepsilon_2 = 0$ изменение кривизны в окружном направлении $\kappa_2 = \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w \right)$, так как $\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w = 0$, а момент M_2 выражается через перемещения следующим образом:

$$M_2 = D \frac{1}{R^3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w \right). \quad (6.56)$$

Здесь D — погонная жесткость на изгиб оболочки в плоскости параллели. Для изотропной оболочки при $\mu = 0$ $D = Eh^3/12$. Из уравнения (6.55) следует

$$Q_2 = \frac{D}{R^3} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right), \quad (6.57)$$

а из уравнения (6.54)

$$T_2 = p_n R - \frac{D}{R^3} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right). \quad (6.58)$$

Дифференцируя выражения (6.52) по x , а выражение (6.53) — по φ и исключая сдвигающую силу S , получаем

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T_2}{R^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial Q_2}{R^2 \partial \varphi} - \frac{\partial p_\varphi}{R \partial \varphi} + \frac{\partial p_x}{\partial x} = 0. \quad (6.59)$$

Подставляя выражения T_2 и Q_2 из соотношений (6.57), (6.58) в уравнение (6.59), получаем *первое основное уравнение* полубезмоментной теории:

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{D}{R^5} \left(\frac{\partial^6 w}{\partial \varphi^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{\partial^2 p_n}{R \partial \varphi^2} - \frac{\partial p_\varphi}{R \partial \varphi} + \frac{\partial p_x}{\partial x} = 0. \quad (6.60)$$

Второе уравнение получаем из условия $\varepsilon_2 = \gamma = 0$ и зависимости

$$T_1 = B \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (6.61)$$

где B — погонная жесткость оболочки на растяжение в направлении образующей; $B = Eh_c$, где h_c — приведенная толщина оболочки с учетом продольного подкрепления (при отсутствии продольного подкрепления $B = Eh$). Из условия $\gamma = 0$ имеем

$$\frac{\partial u}{R \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (6.62)$$

Дифференцируя это уравнение по x и выражая производную $\partial u / \partial x$ через T_1 согласно соотношению (6.61), получаем

$$\frac{\partial T_1}{R \partial \varphi} + B \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0. \quad (6.63)$$

Согласно условию $\varepsilon_2 = 0$ имеем

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = -w. \quad (6.64)$$

Исключая отсюда и из уравнения (6.63) перемещение v , получаем *второе основное уравнение* полубезмоментной теории

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2} - BR \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (6.65)$$

Дифференцируя выражение (6.60) два раза по φ , а (6.65) по x и исключая T_1 , получаем уравнение в частных производных для перемещения w :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{D}{BR^6} \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w \right) = \\ = \frac{1}{BR^2} \left(\frac{\partial^4 p_n}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^3 p_\varphi}{\partial \varphi^3} - R \frac{\partial^3 p_x}{\partial x \partial \varphi^2} \right). \end{aligned} \quad (6.66)$$

Для изотропной оболочки

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{h^2}{12R^6} \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w \right) = \\ = \frac{1}{EhR^2} \left(\frac{\partial^4 p_n}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^3 p_\varphi}{\partial \varphi^3} - R \frac{\partial^3 p_x}{\partial x \partial \varphi^2} \right). \end{aligned} \quad (6.67)$$

Рассмотрим граничные условия на торцах оболочки ($x = 0$ и $x = l$). Поскольку в полубезмоментной теории условиями $M_1 = 0$, $Q_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$ исключен краевой эффект, то на краях оболочки можно ставить граничные условия только для тангенциальных сил T_1 , S или перемещений u , v . Но усилия S и перемещения u , v прямо не входят в уравнения (6.66) и (6.67). Поэтому необходимо граничные условия выразить через перемещение w и его производные по x на краях оболочки.

Если на торце оболочки тангенциальное перемещение $v = 0$, то согласно равенству (6.64) перемещение $w = 0$. Из формул (6.62) и (6.64) следует, что если на торце оболочки перемещение $u = 0$, то $dv/dx = 0$, а следовательно, и $dw/dx = 0$. Из уравнения (6.65) следует, что если на торце оболочки $T_1 = 0$, то $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$. Наконец, если сила $S = 0$, то согласно формуле (6.52) $\partial T_1 / \partial x = 0$ и в соответствии с уравнением (6.65) $\partial^3 w / \partial x^3 = 0$.

Таким образом, на каждом торце оболочки в зависимости от способа закрепления могут быть следующие варианты однородных граничных условий при $x = 0$ или $x = l$.

1. Свободное опирание края оболочки. Запрещены радиальные перемещения w и нет продольных сил T_1 . Край оболочки как бы оперт на катки, свободно перемещающиеся в направлении оси оболочки. Граничные условия таковы:

$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (6.68)$$

2. Неподвижное закрепление края оболочки. В этом случае запрещены все перемещения края оболочки ($w = u = 0$). Граничными условиями будут

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (6.69)$$

3. Свободный край оболочки. В этом случае $T_1 = S = 0$. Граничные условия

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad (6.70)$$

Условия сопряжения двух оболочек с различными жесткостями B_1 и B_2 следующие:

$$\omega_1 = \omega_2; \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial x} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x}; \quad B_1 \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} = B_2 \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x^2}; \quad B_1 \frac{\partial^3 \omega_1}{\partial x^3} = B_2 \frac{\partial^3 \omega_2}{\partial x^3}.$$

Уравнения (6.66) и (6.67) относительно легко решаются в тригонометрических рядах по угловой координате φ . Рассмотрим случай нагружения оболочки силами, симметричными относительно вертикальной плоскости симметрии оболочки. Будем считать, что $p_x = 0$. Радиальную нагрузку p_n и тангенциальную нагрузку p_φ в этом случае можно представить в форме рядов Фурье с коэффициентами, зависящими от осевой координаты x :

$$p_n = p_{n_0} + p_{n_1} \cos \varphi + \sum_{n=2}^{\infty} p_{n_n} \cos n \varphi; \tag{6.71}$$

$$p_\varphi = p_{\varphi_1} \sin \varphi + \sum_{n=2}^{\infty} p_{\varphi_n} \sin n \varphi.$$

Осесимметричная часть нагрузки p_{n_0} , как и следовало ожидать, не создает перемещения ω , поскольку $\varepsilon_2 = 0$. Нагрузке p_{n_0} соответствует кольцевое усилие $T_2 = p_{n_0} R$. Отдельно рассмотрим нагрузки

$$p_n = p_{n_1} \cos \varphi, \quad p_\varphi = p_{\varphi_1} \sin \varphi. \tag{6.72}$$

Такие нагрузки возникают от веса и гидростатического давления. Для этих нагрузок

$$\frac{\partial^4 p_n}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^3 p_{\varphi_1}}{\partial \varphi^3} = (p_{n_1} - p_{\varphi_1}) \cos \varphi.$$

Соответствующее радиальное перемещение будем искать в виде

$$\omega = \omega_1 \cos \varphi.$$

При подстановке двух последних соотношений в уравнение (6.66) получим

$$\frac{\partial^4 \omega_1}{\partial x^4} = \frac{1}{BR^2} (p_{n_1} - p_{\varphi_1}). \tag{6.73}$$

Следовательно, действие нагрузок, определяемых формулами (6.72), не вызывает изгиба поперечного сечения оболочки; оболочка работает на поперечный изгиб как балка. Действительно, эти нагрузки, приложенные к поверхности оболочки, эквивалентны поперечной погонной силе

$$p = R \int_0^{2\pi} (p_{n_1} \cos^2 \varphi - p_{\varphi_1} \sin^2 \varphi) d\varphi = \pi (p_{n_1} - p_{\varphi_1}) R,$$

действующей на балку. Если теперь через y обозначить прогиб оси оболочки как балки, то радиальное перемещение оболочки $\omega = y \cos \varphi$. Нетрудно видеть, что $\omega_1 = y$ и уравнение (6.73) можно

представить в форме $d^4y/dx^4 = p/(B\pi R^3)$. Но $B = Eh$ и $\pi R^3h = J$, где J — момент инерции поперечного сечения оболочки. Следовательно, уравнение (6.73) эквивалентно уравнению

$$EJ \frac{d^4y}{dx^4} = p$$

для поперечного изгиба оболочки как балки.

Таким образом, оболочку, находящуюся под действием нагрузок, выраженных соотношениями (6.72), надо рассчитать на изгиб как балку. Согласно уравнению (6.58) кольцевое усилие от этих нагрузок $T_2 = p_{n_1} R \cos \varphi$.

Из этой формулы следует важный вывод, что от действия чисто гидростатической нагрузки $p_n = p_{n_0} + p_{n_1} \cos \varphi$ кольцевое усилие в цилиндрической оболочке $T_2 = p_n R$.

Рассмотрим теперь только нормальные составляющие нагрузки, изменяющиеся в поперечном сечении по гармоникам с номерами $n > 1$:

$$p_n = p_{n_n} \cos n\varphi.$$

Правая часть уравнения (6.66) будет равна

$$\frac{R^{-2}}{B} n^4 p_{n_n} \cos n\varphi.$$

Перемещение w будем искать в форме $w = w_n \cos n\varphi$.

Из уравнения (6.66) в частных производных получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции

$$\frac{d^4 w_n}{dx^4} + D \frac{n^4 (n^2 - 1)^2}{BR^6} w_n = \frac{n^4}{BR^2} p_{n_n}. \quad (6.74)$$

Это уравнение аналогично уравнению изгиба балки на упругом основании:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{k}{EJ} y = \frac{p}{EJ}.$$

Если под величиной EJ для цилиндрической оболочки понимать ее изгибную жесткость как балки, т. е. считать $EJ = \pi R^3 Eh = \pi R^3 B$, то можно считать, что жесткость k упругого основания и поперечная нагрузка для условной балки на упругом основании зависят от номера гармоники n :

$$k = \pi \frac{Eh^3}{12R^3} n^3 (n^2 - 1)^2 = \pi D \frac{n^4 (n^2 - 1)^2}{R^3}; \quad p = \pi R p_{n_n} n^4.$$

Обозначив $Dn^4 (n^2 - 1)^2 / (BR^6) = 4\beta_n^4$, представим уравнение (6.74) в виде

$$\frac{d^4 w_n}{dx^4} + 4\beta_n^4 w_n = \frac{n^4}{BR^2} p_{n_n}. \quad (6.75)$$

Общее решение этого уравнения можно представить в двух эквивалентных формах:

$$\omega_n = \omega_n^* + e^{-\beta_n x} (A \sin \beta_n x + B \cos \beta_n x) + e^{\beta_n x} (C \sin \beta_n x + D \cos \beta_n x); \quad (6.76)$$

$$\omega_n = \omega_n^* + C_1 \operatorname{sh} \beta_n x \sin \beta_n x + C_2 \operatorname{sh} \beta_n x \cos \beta_n x + C_3 \operatorname{ch} \beta_n x \times \times \sin \beta_n x + C_4 \operatorname{ch} \beta_n x \cos \beta_n x. \quad (6.77)$$

В этих формулах через ω_n^* обозначено частное решение уравнения (6.75).

Если нагрузка p_{n_n} изменяется по закону $p_{n_n} = a_n + b_n x + c_n x^2 + d_n x^3$, то частное решение уравнения (6.75) будет выражаться простой формулой

$$\omega_n^* = \frac{p_{n_n} n^4}{BR^2 4\beta_n^4} = \frac{p_{n_n} R^4}{D(n^2 - 1)^2}.$$

Справедливость этой формулы легко проверить подстановкой в дифференциальное уравнение.

Константы A, B, C, D или C_1, C_2, C_3, C_4 следует определять из граничных условий на краях оболочки. Когда все функции ω_n найдены, перемещение ω оболочки (за вычетом перемещения от общего изгиба оболочки как балки) можно определить из формулы

$$\omega = \sum_{n=2}^{\infty} \omega_n \cos n \varphi.$$

Зная перемещение ω , легко найти и все другие расчетные величины. Изгибающий момент M_2 определяют по формуле (6.56), усилие T_2 — из уравнения (6.58), усилие T_1 — из уравнения (6.65).

§ 6.5. Основы теории мягких оболочек

Теория мягких оболочек применяется при расчете тонкостенных конструкций, изгибная жесткость которых весьма мала. Одна из важных особенностей таких конструкций состоит в том, что при определенных условиях на поверхности оболочки могут появляться мелкие складки. Они возникают в результате действия сжимающих сил. Оболочка или отдельные ее участки как бы теряют устойчивость. Силы, действующие в направлении, перпендикулярном складкам, малы и при расчете принимаются равными нулю.

На поверхности оболочки есть также зоны, где оба главных усилия — растягивающие. Они во многих случаях занимают значительную ее часть. При определении геометрии и силовых факторов в оболочке при нахождении границ участков складок не может быть применено правило неизменности начальных размеров. Уравнения равновесия должны быть составлены для деформированного состояния. Наиболее общей оказывается теория больших деформаций оболочки, использующая нелинейные геометрические и физические соотношения.

При исследовании и расчете конструкций, имеющих ограниченные деформации, применяется приближенная теория — **техническая теория мягких оболочек**. Она основана на общем нелинейном подходе, но предполагает выделение некоторого основного напряженного состояния и линеаризацию системы уравнений оболочки.

Ниже рассмотрены некоторые вопросы теории мягких оболочек. Особенности построения исходных зависимостей, их обоснование и применение для расчета выявлены в задаче о деформировании мягкой цилиндрической оболочки, нагруженной равномерным давлением.

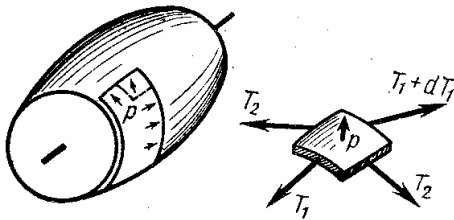


Рис. 6.7

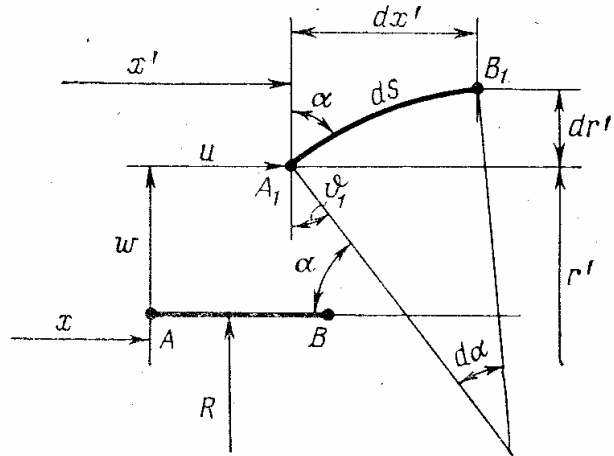


Рис. 6.8

При осесимметричном нагружении цилиндрическая оболочка становится оболочкой вращения (рис. 6.7). Уравнения равновесия мягкой оболочки, как уже указывалось, составляются для деформированного состояния и по виду совпадают с уравнениями оболочки вращения

$$\frac{dT_1}{R'_1 d\alpha} + (T_1 - T_2) \frac{\cos \alpha}{r'} = 0; \quad (6.78)$$

$$T_1/R'_1 + T_2/R'_2 = p. \quad (6.79)$$

Нужно отметить, что неизвестными величинами здесь оказываются не только силы T_1 и T_2 , но и геометрия деформированной оболочки, т. е. размеры R'_1 ; R'_2 ; r' .

На рис. 6.8 изображен элемент оболочки в начальном AB и деформированном A_1B_1 состояниях. Точка A при деформации переходит в точку A_1 , получая перемещения u , w . Координаты точки A_1 следующие:

$$x' = x + u; \quad r' = R + w.$$

Очевидно, что приращения координаты x' и радиуса r' равны

$$dx' = dx + du; \quad dr' = dw. \quad (6.80)$$

В точке A_1 нормаль к деформированной поверхности и ось вращения образуют угол α . Из рис. 6.8 видно, что

$$\frac{dx'}{ds} = \sin \alpha; \quad \frac{dr'}{ds} = \cos \alpha.$$

Имея в виду соотношения (6.80), получаем

$$\frac{dx}{ds} + \frac{du}{ds} = \sin \alpha; \quad \frac{dw}{ds} = \cos \alpha. \quad (6.81)$$

Так как длины дуг A_1B_1 и AB связаны зависимостью $ds = dx \times (1 + \varepsilon_1)$, то уравнения (6.81) можно представить в виде

$$\frac{du}{dx} + 1 = (1 + \varepsilon_1) \sin \alpha; \quad \frac{dw}{dx} = (1 + \varepsilon_1) \cos \alpha. \quad (6.82)$$

Эти геометрические соотношения получены без каких-либо ограничений на величины перемещений. Они должны быть дополнены следующими зависимостями:

$$\frac{1}{R'_1} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{(1 + \varepsilon_1) dx}; \quad \frac{1}{R'_2} = \frac{\sin \alpha}{r'} = \frac{\sin \alpha}{R(1 + \varepsilon_2)}; \quad \varepsilon_2 = \frac{w}{R}. \quad (6.83)$$

Выразив значения кривизн в уравнениях равновесия (6.78) и (6.79) через соотношения (6.83), получим

$$\frac{dT_1}{dx} + (T_1 - T_2) \frac{1 + \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_2} \frac{\cos \alpha}{R} = 0; \quad (6.84)$$

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{T_2}{T_1} \frac{1 + \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_2} \frac{\sin \alpha}{R} = \frac{p}{T_1} (1 + \varepsilon_1). \quad (6.85)$$

К полученным уравнениям необходимо добавить уравнения, связывающие деформации и силы T_1 , T_2 . Они могут иметь самую разную форму в зависимости от материала оболочки.

Для нелинейно-упругого высокоэластичного материала одна из простых физических зависимостей может быть определена выражением удельной упругой энергии деформации в такой форме:

$$U_0 = \frac{1}{2} C [(1 + \varepsilon_1)^2 + (1 + \varepsilon_2)^2 + (1 + \varepsilon_3)^2 - 3],$$

где коэффициент C имеет размерность напряжения и соответствует модулю упругости второго рода; ε_1 , ε_2 , ε_3 — деформации вдоль главных осей. Для нелинейно-упругого тела соответствующие напряжения определяются соотношениями [21]:

$$\sigma_1 = \frac{1}{(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3)} \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_1} + p_0;$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{(1 + \varepsilon_3)(1 + \varepsilon_1)} \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_2} + p_0;$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)} \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_3} + p_0,$$

где p_0 — напряжение, определяемое гидростатическим давлением. Его значение может быть определено из такого, например, дополнительного условия, как равенство нулю напряжения σ_3 . Будем считать также, что упругое тело при деформировании не изменяет объема, т. е. $(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) = 1$.

Таким образом, деформация ε_3 в направлении нормали к поверхности оболочки, соответствующая изменению толщины, связана с деформациями ε_1 и ε_2 . Напряжения σ_1 и σ_2 тогда выражаются так:

$$\sigma_1 = C \left[(1 + \varepsilon_1)^2 - \frac{1}{(1 + \varepsilon_1)^2 (1 + \varepsilon_2)^2} \right];$$

$$\sigma_2 = C \left[(1 + \varepsilon_2)^2 - \frac{1}{(1 + \varepsilon_1)^2 (1 + \varepsilon_2)^2} \right].$$

При решении задач обычно используются не напряжения, а силы T_1 и T_2 . Соотношения между ними можно представить следующим образом:

$$T_1 = \sigma_1 h = \sigma_1 h_0 (1 + \varepsilon_3) = \sigma_1 h_0 / [(1 + \varepsilon_1) (1 + \varepsilon_2)];$$

$$T_2 = \sigma_2 h = \sigma_2 h_0 (1 + \varepsilon_3) = \sigma_2 h_0 / [(1 + \varepsilon_1) (1 + \varepsilon_2)].$$

Здесь h и h_0 — толщины оболочки соответственно в деформированном и начальном состояниях. Окончательные зависимости между силами и деформациями вдоль главных осей следующие:

$$T_1 = C h_0 \left[\frac{1 + \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_2} - \frac{1}{(1 + \varepsilon_1)^3 (1 + \varepsilon_2)^3} \right]; \quad (6.86)$$

$$T_2 = C h_0 \left[\frac{1 + \varepsilon_2}{1 + \varepsilon_1} - \frac{1}{(1 + \varepsilon_1)^3 (1 + \varepsilon_2)^3} \right]. \quad (6.87)$$

Уравнения (6.82), (6.84) ... (6.87) и последнее из соотношений (6.83) представляют собой полную систему зависимостей, необходимых для решения задачи. Перепишем ее в той последовательности, в которой проводится численное интегрирование:

$$\varepsilon_2 = w/R;$$

$$T_1 = C h_0 \left[\frac{1 + \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_2} - \frac{1}{(1 + \varepsilon_1)^3 (1 + \varepsilon_2)^3} \right];$$

$$T_2 = C h_0 \left[\frac{1 + \varepsilon_2}{1 + \varepsilon_1} - \frac{1}{(1 + \varepsilon_1)^3 (1 + \varepsilon_2)^3} \right];$$

$$\frac{dT_1}{dx} + (T_1 - T_2) \frac{1 + \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_2} \frac{1}{R} \cos \alpha = 0; \quad (6.88)$$

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{T_2}{T_1} \frac{1 + \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_2} \frac{1}{R} \sin \alpha = \frac{\rho}{T_1} (1 + \varepsilon_1);$$

$$\frac{dw}{dx} - (1 + \varepsilon_1) \cos \alpha = 0;$$

$$\frac{du}{dx} + 1 - (1 + \varepsilon_1) \sin \alpha = 0.$$

Для интегрирования уравнений системы необходимо на каждом граничном контуре иметь по два граничных условия.

Цилиндрическая оболочка длиной l , закрепленная на каждом из торцов, имеет следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \omega(0) = 0; & & u(0) = 0; \\ \alpha(l/2) = \pi/2 & & T_1(l/2) = p(R + \omega)/2. \end{aligned} \quad (6.89)$$

Интервал интегрирования разбивается на n участков. Шаг разбивки $\Delta = l/(2n)$. Обозначим через i некоторую текущую точку: $i = 0$ — точка при $x = 0$; $i = n$ — точка при $x = l/2$. Воспользуемся при интегрировании уравнений системы (6.88) методом начальных параметров. В начале интервала необходимо задаться двумя начальными параметрами. Для условий (6.89) при $x = 0$ примем начальные параметры $\alpha = A$; $T_1 = B$. Если в начале интервала известна сила T_1 и деформация $\varepsilon_2 = 0$, так как $\omega = 0$, то из второго уравнения системы (6.88) можно найти величину ε_1 , а из третьего — величину T_2 . Таким образом, в начальной точке $i = 0$ известны все силы, деформации и перемещения. Приступим к определению их в следующей точке. Для этого нужно с помощью последних четырех уравнений системы (6.88) найти вначале приращения,

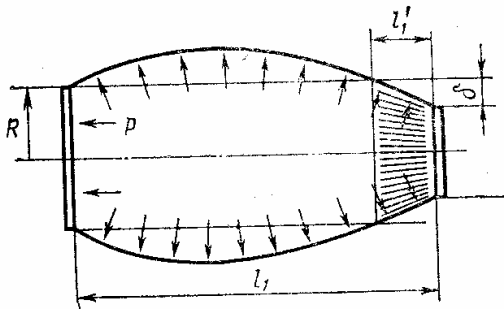


Рис. 6.9

а затем и сами величины T_1 , α , ω , u при $i = 1$. Далее опять обращаемся к первым трем уравнениям, чтобы определить величины ε_2 , ε_1 , T_2 и т. д. Таким образом проходим всю область интегрирования вплоть до $i = n$. При этом сила T_1 и угол α должны удовлетворять условиям (6.89) при $x = l/2$. Если эти условия не выполняются, необходимо провести повторные расчеты при новых значениях начальных параметров α и T_1 при $x = 0$.

При расчете мягких оболочек приходится иметь дело с задачами, в которых необходимо определить силы и деформированную геометрию оболочки, часть поверхности которой занимают складки. Условие существования складчатых участков — равенство нулю одной из главных сил. Предположим, что один из торцов цилиндрической оболочки (рис. 6.9) имеет диаметр $2(R - \delta)$ (меньше, чем диаметр $2R$ оболочки в раскройном состоянии). В этом случае вблизи этого торца имеются складки. Необходимо определить длину l' складчатой зоны и силы T_1 на всем участке. Системой уравнений (6.88) пользоваться уже нельзя. Необходимо иметь в виду условие равенства нулю окружной силы ($T_2 = 0$). Из уравнения (6.87) следует, что

$$(1 + \varepsilon_2) = (1 + \varepsilon_1)^{-1/2}.$$

Тогда система уравнений мягкой оболочки в складчатом состоянии принимает вид:

$$\begin{aligned} T_1 &= Ch_0 [(1 + \varepsilon_1)^{3/2} - (1 + \varepsilon_1)^{-3/2}]; \\ \frac{dT_1}{dx} + T_1(1 + \varepsilon_1)^{3/2} \cos \alpha \frac{1}{R} &= 0; \end{aligned}$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{p}{T_1}; \quad (6.90)$$

$$\frac{dw}{dx} - (1 + \varepsilon_1) \cos \alpha = 0;$$

$$\frac{du}{dx} + 1 - (1 + \varepsilon_1) \sin \alpha = 0.$$

В случае, если складки имеются на всей поверхности оболочки, уравнения (6.90) полностью определяют ее геометрию и силы. Но когда только часть оболочки имеет складки, как, например, на рис. 6.9, уравнения (6.90) нужно решать вместе с системой (6.88). Последовательность интегрирования уравнений здесь та же, что и рассмотренная ранее. Отличие состоит лишь в том, что при решении уравнений (6.88) необходимо выбрать начальные параметры так, чтобы в пределах участка интегрирования окружная сила T_2 стала равной нулю. С этой точки нужно вести интегрирование, используя систему (6.90). В конце интервала требуется удовлетворить граничные условия

$$w = -\delta; \quad T_1 = p(R - \delta)/(2 \sin \alpha),$$

где δ — разница радиусов торцов оболочки.

Получим решения рассмотренных задач, используя техническую теорию мягких оболочек. Выделим основное напряженное состояние, соответствующее безмоментной теории. По этой теории для оболочки, имеющей жесткие днища, меридиональная и окружная силы равны

$$T_{10} = pR/2; \quad T_{20} = pR.$$

Полные усилия в оболочке представим в виде некоторой суммы:

$$T_1 = T_{10} + \bar{T}_1; \quad T_2 = T_{20} + \bar{T}_2.$$

Деформации ε_1 и ε_2 считаются малыми по сравнению с единицей. В соответствии с принятыми допущениями упростим систему (6.88), для чего проведем линеаризацию уравнений. Дополнительные силы \bar{T}_1 и \bar{T}_2 связаны с деформациями соотношениями

$$\bar{T}_1 = 4Ch_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2/2) - T_{10}; \quad \bar{T}_2 = 4Ch_0(\varepsilon_2 + \varepsilon_1/2) - T_{20}. \quad (6.91)$$

На рис. 6.8 угол $\alpha = \pi/2 - \vartheta_1$, где ϑ_1 — угол поворота нормали к поверхности.

Уравнения равновесия примут вид

$$\frac{d\bar{T}_1}{dx} + (T_{10} - T_{20}) \frac{1}{R} \vartheta_1 = 0;$$

(6.92)

$$-T_{10} \frac{d\vartheta_1}{dx} + \frac{1}{R} \bar{T}_2 + \frac{\varepsilon_1}{R} T_{20} - \frac{\varepsilon_2}{R} T_{20} = 0.$$

Геометрические соотношения также упрощаются:

$$\frac{dw}{dx} = \vartheta_1; \quad \frac{du}{dx} = \varepsilon_1, \quad \frac{w}{R} = \varepsilon_2. \quad (6.93)$$

Выразим полученную систему уравнений через перемещения. В начале соотношения (6.91) подставим в уравнение (6.92), а затем деформации и угол поворота представим через перемещения u и w с помощью соотношений (6.93). Получим два уравнения:

$$4Ch_0 \frac{d^2u}{dx^2} + 2Ch_0 \frac{dw}{Rdx} + (T_{10} - T_{20}) \frac{1}{R} \frac{dw}{dx} = 0; \quad (6.94)$$

$$-T_{10} \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{R^2} (4Ch_0 - T_{10})w + \frac{1}{R} (2Ch_0 + T_{20}) \frac{dw}{dx} = p.$$

Заметим, что в каждом из этих уравнений имеются слагаемые, неравноценные по значению. Действительно, при малых деформациях

$$Ch_0 \gg T_{10}; \quad Ch_0 \gg T_{20}.$$

Учитывая это обстоятельство, упростим систему (6.94):

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{2R} \frac{dw}{dx} &= 0; \\ -T_{10} \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{4}{R^2} Ch_0 w + \frac{2}{R} Ch_0 \frac{dw}{dx} &= p. \end{aligned} \quad (6.95)$$

Каждое из этих уравнений имеет второй порядок. На каждой из границ должны быть удовлетворены граничные условия относительно u и w или их производных. Полученная система (6.95) позволяет получить аналитическое решение. Проинтегрируем первое уравнение один раз:

$$\frac{dw}{dx} + \frac{1}{2R} w = C_1. \quad (6.96)$$

Левую часть этого уравнения в соответствии с соотношениями (6.93) можно представить как $\varepsilon_1 + \varepsilon_2/2$. С другой стороны, из выражений (6.91) следует, что $\varepsilon_1 + \varepsilon_2/2 = T_1/(4Ch_0)$. Тогда уравнение (6.96) можно записать в виде

$$\frac{dw}{dx} + \frac{1}{2R} w = \frac{T_1}{4Ch_0}.$$

Исключим отсюда и из второго соотношения (6.95) производную от осевого перемещения

$$-T_{10} \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{3Ch_0}{R^2} w = p - \frac{T_1}{2R}, \quad (6.97)$$

которое называют уравнением безмоментного краевого эффекта. Обозначим $3Ch_0/(T_{10} R^2) = \lambda^2$. Решение уравнения (6.97) состоит из слагаемого, соответствующего линейной безмоментной теории:

$$w^* = \frac{pR^2}{3Ch_0} - \frac{T_1 R}{6Ch_0}, \quad (6.98)$$

и части, отражающей влияние краев на деформацию оболочки:

$$w = w^* + C_2 e^{-\lambda x} + C_3 e^{\lambda x}. \quad (6.99)$$

Константы C_2 и C_3 могут быть определены из граничных условий, заданных на каждом торце оболочки. Для длинных оболочек второе слагаемое в формуле (6.99) можно не учитывать. Тогда, например, для граничного условия: $w(0) = 0$ радиальное перемещение описывается соотношением

$$w = w^* (1 - e^{-\lambda x}),$$

которое показывает, что вдали от края перемещение w определяется зависимостью (6.98). Перемещение вдоль оси оболочки может быть найдено из уравнения (6.96).

Рассмотрим решение задачи, когда часть оболочки имеет складки. В системе (6.90) после линеаризации третье и четвертое уравнения принимают вид:

$$\frac{d^2 w_1}{dx^2} = -\frac{p}{T_{10}}. \quad (6.100)$$

Нетрудно видеть, что оно соответствует уравнению плоской нити, растянутой силой T_{10} и нагруженной поперечной нагрузкой p . Чтобы определить геометрию оболочки вблизи участка складок, уравнение (6.100) нужно решать совместно с уравнением (6.97). Поместим начало отсчета на правом торце оболочки (рис. 6.9). Граничные условия задачи следующие:

$$\begin{aligned} w_1(0) &= -\delta; \\ w_1(l_1) &= w; \\ \frac{dw(l_1)}{dx} &= \frac{dw}{dx}; \\ T_2(l_1) &= 0; \\ w(l_1) &= 0. \end{aligned} \quad (6.101)$$

Так как величина l_1 неизвестна, число граничных условий здесь на единицу больше суммарного порядка дифференциальных уравнений. Условия (6.101) полностью определяют радиальные перемещения оболочки при малых деформациях. На участке складок они равны:

$$\frac{w_1}{R} = -\frac{\delta}{R} + \sqrt{\frac{2Ch_0}{3pR}} \left(\frac{\delta}{R} + \frac{9}{4} \frac{pR}{Ch_0} \right) \frac{x}{R} - \frac{x^2}{R^2}.$$

В соседней зоне при $x > l_1$

$$\frac{w}{R} = \frac{3pR}{Ch_0} \left[\frac{3}{4} - e^{-\lambda(x-l_1)} \right],$$

где длину зоны складок l_1 можно определить по формуле

$$l_1 = \sqrt{\frac{Ch_0}{6pR}} \left(\delta - \frac{3pR^2}{4Ch_0} \right).$$

Приведенные решения иллюстрируют основные подходы к расчету мягких оболочек. Рассматривались простые одномерные задачи в общей нелинейной и упрощенной линеаризованной постановке. При нелинейной постановке необходимо составлять численные алгоритмы расчета, в другом случае иногда можно построить аналитические решения. Упрощенные результаты могут не только применяться для расчета конструкций, работающих при малых деформациях, но и быть основой для получения более точных нелинейных решений.

§ 6.6. Расчеты оболочек по предельным нагрузкам

При расчете по предельным нагрузкам реальный материал конструкции обычно заменяют схематизированным жесткопластическим телом, диаграмма деформирования которого показана на рис. 6.10, а. При однородном одноосном нагружении такое жесткопластическое тело остается недеформируемым до тех пор, пока напряжение в нем меньше предела текучести σ_T , при достижении напряжением значения σ_T тело деформируется неограниченно. Значение предела текучести жесткопластического тела будем в дальнейшем называть предельным напряжением. Несмотря на такую грубую схематизацию свойств реальных материалов, использование диаграммы жесткопластического тела часто позволяет достаточно точно и, главное, сравнительно просто оценить предельные нагрузки (несущую способность) многих элементов силовых конструкций.

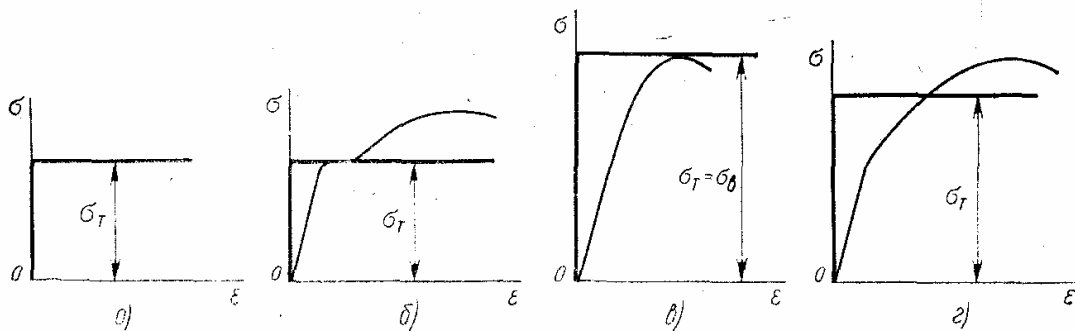


Рис. 6.10

Значение предельного напряжения σ_T жесткопластического тела, «заменяющего» реальный материал, следует выбирать, исходя из конкретного вида диаграммы деформирования реального материала. Если диаграмма растяжения имеет выраженную площадку текучести, то значение предельного напряжения σ_T естественно взять равным пределу текучести реального материала (рис. 6.10, б). Когда на диаграмме отсутствует площадка текучести (рис. 6.10, в), за значение предельного напряжения можно взять предел прочности $\sigma_в$ реального материала. А в случае диаграммы без площадки текучести, но с четко выраженным участком упрочнения (рис. 6.10, г) замена реального материала жесткопластическим телом становится вообще весьма условной.

Но для оценочных расчетов по несущей способности такая замена возможна, причем можно, например, значение предельного напряжения σ_T жесткопластического тела ориентировочно взять равным половине суммы предела прочности и предела текучести (по точке перелома графика) реального материала.

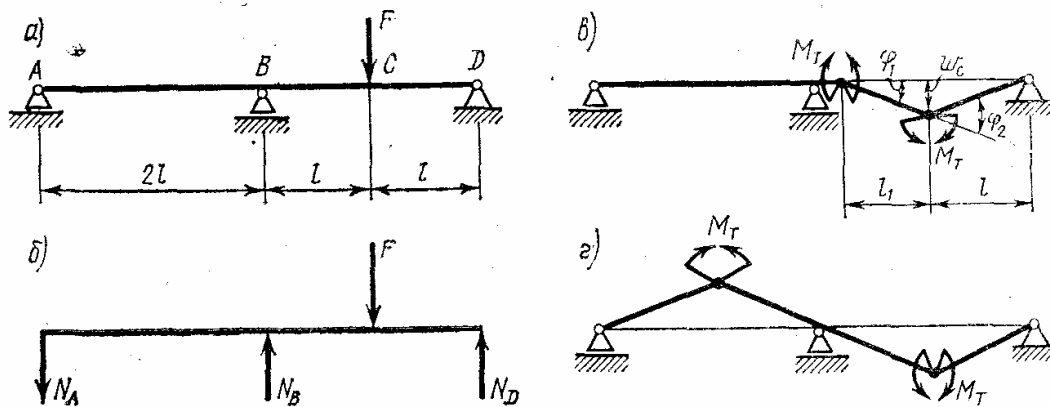


Рис. 6.11

Рассмотрим конструкцию, материал которой схематизирован жесткопластическим телом. Значение нагрузки, при которой такая конструкция в результате развития пластических деформаций становится кинематически изменяемой (превращается в механизм), называется предельной нагрузкой. Определение предельных нагрузок покажем сначала на простейшем примере поперечного изгиба неразрезной балки (рис. 6.11). При заданной форме поперечного сечения балки, пренебрегая влиянием перерезывающей силы, нетрудно найти максимальное значение момента M_T , при котором в сечении балки образуется так называемый пластический шарнир. Так, например, для балки с прямоугольным поперечным сечением (рис. 6.12), очевидно, $M_T = \sigma_T h^2 b / 4$.

Известны два основных метода определения предельных нагрузок: статический и кинематический. В статическом методе рассматривают различные статически возможные состояния равновесия, при которых изгибающие моменты в сечениях балки нигде не превышают M_T , т. е. когда всюду в балке $M \leq M_T$. Нагрузку, соответствующую статически возможному состоянию равновесия, обозначим $F_{ст}$. В теории предельного анализа конструкций [14] показано, что из всех статически возможных состояний равновесия истинным предельным состоянием будет то, которому соответствует наибольшее значение нагрузки $F_{ст}$; другими словами, предельная нагрузка $F_{пр}$ является максимумом всех статически возможных нагрузок $F_{ст}$:

$$F_{пр} = F_{ст \max}. \quad (6.102)$$

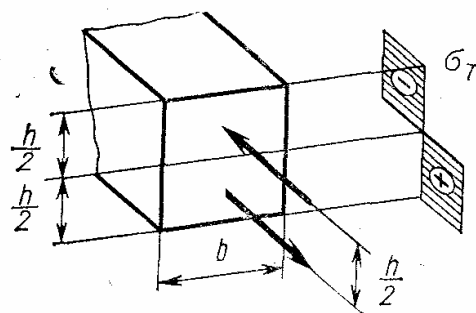


Рис. 6.12

В приближенных решениях сложных задач, когда задают статически возможное состояние равновесия, величина $F_{ст}$ дает для предельной нагрузки $F_{пр}$ оценку снизу. Если рассматривают несколько статически возможных состояний, то лучшее приближение к точному решению дает то состояние, которому соответствует наибольшее значение $F_{ст}$.

Для рассматриваемой трехопорной балки (см. рис. 6.11, а) статически возможным состояниям равновесия соответствуют значения реакций в опорах A и D (см. рис. 6.11, б):

$$N_A \leq M_T/(2l); \quad N_D \leq M_T/l.$$

Первое неравенство должно выполняться, поскольку иначе изгибающий момент над опорой B превысит значение M_T . Второе неравенство гарантирует, что в сечении C изгибающий момент не превысит значения M_T . Приравняв нулю сумму моментов относительно точки B , получим

$$Fl = N_A 2l + N_D 2l \leq 3M_T,$$

откуда находим

$$F_{ст} = 3M_T/l.$$

В кинематическом методе рассматривают различные кинематически возможные варианты превращения в механизм заданной конструкции при заданном конкретном ее нагружении и закреплении. Рассмотрим тот же пример на рис. 6.11, а. Превращение в механизм трехопорной балки требует образования минимум двух пластических шарниров, как изображено на рис. 6.11, в, г. Значение нагрузки $F_{кин}$, соответствующее выбранному кинематически возможному состоянию, определяют на основе начала возможных перемещений из условия равенства работ внешних и внутренних сил.

По теории предельного анализа конструкций [14] из всех кинематически возможных состояний истинным предельным состоянием будет то, которому соответствует наименьшее значение нагрузки $F_{кин}$; другими словами, предельная нагрузка $F_{пр}$ является минимумом всех кинематически возможных значений $F_{кин}$:

$$F_{пр} = F_{кин \min}. \quad (6.103)$$

В рассматриваемом примере внешняя сила F совершает работу на перемещении ω_C ; внутренние изгибающие моменты совершают работу только в пластических шарнирах, равную произведению момента M_T на соответствующий угол излома. Для кинематически возможного состояния, изображенного на рис. 6.11, в, приравнявая работу силы F работе, совершаемой в пластических шарнирах, получим, считая перемещения и углы излома малыми,

$$F\omega_C = M_T\varphi_1 + M_T\varphi_2 = M_T\omega_C (2/l_1 + 1/l),$$

или

$$F_{кин} = M_T (2/l_1 + 1/l), \text{ где } (0 < l_1 < l).$$

Отсюда находим

$$F_{пр} = F_{кин \min} = 3M_T/l, \text{ где } (l_1 = l).$$

Нетрудно убедиться, что к тому же результату можно прийти, рассмотрев кинематически возможное состояние, изображённое на рис. 6.11, а.

В рассмотренном примере и статический и кинематический методы дали один и тот же точный результат $F_{\text{пр}} = 3M_T/l$.

Интересно отметить, что расчет по предельным нагрузкам статически неопределимых систем принципиально ничуть не сложнее расчета статически определимых: в расчете по предельным нагрузкам раскрытие статической неопределимости не производят, а сразу рассматривают состояние равновесия системы, превратившейся в механизм. Правда, при этом распределение напряжений в системе до ее превращения в механизм остается полностью неизвестным.

Расчет балок по предельным нагрузкам при поперечном изгибе не сложен, потому что условие возникновения течения в балке (условие образования пластического шарнира) определяется значением одного единственного внутреннего силового фактора — изгибающего момента. Так же просто подсчитать предельные нагрузки и в стержневых системах, отдельные стержни которых работают только на растяжение или сжатие. Для пластин и особенно для оболочек вся техника вычисления предельных нагрузок существенно усложняется, поскольку условие течения в них определяется комбинацией значений нескольких внутренних силовых факторов. Но сам подход к определению предельных нагрузок и сущность статического и кинематического методов остаются теми же.

Рассмотрим, например, условия течения для цилиндрической оболочки из жесткопластического материала при осесимметричном деформировании. Основные внутренние силовые факторы для рассматриваемого случая — это окруженные и меридиональные силы T_2 и T_1 и меридиональные изгибающие моменты M_1 . Если в сечении оболочки действуют только меридиональные силы T_1 , то условием текучести будет равенство

$$T_1 = \sigma_T h = T_T, \quad (6.104)$$

где h — толщина оболочки, σ_T — предел текучести материала. Если сечение оболочки подвержено действию только окружных сил T_2 , то получим аналогичное условие текучести:

$$T_2 = \sigma_T h = T_T. \quad (6.105)$$

Наконец, если в сечении оболочки действуют только изгибающие моменты M_1 , то условие текучести (аналогичное условию образования пластического шарнира в балке прямоугольного поперечного сечения) будет

$$M_1 = \sigma_T h^2/4 = M_T. \quad (6.106)$$

В дальнейшем будут использоваться безразмерные величины для выражения меридиональной и окружной сил и меридионального изгибающего момента:

$$n_1 = T_1/T_T; \quad n_2 = T_2/T_T; \quad m_1 = M_1/M_T. \quad (6.107)$$

Величины n_1, n_2, m_1 в предельном анализе конструкций носят название обобщенных безразмерных сил. Теперь задачу определения условий текучести можно сформулировать так: для заданного закона текучести (например, условия Треска или Мизеса [14]) выразить условие текучести оболочки через обобщенные силы n_1, n_2, m_1 .

Можно доказать, что в трехмерном пространстве n_1, n_2, m_1 условию текучести будет соответствовать невогнутая поверхность — так называемая поверхность текучести.

Поскольку полное построение поверхности текучести связано с довольно длительными и громоздкими расчетами, то сейчас мы ограничимся построением только трех сечений этой поверхности координатными плоскостями $m_1 = 0, n_2 = 0; n_1 = 0$ для условия текучести Треска

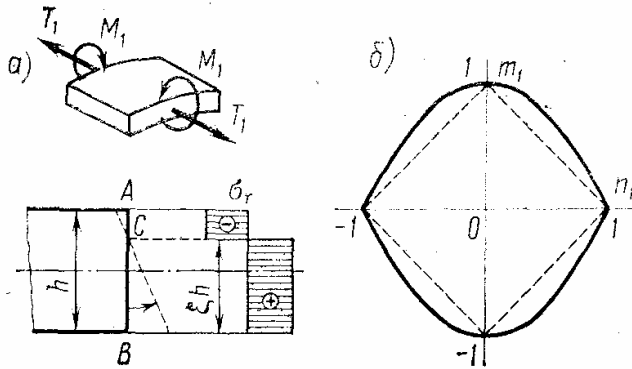


Рис. 6.13

$$\max \{ |\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2| \} = \sigma_T.$$

Сечение поверхности текучести плоскостью $m_1 = 0$ очевидно: если изгибающий момент равен нулю, то и окружные, и меридиональные напряжения постоянны по толщине оболочки и условия текучести будут

$$\max \{ |n_1|, |n_2|, |n_1 - n_2| \} = 1. \quad (6.108)$$

Другими словами, нужно, чтобы либо одна из сил, либо абсолютное значение их разности равнялись бы предельному значению T_T .

Сечение поверхности текучести плоскостью $n_2 = 0$ можно построить, учитывая следующее: если в сечении оболочки окружная сила равна нулю, то напряженное состояние в этом сечении одноосно и условием текучести тогда будет равенство $|\sigma_1| = \sigma_T$. Пример такого распределения напряжений, когда наружные волокна сжаты, показан на рис. 6.13, а. В этом случае

$$T_1 = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_1 dz = T_T (2\xi - 1); \quad M_1 = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_1 z dz = 4M_T (1 - \xi) \xi,$$

или

$$n_1 = 2\xi - 1; \quad m_1 = 4\xi (1 - \xi). \quad (6.109)$$

Исключив из соотношений (6.109) параметр ξ , можно найти связь между n_1 и m_1 , соответствующую условию текучести:

$$m_1 = 1 - n_1^2. \quad (6.110)$$

Если рассмотреть случай растянутых наружных волокон, то совершенно аналогично можно получить

$$-m = 1 - n_1^2.$$

Полный вид сечения поверхности текучести плоскостью $n_2 = 0$ показан на рис. 6.13, б; в приближенных решениях нелинейную зависимость между n_1 и m_1 часто заменяют отрезками прямых, показанных пунктиром.

Построение сечения поверхности текучести плоскостью $n_1 = 0$ (рис. 6.14, а) начнем с первого квадранта, где n_2 и m_1 положительны.

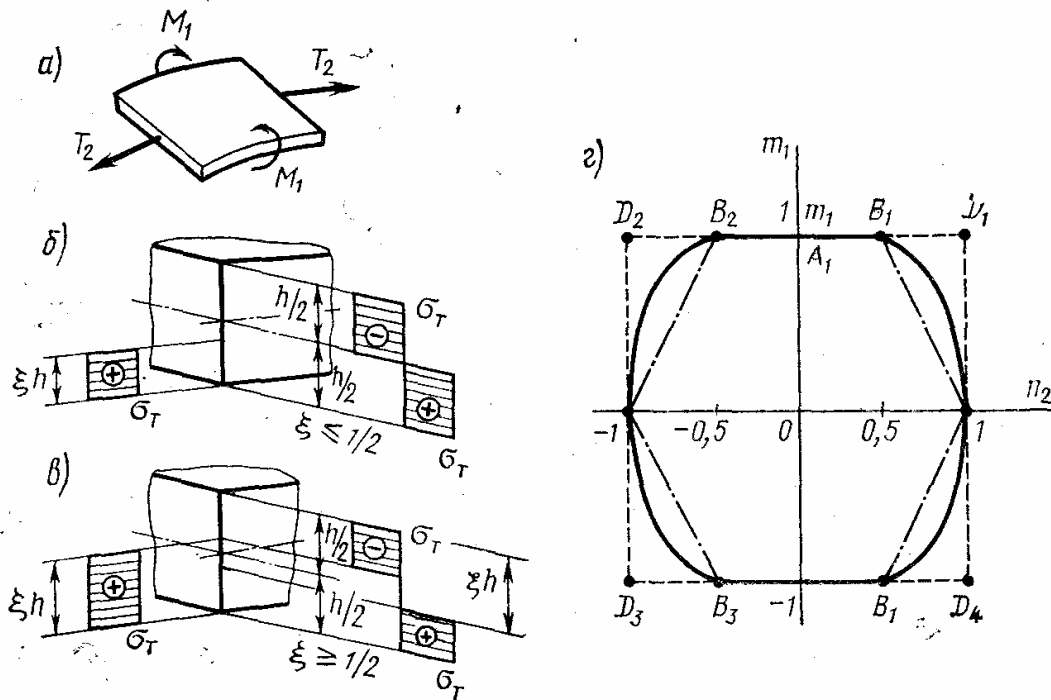


Рис. 6.14

Если $m_1 = 1$, то согласно условию текучести Треска в оболочке могут существовать растягивающие окружные напряжения, равные σ_T , причем $0 \leq \xi \leq h/2$, как показано на рис. 6.14, б; тогда

$$m_1 = 1; \quad n_2 = \xi. \quad (6.111)$$

Условию (6.111) соответствует отрезок A_1B_1 на рис. 6.14, г. Если принять $1 \geq \xi \geq h/2$, то это приведет к уменьшению осевого момента (рис. 6.24, в). В этом случае

$$m_1 = 4\xi(1 - \xi); \quad n_2 = \xi. \quad (6.112)$$

Исключая из соотношений (6.112) параметр ξ , можно найти зависимость

$$m_1 = 4n_2(1 - n_2). \quad (6.113)$$

Рассуждая аналогично, можно получить для других квадрантов кривую, показанную сплошной линией на рис. 6.14, г. В приближенных решениях зависимость между n_2 и m_1 часто упрощенно заменяют квадратом или шестиугольником, как показано на рис. 6.14, г пунктиром и штрихпунктиром.

На примере рассмотренного выше случая, когда $n_2 = 0$ (см. рис. 6.13), выясним, как деформируется сечение оболочки, находящееся

в состоянии текучести. Будем считать, что гипотеза прямых нормалей (см. § 2.4) справедлива и для пластической области деформации оболочки, поскольку эта гипотеза носит чисто геометрический характер. Тогда очевидно, что отрезок AB должен поворачиваться относительно точки C , как это показано пунктиром на рис. 6.13, *a*. При этом абсолютные значения относительного меридионального удлинения ε_1 и изменения кривизны в меридиональном направлении κ_1 остаются неопределенными. Однако для каждого конкретного распределения напряжений между ними существует определенная зависимость. Действительно, из простых геометрических соотношений (см. рис. 6.13, *a*) можно найти, что при $n_1 < 1$ $\varepsilon_1 = h(\xi - 1/2)\kappa_1$, а внутренние силы связаны с параметром ξ выражениями (6.109). При $n_1 < 1$ или согласно первому из соотношений (6.109) при $\xi < 1$ зависимость между ε_1 и κ_1 однозначна, при $n_1 = 1$ эта зависимость перестает быть однозначной, т. е. геометрически это означает, что при $n_1 = 1$ сечение может деформироваться (поворачиваться) таким образом, что центр вращения отрезка AB лежит вне сечения на расстоянии ξh от точки B , причем значение ξ в этом случае может быть любым в интервале $1 \leq \xi \leq \infty$ (условию $\xi = \infty$ соответствует растяжение сечения без изменения кривизны).

Аналогичные рассуждения о деформировании сечений оболочки, находящихся в состоянии текучести, справедливы и для других случаев сочетаний внутренних силовых факторов, но в общем случае картина деформирования усложняется двухосностью напряженного состояния.

Как можно видеть, условию текучести могут соответствовать различные комбинации значений внутренних силовых факторов. В соответствии с этим в предельном анализе конструкций говорят о различных пластических режимах работы оболочки. В общем случае, если оболочка находится в предельном состоянии, на разных ее участках могут реализовываться разные пластические режимы, и одной из основных трудностей решения задач по определению несущей способности оболочек является правильный выбор этих режимов. Общих правил по выбору пластических режимов не существует: в каждой конкретной задаче приходится просто «перебирать» разные варианты комбинаций пластических режимов, проверяя при этом выполнение геометрических условий деформирования оболочки.

В качестве простейшего примера выберем пластический режим и найдем предельное значение внутреннего давления p для шарнирно опертой по краям цилиндрической оболочки радиусом R и длиной l (рис. 6.15, *a*). Сначала решим задачу статическим методом. Поскольку меридиональная сила в рассматриваемой задаче отсутствует, то для выбора пластического режима следует воспользоваться кривой текучести, построенной при $n_1 = 0$ (см. рис. 6.14, *з*). При осесимметричной деформации уравнение равновесия цилиндрической оболочки имеет вид

$$\frac{d^2 M_1}{dx^2} + \frac{T_2}{R} = p. \quad (6.114)$$

Граничные условия рассматриваемой задачи:

$$M_1(0) = M_1(l) = 0. \quad (6.115)$$

При значении давления, равном предельному $p_{ст}$, величины M_1 и T_2 связаны между собой кривой текучести, изображенной на рис. 6.14, z сплошной линией. Таким образом, чтобы найти предельное давление, нужно проинтегрировать уравнение (6.114) при граничных условиях (6.115) и при дополнительной связи между величинами M_1 и T_2 из условия текучести. Можно упростить решение, заменив точную кривую текучести квадратом $D_1D_2D_3D_4$, изображенным на рис. 6.14, z ;

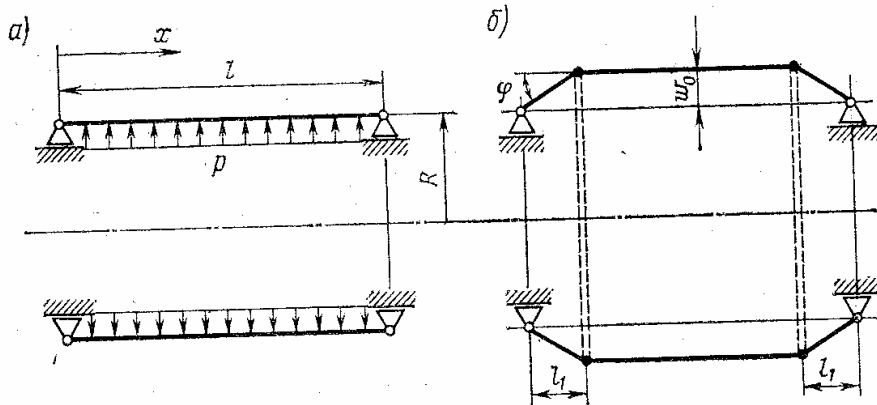


Рис. 6.15

пластический режим будем выбирать для этого квадрата. Поскольку в окружном направлении оболочка растянута, то естественно выбрать пластический режим, соответствующий стороне квадрата D_1D_4 , т. е. такой, при котором $n_2 = 1$, а значение величины m_1 может меняться от $+1$ до -1 . При выбранном пластическом режиме уравнение (6.114) примет вид

$$\frac{d^2 M_1}{dx^2} = p - \frac{T_T}{R}. \quad (6.116)$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$M_1 = \left(p - \frac{T_T}{R} \right) \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2.$$

Используя граничные условия (6.115), получаем

$$M_1 = \left(p - \frac{T_T}{R} \right) x \frac{x-l}{2}.$$

Максимальное значение M_{1max} момента будет при $x = l/2$, и, следовательно,

$$p_{ст} = \frac{T_T}{R} + \frac{8}{l^2} M_{1max}.$$

Поскольку $|M_{1max}|$ не может быть больше M_T , то окончательно для максимального значения $p_{ст}$ получаем

$$p_{ст} = \frac{T_T}{R} + \frac{8}{l^2} M_T. \quad (6.117)$$

Теперь определим предельное значение давления кинематическим методом. Для этого зададимся механизмом потери несущей способности (рис. 6.15, б). Работа внешних сил (давления) равна

$$2\pi R \int_0^l p \omega dx = 2\pi R p \left[\omega_0 (l - 2l_1) + 2 \cdot \frac{1}{2} \omega_0 l_1 \right].$$

Работа внутренних растягивающих окружных сил (согласно выбранному пластическому режиму всюду $T_2 = T_T$) на соответствующих удлинениях равна

$$2\pi R \int_0^l T_T \frac{\omega}{R} dx = 2\pi R T_T \left[\frac{\omega_0}{R} (l - 2l_1) + 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{R} l_1 \right],$$

а работа моментов M_T , образующихся в двух сечениях, равна

$$2 \cdot 2\pi R M_T \varphi = 4\pi R M_T \omega_0 / l_1.$$

Приравнявая работу внешних сил работе внутренних сил, получаем

$$p_{\text{кин}} = \frac{T_T}{R} + 2 \frac{M_T}{l_1 (l - l_1)} \text{ при } 0 \leq l_1 \leq l/2. \quad (6.118)$$

Как легко проверить, минимальному значению $p_{\text{кин}}$ будет соответствовать $l_1 = l/2$; тогда значение $p_{\text{кин}}$ получается то же, что и значение $p_{\text{ст}}$, определяемое формулой (6.117):

$$p_{\text{кин}} = \frac{T_T}{R} + \frac{8}{l^2} M_T = \frac{\sigma_T h}{R} \left(1 + 2 \frac{Rh}{l^2} \right),$$

где h — толщина стенки оболочки.

Формулы (6.117) и (6.118) получены в предположении, что меридиональные силы в оболочке при потере ее несущей способности остаются равными нулю. Другими словами, закрепление краев оболочки пред-

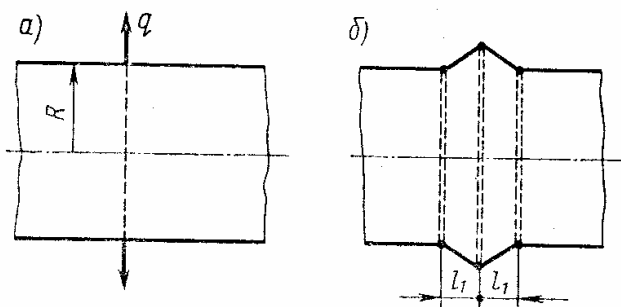


Рис. 6.16

полагается таким, что оно не препятствует их сближению. Именно в этом случае значение предельного давления оболочки конечной длины практически очень мало отличается от значения предельного давления бесконечно длинной оболочки, для которой, очевидно, $p_{\text{пр}} = \sigma_T h / R$.

Если бы при решении была использована точная кривая текучести, то совпадение результатов при решении двумя методами означало бы, что получено точное значение; в нашем же случае можно только утверждать, что полученное значение $p_{\text{пр}} = p_{\text{ст}} = p_{\text{кин}}$ не меньше точного значения.

В качестве второго примера найдем кинематическим методом предельную нагрузку для длинной цилиндрической оболочки (радиусом R), нагруженной погонной нагрузкой q (рис. 6.16, а). Механизм поте-

ри несущей способности выбираем, как показано на рис. 6.16, б. Приравнявая работу внешних сил работе внутренних сил, как было сделано в предыдущем примере, получаем

$$q_{\text{кин}} = 4M_T/l_1 + T_T l_1/R. \quad (6.119)$$

Так как кинематический метод дает завышенную оценку для предельной нагрузки, то величину l_1 в выражении (6.119) нужно подобрать из условия минимума величины $q_{\text{кин}}$. Дифференцируя выражение (6.119) по l_1 и приравнявая производную нулю, находим

$$l_1 = \sqrt{4M_T R/T_T} = \sqrt{Rh},$$

где h — толщина оболочки. Тогда из выражения (6.119) окончательно получаем

$$q_{\text{кин}} = 2 \frac{\sigma_T h}{R} \sqrt{Rh}. \quad (6.120)$$

Точное значение предельной погонной нагрузки

$$q_{\text{пр}} = 1,82 \frac{\sigma_T h}{R} \sqrt{Rh}.$$

Полученный результат довольно любопытен: вовлекаемая в деформацию («выламываемая») зона жесткопластической оболочки имеет ширину того же порядка, что и зона упругого краевого эффекта.

В рассмотренных примерах выбор пластических режимов деформирования оболочки не составлял никакого труда. В более сложных задачах приходится рассматривать целые серии возможных вариантов пластических режимов, что существенно усложняет решение. В таких случаях прибегают к помощи современных методов линейного и нелинейного программирования с использованием ЭВМ. Однако нужно отметить, что при этом теряется одно из основных преимуществ расчета по предельным нагрузкам — простота и наглядность.

Глава 7

УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИН

В главе сформулированы и решены некоторые конкретные задачи устойчивости упругих прямых стержней и прямоугольных пластин. Такие задачи встречаются при расчете тонкостенных элементов ракетных конструкций. Рассматриваются три круга вопросов: определение критических нагрузок для идеально правильных стержней и пластин, влияние начальных геометрических несовершенств и поведение упругих стержней и пластин после потери устойчивости.

Особое внимание уделено выводу однородных линеаризованных уравнений и формулировке граничных условий в задачах устойчивости идеально правильных упругих стержней и пластин и аналитическому решению этих уравнений в сравнительно простых случаях. Решения более сложных задач устойчивости стержней и пластин с помо-

щью современных численных методов, описанных в гл. 3, приведены в литературе [9, 19].

Все задачи рассмотрены в линейно-упругой постановке без учета таких свойств материала, как пластичность и ползучесть. Для расчета многих тонкостенных силовых элементов конструкций такая постановка вполне достаточна. Случаи, когда потеря устойчивости происходит за пределом упругости, изложены в III части книги, где приведены расчеты с использованием полуэмпирических корректирующих коэффициентов, учитывающих реальные свойства материала.

§ 7.1. Критические нагрузки прямых упругих стержней

Тонкий стержень, нагружаемый сосредоточенной силой F и распределенной силой $q = q(x)$, отнесем к прямоугольной системе координат, направив ось x по оси стержня (рис. 7.1, а) и поместив одну из главных центральных осей поперечного сечения в плоскости xz . Если все внешние силы и реакции опор действуют строго по оси стержня вплоть до потери устойчивости, очевидно существует состояние равновесия стержня с неискривленной осью. При достаточно малых нагрузках это *начальное состояние равновесия* будет единственным и устойчивым. Найдем наименьшее значение внешней нагрузки, при котором появляются смежные с начальным новые состояния равновесия стержня с искривленной в плоскости xz осью. Как было показано в § 1.6,

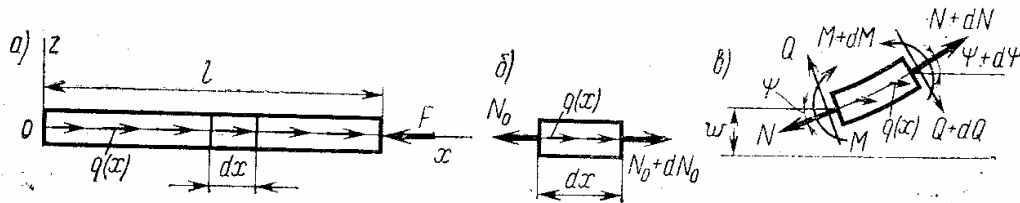


Рис. 7.1

это значение нагрузки будет критическим, т. е. при его превышении начальное состояние равновесия стержня перестанет быть устойчивым.

Условие равновесия элемента dx неискривленного стержня (рис. 7.1, б) выражается уравнением (см. § 1.5)

$$N'_0 + q = 0. \quad (7.1)$$

Здесь и далее штрихом обозначено дифференцирование по x . В дальнейшем задачу определения начальной осевой силы $N_0 = N_0(x)$ будем считать решенной и закон изменения силы по длине стержня — известным.

Рассмотрим равновесие элемента стержня в искривленном, отклоненном от исходного, состоянии (рис. 7.1, в), причем бифуркационные поперечные прогибы w и углы ψ наклона касательной будем считать бесконечно малыми. Поэтому при составлении уравнений равновесия искривленного элемента стержня можно положить $\sin \psi = \psi$, $\psi = w'$, $\sin(\psi + d\psi) = \psi + d\psi$, $\cos(\psi + d\psi) = 1$.

Приравняв нулю сумму проекций на ось x всех сил, действующих на искривленный элемент, получим

$$-N \cdot 1 - Q\psi + qdx + (N + dN) \cdot 1 + (Q + dQ)(\psi + d\psi) = 0,$$

где Q — поперечная сила, связанная с изгибом стержня. Отбрасывая произведение $dQd\psi$ как величину высшего порядка малости, приходим к уравнению

$$N' + (Q\psi)' + q = 0. \quad (7.2)$$

Приравнивая нулю сумму проекций всех сил на ось z и сумму всех моментов и отбрасывая величины высших порядков малости, получаем еще два уравнения:

$$\begin{aligned} Q' - (N\psi)' &= 0, \\ Q &= M'. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Входящий в последнее уравнение изгибающий момент M связан с поперечным прогибом зависимостью

$$M = EJ\omega'', \quad (7.4)$$

где $EJ = EJ(x)$ — изгибная жесткость стержня в плоскости xz . Тогда $Q = (EJ\omega'')'$, и в уравнении (7.2) второе слагаемое, как содержащее произведение двух величин первого порядка малости, следует отбросить, после чего это уравнение не будет отличаться от уравнения равновесия (7.1) неискривленного элемента. Следовательно, при бесконечно малых прогибах прямого стержня изменения начальной осевой силы N_0 имеют высший порядок малости и в первом из двух уравнений (7.3) следует положить $N(x) = N_0(x)$. Окончательно, выразив в этом уравнении поперечную силу Q и угол ψ через прогиб ω получим

$$(EJ\omega'')'' - (N_0\omega')' = 0. \quad (7.5)$$

Это линейное однородное уравнение четвертого порядка является *основным уравнением теории устойчивости прямых упругих стержней*. (Напомним, что в § 1.6 это уравнение было получено вариационным путем.) Оно справедливо для стержня переменной изгибной жесткости при любых нагрузках и условиях закрепления торцов. (Отметим, что аналогичное уравнение описывает и потерю устойчивости стержня в плоскости yz .)

При составлении уравнений равновесия искривленного элемента стержня внешняя нагрузка $q = q(x)$ предполагалась «мертвой», т. е. не изменяющейся ни по значению, ни по направлению при деформации стержня (рис. 7.1, в). Если внешняя нагрузка при деформации стержня ведет себя иначе, то при составлении уравнений равновесия искривленного элемента это необходимо учитывать.

Для однопролетного стержня в соответствии с порядком полученного уравнения должны быть сформулированы *четыре однородных граничных условия* (по два на каждом из торцов). Геометрические граничные условия в задачах устойчивости формулируются точно так же, как и в задачах поперечного изгиба: на торце стержня могут быть запрещены поперечное перемещение ω и (или) поворот касательной ω' .

Силловые граничные условия для ненагруженного торца тоже совпадают с граничными условиями задач изгиба. Если поперечные перемещения торца не стеснены, то поперечная сила $Q = 0$, т. е. $(EJw'')' = 0$. Когда не стеснены углы поворота, изгибающий момент $M = 0$, т. е. $EJw'' = 0$. На свободном торце $Q = 0$ и $M = 0$, т. е. $(EJw'')' = 0$ и $EJw'' = 0$.

Принципиальное отличие силовых граничных условий задач устойчивости и линейных задач поперечного изгиба выявляется тогда, когда на торец стержня передаются сосредоточенные внешние силовые факторы. Это отличие обусловлено тем, что в первом случае рассматривают условия равновесия не в исходном, а в отклоненном от исходного

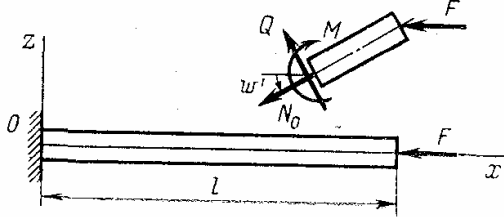


Рис. 7.2

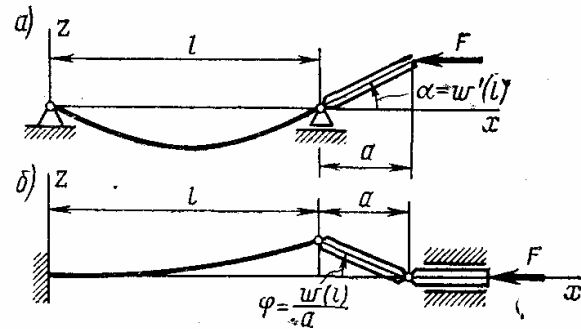


Рис. 7.3

состоянию, в то время как во втором случае условия равновесия формулируют для исходного, недеформированного состояния системы. Поэтому, если, например, к незакрепленному торцу стержня приложена «мертвая» сила F , то в отклоненном положении условие равновесия прилегающего к торцу элемента (рис. 7.2), составленное для проекции на ось z , приводит в задачах устойчивости к граничному условию $Q = -N_0w' = 0$. В данном случае, когда $N_0 = -F$, это граничное условие при $x = l$ принимает вид $(EJw'')' + Fw' = 0$.

Особого внимания при формулировке граничных условий заслуживают случаи, когда внешние нагрузки передаются на стержень с помощью промежуточных деталей, изменяющих при изгибе стержня воспринимаемое им силовое воздействие. Так, например, на правый торец стержня длиной l , изображенного на рис. 7.3, а, передается изгибающий момент, пропорциональный длине a жесткого рычага и углу поворота $\alpha = w'(l)$ касательной к оси стержня над правой опорой. Отсюда при $x = l$ следует граничное условие: $EJw'' - P\alpha w' = 0$. Остальные три граничных условия очевидны: $w(0) = 0$; $w''(0) = 0$; $w(l) = 0$. А при изгибе консольного стержня, нагружаемого через жесткий шатун (рис. 7.3, б), на правый торец кроме продольной силы F передается поперечная сила, пропорциональная углу наклона жесткого рычага $\varphi = w/a$. При $x = l$ это приводит к граничному условию $(EJw'')' + Fw' + Fw/a = 0$. Три других граничных условия таковы: $w(0) = 0$; $w'(0) = 0$; $w''(l) = 0$.

Если торцы стержня закреплены упруго — в действительности всякая реальная опора обладает той или иной степенью податливос-

ти, — то жесткость упругих опор входит в граничные условия. Например, на рис. 7.4 показан стержень длиной l , левый торец которого упруго закреплен относительно поперечных перемещений, а правый — относительно угловых. Условия равновесия примыкающих к торцам элементов стержня и запрещение поперечных перемещений правого торца при $x = 0$ приводят к граничным условиям: 1) $EJw'' = 0$; 2) $N_0w' - (EJw'')' - C_0w = 0$ и при $x = l$: 3) $EJw'' + C_M w' = 0$; 4) $w = 0$. Здесь C_0 и C_M — соответствующие жесткости упругих опор.

Уравнение (7.5) удается аналитически проинтегрировать только в некоторых случаях. Например, если стержень постоянной жесткости $EJ = \text{const}$ сжат продольной силой F , то $N_0 = -F$ и это уравнение принимает вид

$$w^{IV} + k^2 w'' = 0, \quad (7.6)$$

где $k^2 = F/(EJ)$.

Решение этого уравнения:

$$w = A_1 \sin kx + A_2 \cos kx + A_3 x + A_4, \quad (7.7)$$

где A_i — произвольные постоянные.

Как отмечалось, для однопролетного стержня должны быть заданы четыре однородных граничных условия. Подставив в них общее решение (7.7), получим систему четырех однородных линейных уравнений относительно неизвестных A_i . Для того чтобы система однородных линейных уравнений имела отличные от тождественного нуля решения, ее определитель должен быть равен нулю. Из этого условия можно найти те значения F_n , при которых существуют отличные от нуля решения, т. е. те значения сжимающей силы, при которых у стержня возможны смежные с начальным новые состояния равновесия. Наименьшее из этих значений равно критической силе

$$F_{n \text{ min}} = F_{\text{кр}}. \quad (7.8)$$

Намеченную общую схему решения проиллюстрируем примером. Рассмотрим стержень, один торец которого упруго оперт, а другой заделан (рис. 7.5, а). Запишем четыре однородных граничных условия этой задачи: 1) $w(0) = 0$; 2) $w'(0) = 0$; 3) $w''(l) = 0$; 4) $EJw'''(l) + Fw'(l) - fw(l) = 0$. Подчиняя общее решение (7.7) этим граничным условиям, получаем систему четырех линейных однородных уравнений. Приравняв нулю определитель полученной системы, можно найти характеристическое уравнение, дающее значения F_n . Практически значительно удобнее не раскрывать для этого определитель высокого порядка, а последовательно исключая неизвестные из исходной системы, выразить постоянные A_i через какую-нибудь одну из них, заведомо не равную нулю.

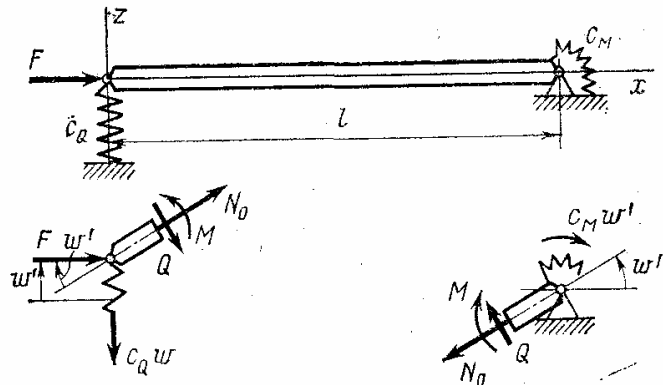


Рис. 7.4

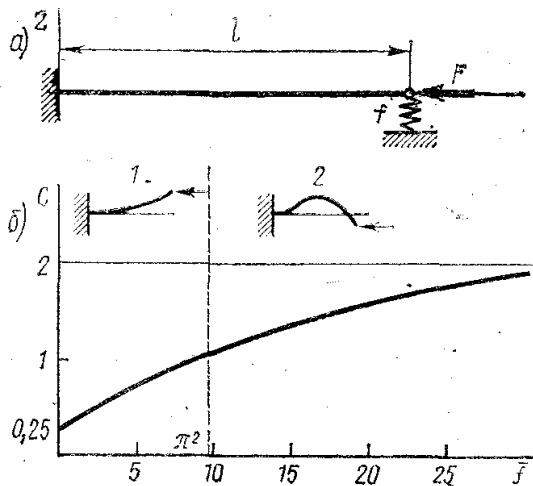


Рис. 7.5

Запишем три уравнения, вытекающие из трех первых граничных условий:

$$A_2 + A_4 = 0;$$

$$kA_1 + A_3 = 0;$$

$$-k^2 A_1 \sin kl - k^2 A_2 \cos kl = 0,$$

откуда $A_4 = -A_2$, $A_1 = -A_2 \operatorname{ctg} kl$, $A_3 = kA_2 \operatorname{ctg} kl$. Следовательно, общее решение (7.7) в рассматриваемом примере можно записать в виде

$$\omega = A_2 (-\operatorname{ctg} kl \sin kx + \cos kx + kx \operatorname{ctg} kl - 1). \quad (7.9)$$

Подчинив эту функцию четвертому граничному условию и полагая $A_2 \neq 0$, получаем характеристическое уравнение, которому после несложных преобразований можно придать следующий вид:

$$(kl)^3 \bar{f} = kl - \operatorname{tg} kl, \quad (7.9')$$

где $\bar{f} = fl^3/(EJ)$. Найдя n -й корень $(kl)_n$ этого уравнения, из выражения (7.6) получаем

$$F_n = (kl)_n^2 EJ/l^2.$$

Из условия (7.8) следует, что $F_{кр} = F_1$, где F_1 соответствует первому корню $(kl)_1$. Конкретные значения $(kl)_1$ для различных значений \bar{f} нетрудно найти графически или численным подбором; в частности, при $\bar{f} = 0$ и $\bar{f} = \infty$ получаем соответственно $(kl)_1 = \pi/2 \approx 1,57$ и $(kl)_1 \approx 4,49$. Окончательное выражение для критической силы запишем в таком виде:

$$F_{кр} = C\pi^2 EJ/l^2, \quad (7.10)$$

где $C = (kl)_1^2/\pi^2$. Коэффициент C показывает, во сколько раз критическая сила для рассматриваемого стержня отличается от критической силы для шарнирно опертого стержня той же длины l . На рис. 7.5, б показана зависимость коэффициента C от безразмерной жесткости \bar{f} упругой опоры.

Определив корень $(kl)_1$ характеристического уравнения (7.9'), из уравнения (7.9) можно с точностью до масштаба найти форму изогнутой оси стержня при потере устойчивости. Вместе с изменением безразмерной жесткости \bar{f} изменяется $(kl)_1$ и форма потери устойчивости, причем при непрерывно изменяющемся значении \bar{f} качественная смена форм потери устойчивости происходит скачкообразно: при $\bar{f} < \pi^2$ стержень теряет устойчивость по форме 1, а при $\bar{f} > \pi^2$ — по форме 2 (рис. 7.5, б). Но при этом необходимо подчеркнуть, что линейное однородное уравнение (7.5) принципиально не может дать никакой информации об увеличении прогиба стержня при $F \geq F_{кр}$. Чтобы найти за-

зависимость между нагрузкой и прогибами стержня после потери устойчивости, необходима нелинейная постановка задачи, о которой будет сказано ниже.

Аналогично может быть решена и любая другая задача устойчивости однопролетного равномерно сжатого стержня постоянной изгибной жесткости. Окончательное выражение критической силы обычно записывают в одном из двух вариантов:

$$F_{кр} = C\pi^2 EJ/l^2 \text{ или } F_{кр} = \pi^2 EJ/(\mu l)^2.$$

Здесь μ — коэффициент приведенной длины, показывающий, во сколько раз нужно изменить длину шарнирно опертого стержня, чтобы критическая сила для него равнялась критической силе для стержня дли-

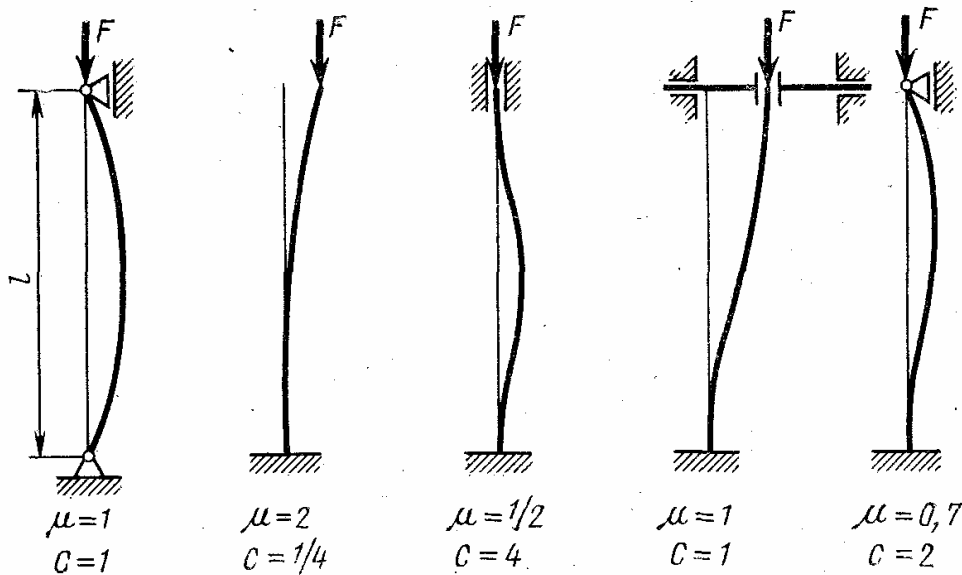


Рис. 7.6

ной l при рассматриваемых граничных условиях. Значения коэффициентов μ и C для некоторых видов закрепления показаны на рис. 7.6.

Аналитическое решение общего уравнения (7.5) удается получить не только при постоянных изгибной жесткости EJ и осевой силе N_0 , но и при некоторых конкретных законах их изменения по длине стержня. Однако в общем случае при произвольных законах изменения изгибной жесткости и начальной осевой силы аналитически проинтегрировать уравнение (7.5) не удастся. Тогда для определения критических нагрузок и форм потери устойчивости прибегают к приближенным аналитическим или численным методам.

§ 7.2. Устойчивость прямоугольных пластин

Рассмотрим задачу устойчивости пластины, нагруженной в своей плоскости распределенными по длине дуги контура силами q_x, q_y и распределенными по площади срединной плоскости силами p_x, p_y ; поперечные нагрузки отсутствуют. На рис. 7.7 такая пластина представлена в прямоугольной системе координат, причем срединная плоскость пластины совпадает с координатной плоскостью $xу$.

Если пластина не имеет начальных неправильностей, а все внешние силы и реакции опор действуют строго в ее срединной плоскости, то всегда возможно равновесное состояние пластины с неискривленной срединной плоскостью. Такое состояние равновесия, которое в

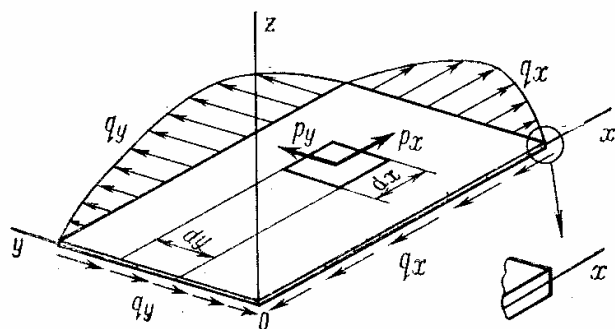


Рис. 7.7

дальнейшем будем называть начальным, описывается уравнениями плоской задачи теории упругости (см. § 2.1).

При достаточно малой внешней нагрузке начальное состояние равновесия пластины будет единственным и устойчивым. С ростом внешней нагрузки у пластины, как и у прямого стержня, могут появляться новые со-

стояния равновесия с искривленной срединной плоскостью, смежные с начальным состоянием. Наименьшее из тех значений нагрузки, при которых возможны изгибные состояния равновесия пластины, будет критическим, т. е. при его превышении начальное состояние равновесия перестанет быть устойчивым и пластина перейдет в новое состояние равновесия с искривленной срединной плоскостью.

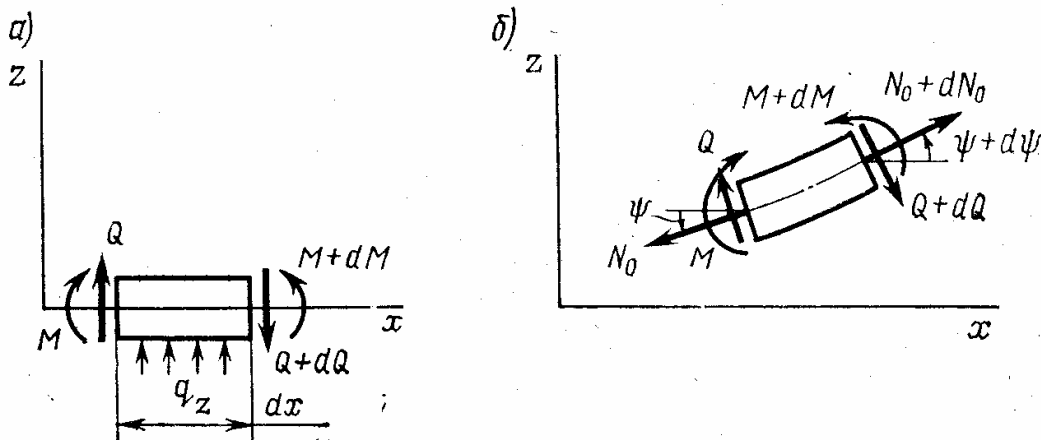


Рис. 7.8

Чтобы вывести линейризованное уравнение, описывающее изгибные состояния равновесия пластины, бесконечно близкие к начальному, воспользуемся приемом *фиктивной поперечной нагрузки*. Основную идею этого приема поясним на примере задачи устойчивости прямого стержня.

В § 1.5 было получено линейное уравнение (1.67) поперечного изгиба прямого стержня. Для элемента стержня, изображенного на рис. 7.8, а, оно имеет вид

$$(EJ\omega'')'' - q_z = 0,$$

где q_z — поперечная погонная нагрузка. Физический смысл этого уравнения — условие равновесия *недеформированного* элемента стержня в проекции на ось z .

В задаче устойчивости прямого стержня поперечная нагрузка отсутствует, но однородное линейризованное уравнение (7.5), где N_0 — начальная осевая сила, тоже результат проекции на ось z всех сил, действующих на элемент стержня. Только теперь условия равновесия составляются для *деформированного*, искривленного элемента стержня и в проекции на ось z появляется слагаемое $(N_0\psi)' = (N_0\omega)'$, зависящее от начальной осевой силы в стержне (рис. 7.8, б). Это позволяет ввести понятие *фиктивной поперечной нагрузки*

$$q_{z\phi} = (N_0\omega)'$$

Введение величины $q_{z\phi}$ помогает сократить вывод линейризованного уравнения устойчивости, если известно соответствующее линейное уравнение поперечного изгиба. Например, уравнение поперечного изгиба балки, связанной с упругим основанием, имеет вид

$$(EJ\omega''')'' + \kappa_0\omega - q_z = 0,$$

где κ_0 — коэффициент жесткости упругого основания. Чтобы получить линейризованное уравнение устойчивости такой балки, нагруженной продольными силами, достаточно положить в этом уравнении $q_z = q_{z\phi} = (N_0\omega)'$, где N_0 — начальная осевая сила в балке. Тогда получим однородное линейризованное уравнение

$$(EJ\omega''')'' + \kappa_0\omega - (N_0\omega)' = 0. \quad (7.11)$$

Аналогично прием фиктивной нагрузки выглядит и в других задачах устойчивости стержней, пластин и оболочек. Если для соответствующей задачи известно линейное уравнение поперечного изгиба

$$L[\omega] - p_z = 0, \quad (7.12)$$

где $L[\omega]$ — некоторое дифференциальное выражение относительно поперечного прогиба ω (или любой другой искомой функции), то, чтобы получить однородное линейризованное уравнение задачи устойчивости, достаточно, рассмотрев деформированное состояние элемента, найти фиктивную поперечную нагрузку $p_{z\phi}$ и заменить ею поперечную нагрузку p_z в исходном уравнении.

В линейном уравнении (2.58') поперечного изгиба пластины поперечную нагрузку обозначим p_z :

$$D\nabla^2\nabla^2\omega - p_z = 0, \quad (7.13)$$

где $D = Eh^3/[12(1 - \mu^2)]$; h — толщина пластины.

Как уже говорилось, до потери устойчивости в пластине реализуется плоское напряженное состояние, описываемое уравнениями плоской задачи теории упругости. Будем считать, что соответствующая плоская задача решена и распределение начальных нормальных и касательных напряжений $\sigma_{x0} = \sigma_{x0}(x, y)$, $\sigma_{y0} = \sigma_{y0}(x, y)$, $\tau_{xy0} = \tau_{xy0}(x, y)$ в пластине найдено. Эти напряжения, постоянные по толщине пластины, приводят к начальным нормальным и касательным

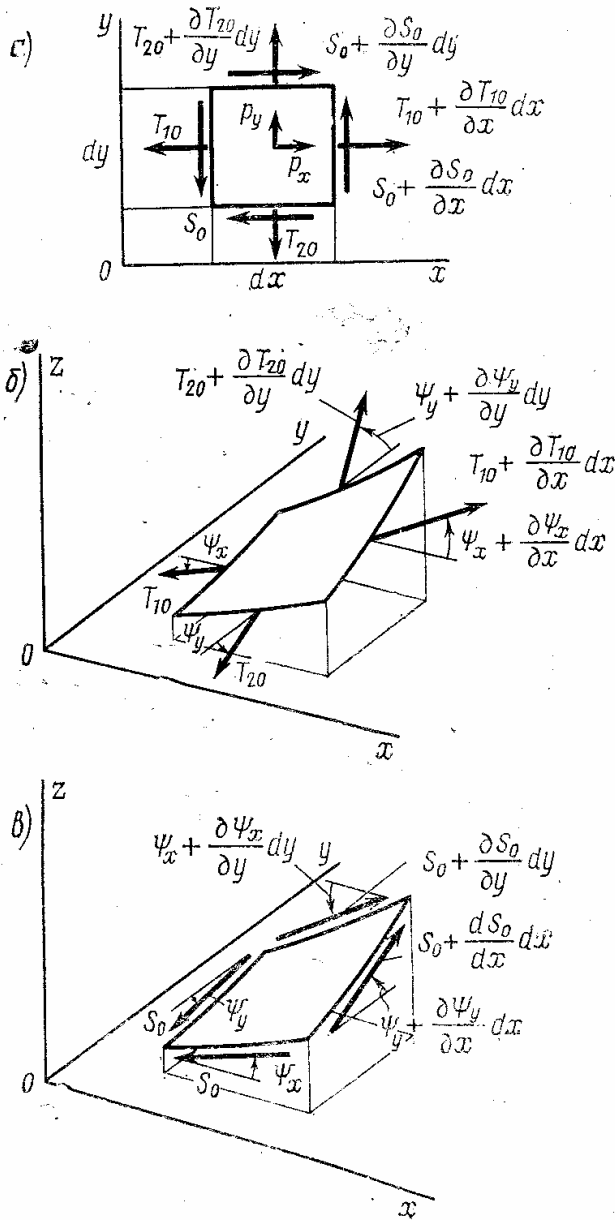


Рис. 7.9

и учитывая при этом изменение угла наклона касательной ψ_x (рис. 7.9, б), получим

$$-T_{10} \psi_x dy + \left(T_{10} + \frac{\partial T_{10}}{\partial x} dx\right) \left(\psi_x + \frac{\partial \psi_x}{\partial x} dx\right) dy = \frac{\partial}{\partial x} (T_{10} \psi_x) dx dy.$$

Аналогично получим результирующую сил T_{20} и $T_{20} + (\partial T_{20}/\partial y) dy$ в проекции на ось z : $\frac{\partial}{\partial y} (T_{20} \psi_y) dx dy$. Касательные силы S_0 и $S_0 + (\partial S_0/\partial x) dx$ (рис. 7.8, в) дадут в проекции на ось z

$$-S_0 \psi_y dy + \left(S_0 + \frac{\partial S_0}{\partial x} dx\right) \left(\psi_y + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} dx\right) dy = \frac{\partial}{\partial x} (S_0 \psi_y) dx dy.$$

* В § 2.1 объемные и контурные нагрузки имеют другие размерности и обозначения; здесь объемные нагрузки отнесены к площади, контурные — к длине дуги.

силам* в срединной плоскости пластины (рис. 7.9): $T_{10} = h\sigma_{x0}$; $T_{20} = h\sigma_{y0}$; $S_0 = h\tau_{xy0}$, которые удовлетворяют уравнениям равновесия, как в § 2.1:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{10}}{\partial x} + \frac{\partial S_0}{\partial y} + p_x &= 0, \\ \frac{\partial S_0}{\partial x} + \frac{\partial T_{20}}{\partial y} + p_y &= 0. \end{aligned} \quad (7.14)$$

На контуре пластины силы T_{10} , T_{20} , S_0 удовлетворяют заданным граничным условиям задачи.

Для определения фиктивной поперечной нагрузки рассмотрим элемент пластины в искривленном состоянии и с точностью до величин первого порядка малости относительно поперечного прогиба w найдем сумму проекций сил на ось z .

Чтобы не загромождать рисунка, изгибающие моменты и поперечные силы, возникающие при искривлении пластины, на рис. 7.9 вообще не показаны, а начальные нормальные и касательные силы изображены порознь. Определив проекции на ось z сил T_{10} и $T_{10} + (\partial T_{10}/\partial x) dx$

Аналогично находим результирующую сил S_0 и $S_0 + (\partial S_0/\partial y) dy$ в проекции на ось z :

$$\frac{\partial}{\partial y} (S_0 \psi_x) dx dy.$$

Объединив эти результаты, поделив их сумму на площадь $dx dy$ элемента пластины и учитывая, что $\psi_x = \partial w/\partial x$, $\psi_y = \partial w/\partial y$, найдем фиктивную поперечную нагрузку

$$p_{z\phi} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T_{10} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_{20} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(S_0 \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(S_0 \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (7.15)$$

Заменяв в уравнении (7.13) поперечную нагрузку p_z на $p_{z\phi}$, получим однородное линейризованное уравнение устойчивости пластины

$$D \nabla^2 \nabla^2 w - p_{z\phi} = 0. \quad (7.16)$$

Если пластина нагружена только контурными внешними силами q_x , q_y (в силовых ракетных конструкциях обычно собственным весом пластины можно пренебречь), то выражение (7.15) упрощается. Произведя дифференцирование и перегруппировав слагаемые, получим

$$p_{z\phi} = T_{10} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2S_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + T_{20} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial T_{10}}{\partial x} + \frac{\partial S_0}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} + \frac{\partial T_{20}}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Но из уравнений равновесия (7.14) при $p_x = 0$ и $p_y = 0$ следует, что выражения в скобках обращаются в нуль, и тогда

$$p_{z\phi} = T_{10} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2S_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + T_{20} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (7.17)$$

Для случая $p_x = 0$, $p_y = 0$ запишем еще раз основное однородное линейризованное уравнение устойчивости пластин в развернутом виде:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - T_{10} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2S_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - T_{20} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (7.18)$$

Граничные условия основного уравнения тоже однородны, причем, поскольку это уравнение имеет четвертый порядок, в каждой точке контура пластины должны быть заданы по два граничных условия.

Геометрические граничные условия в задачах устойчивости пластин формулируются точно так же, как и в задачах поперечного изгиба (см. § 2.5). Так, на краю пластины при $x = 0$ может быть запрещен поперечный прогиб w и (или) угол поворота $\partial w/\partial x$.

Силовые граничные условия выражают условия равновесия примыкающих к контуру элементов пластины. Если контур пластины свободен от внешних нагрузок, то силовые граничные условия в задачах устойчивости тоже повторяют граничные условия линейной теории

изгиба пластин. Например, если край пластины $x = 0$ свободно оперт, силовое граничное условие на нем

$$M_x = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Учитывая еще геометрическое граничное условие свободно опертого края ($w = 0$), можно записать два следующих условия при $x = 0$:

$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (7.19)$$

Когда поперечные прогибы на краю пластины полностью запрещены, внешние контурные нагрузки в граничные условия не входят. Например, если по свободно опертому краю $x = 0$ к пластине приложены нагрузки q_x и q_y , то это не внесет никаких изменений в граничные условия (7.19).

Внешние контурные нагрузки входят в граничные условия в тех случаях, когда край пластины свободен или упруго оперт. В этих случаях граничные условия формулируются подобно тому, как это было сделано в предыдущем параграфе для стержня.

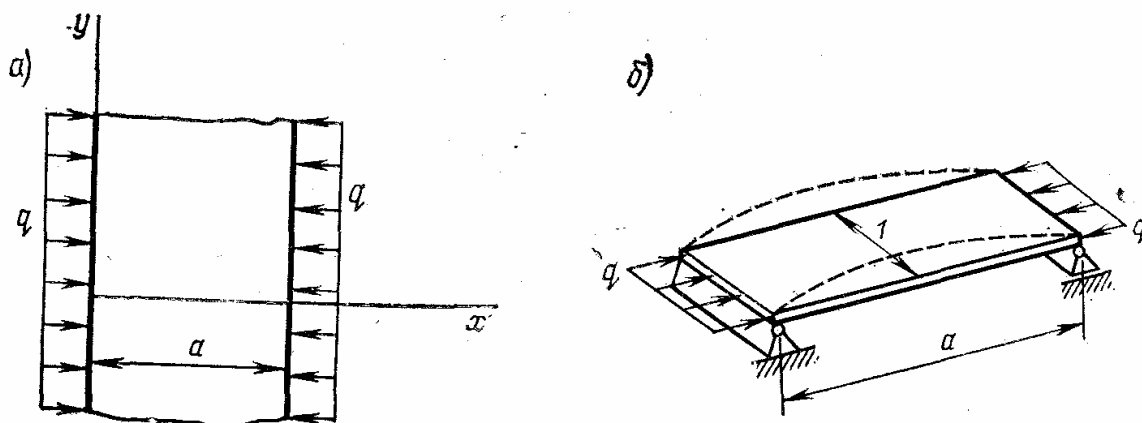


Рис. 7.10

Получить точное аналитическое решение уравнения устойчивости пластин удастся лишь в весьма ограниченном числе частных случаев. Простейший из них — длинная пластина, равномерно сжатая в поперечном направлении (рис. 7.10, а). Граничные условия на удлиненных сторонах произвольны, но неизменны вдоль пластины.

Предварительно определим начальное напряженное состояние пластины шириной a . Если края пластины не закреплены относительно смещений в продольном направлении, то решение этой вспомогательной задачи очевидно: $T_{10} = -q$, $T_{20} = 0$, $S_0 = 0$.

Тогда уравнение (7.18) принимает вид

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (7.20)$$

Для удлиненной пластины можно предположить, что при потере устойчивости ее изгиб происходит по цилиндрической поверхности. В этом случае уравнение (7.20) в частных производных переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + q \frac{d^2 w}{dx^2} = 0,$$

которое с точностью до обозначений тождественно уравнению (7.6). Такое совпадение достаточно очевидно: рассматриваемая задача устойчивости пластины эквивалентна задаче устойчивости полоски единичной ширины (рис. 7.10, б) с изгибной жесткостью $EJ = 1 \cdot D$, сжа-

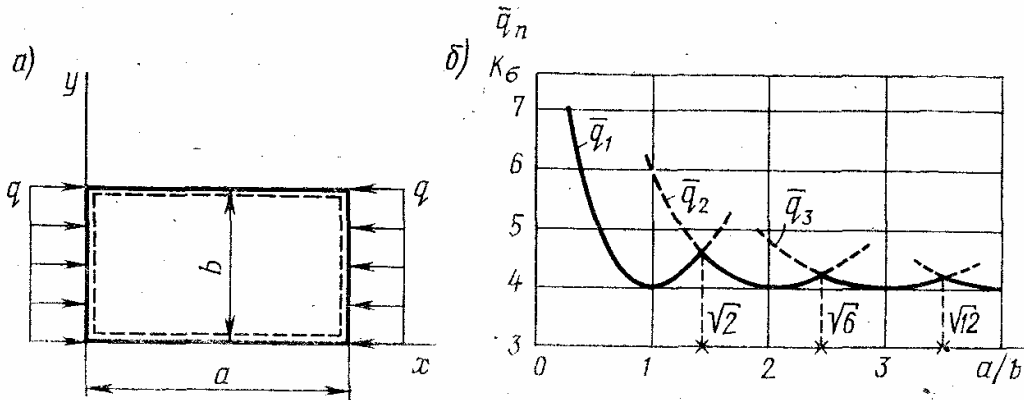


Рис. 7.11

той продольной силой $F = 1 \cdot q$. Поэтому все решения уравнения (7.6), полученные для стержня, можно перенести на рассматриваемую задачу устойчивости пластины и сразу записать

$$q_{кр} = C \pi^2 D / a^2, \quad (7.21)$$

где коэффициент C имеет те же самые значения, что и в формуле (7.10). Например, для пластины, свободно опертой вдоль длинных сторон, коэффициент $C = 1$.

В задачах устойчивости пластин обычно принято окончательные результаты представлять через критические напряжения. Так, в рассматриваемой задаче результат можно представить через критические сжимающие напряжения

$$\sigma_{кр} = \frac{q_{кр}}{h} = C \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{h}{a} \right)^2, \quad (7.22)$$

где h — толщина пластины.

В качестве второго примера точного решения уравнения (7.18) рассмотрим задачу устойчивости прямоугольной пластины шириной b и длиной a , равномерно сжатой в одном направлении и свободно опертой по всему контуру (рис. 7.11, а). Будем считать, что до потери устойчивости напряженное состояние в пластине одноосно: $T_{10} = -q$, $T_{20} = 0$, $S_0 = 0$, и основное уравнение сводится к уравнению (7.20).

Граничные условия (7.19) свободного опирания в рассматриваемой задаче выглядят так:

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \\ x=a \end{array} \right\} w=0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad \left. \begin{array}{l} y=0 \\ y=b \end{array} \right\} w=0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

При этих граничных условиях решение уравнения (7.20) можно построить в виде ряда

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \quad (7.23)$$

где C_{nm} — произвольные постоянные; n, m — числа полуволи синусов в соответствующих направлениях. Подставив выражение (7.23) в решаемое уравнение, мы для каждого члена ряда получим свое независимое уравнение

$$C_{nm} \left\{ D \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]^2 - q \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right\} = 0.$$

Тривиальный случай, когда все постоянные $C_{nm} \equiv 0$, интереса не представляет: он соответствует начальному состоянию равновесия. Для того чтобы было возможно $C_{nm} \neq 0$, необходимо, чтобы обратилось в нуль выражение, стоящее в фигурных скобках. Последнее условие дает те значения нагрузки, при которых возможны отличные от тождественного нуля решения уравнения (7.20), т. е. те значения, при которых у рассматриваемой пластины возможны изгибные состояния равновесия, смежные с начальным:

$$q_{nm} = \frac{\pi^2 D}{(n/a)^2} \left[\left(\frac{n}{a} \right)^2 + \left(\frac{m}{b} \right)^2 \right]^2, \quad (7.24)$$

где $n, m = 1, 2, \dots, \infty$. Поскольку число полуволи m входит только в числитель, то наименьшее значение нагрузки q_{nm} будет при $m = 1$. Учитывая это, введем безразмерные величины

$$\bar{q}_{n1} = \bar{q}_n = \frac{q_{n1}}{\pi^2 D / b^2} = \left(\frac{nb}{a} + \frac{a}{nb} \right)^2.$$

Последовательно принимая $n = 1, n = 2, n = 3$ и т. д., получаем

$$\bar{q}_1 = \left(\frac{1 \cdot b}{a} + \frac{a}{1 \cdot b} \right)^2, \quad \bar{q}_2 = \left(\frac{2b}{a} + \frac{a}{2b} \right)^2, \quad \bar{q}_3 = \left(\frac{3b}{a} + \frac{a}{3b} \right)^2, \dots$$

На рис. 7.11, б приведены соответствующие кривые. Приравнивая $\bar{q}_n = \bar{q}_{n+1}$, находим, что две соседние кривые пересекаются при отношении $a/b = \sqrt{n(n+1)}$. Участки кривых, лежащие ниже точек пересечения, дают наименьшие и, следовательно, критические значения $\bar{q}_{кр}$.

Зная критические значения $\bar{q}_{кр}$ безразмерной нагрузки, можно записать выражение для критической распределенной нагрузки

$$q_{кр} = K_{\sigma} \frac{\pi^2 D}{b^2},$$

где K_σ — коэффициент, численно равный $q_{кр}$ и зависящий от отношения сторон пластины (сплошная линия на рис. 7.11, б).

Окончательную расчетную зависимость обычно представляют через критические сжимающие напряжения

$$\sigma_{кр} = \frac{q_{кр}}{h} = K_\sigma \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{h}{b}\right)^2. \quad (7.25)$$

В последних формулах в качестве характерного размера пластины принята ее ширина b , а не длина a , как в формуле (7.22), поскольку при $a > b$ именно размер b существенно влияет на значение критических напряжений. Как видно из графика на рис. 7.11, б, при $a > 3b$

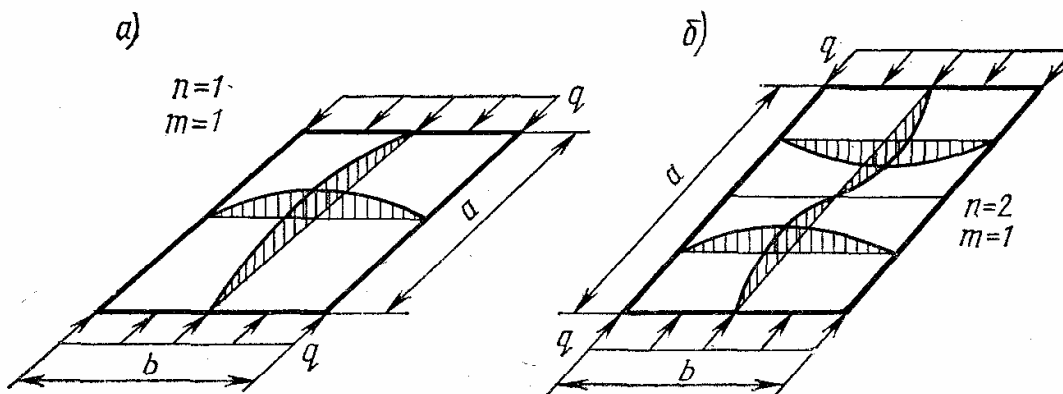


Рис. 7.12

коэффициент K_σ практически не зависит от отношения сторон. Другими словами, критические напряжения в удлиненной пластине, сжатой вдоль длинных сторон, практически не зависят от ее длины и полностью определяются отношением h/b ; при этом $K_\sigma \approx 4$.

На рис. 7.12 изображены типичные формы изогнутой поверхности пластины, по которым происходит потеря устойчивости свободно опертой по всему контуру и сжатой в одном направлении прямоугольной пластины. Форма, описываемая функцией $\sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$ (рис. 7.12, а), реализуется при $a/b < \sqrt{2}$; форма, описываемая функцией $\sin(2\pi x/a) \sin(\pi y/b)$ (рис. 7.12, б), реализуется при $\sqrt{2} < a/b < \sqrt{6}$ и т. д.

Уравнение (7.20) для прямоугольной пластины, сжатой равномерно в одном направлении, удается аналитически проинтегрировать и в тех случаях, когда граничные условия свободного опирания заданы на любых двух противоположных сторонах пластины, а две другие стороны закреплены произвольно, но неизменно вдоль всей пластины [1]. Расчетные зависимости обычно представляют тоже в виде формулы (7.25), но здесь коэффициент K_σ для каждого варианта граничных условий по-своему зависит от отношения сторон пластины (рис. 17.13). (Кривая Г построена по результатам приближенного решения, поскольку для защемленной по всему контуру пластины аналитическое решение построить не удастся.)

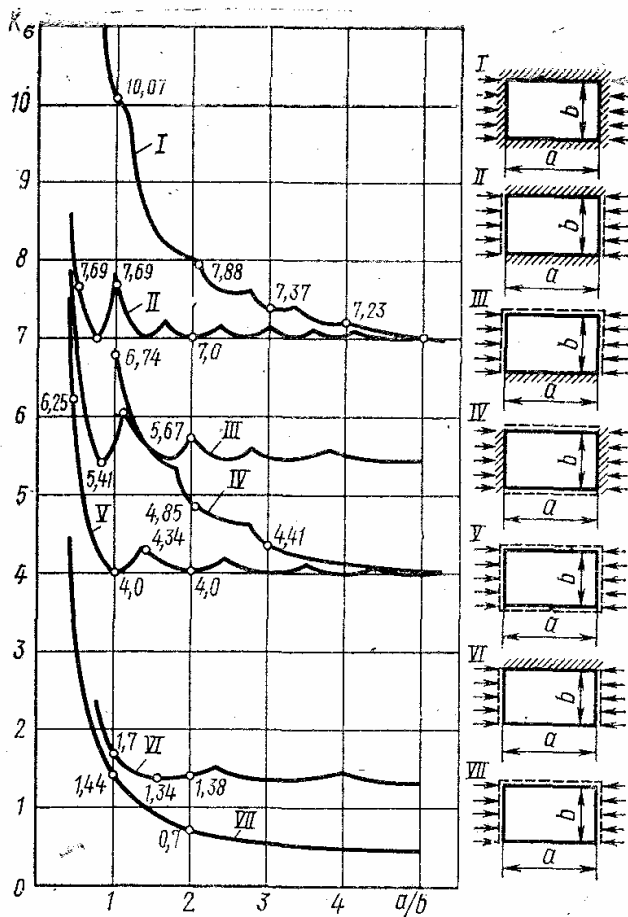


Рис. 7.13

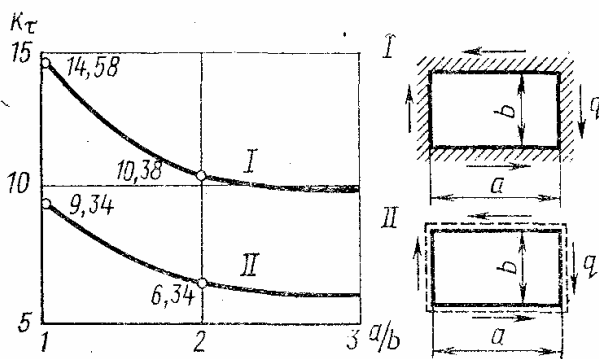


Рис. 7.14

При расчете тонкостенных подкрепленных конструкций встречается задача расчета на устойчивость прямоугольной пластины, нагруженной по контуру касательными силами (рис. 7.14). Начальное напряженное состояние в такой пластине (см. § 2.2): $T_{10} = 0$, $T_{20} = 0$, $S_0 = q$ и основное уравнение (7.18) принимает вид

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - 2q \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0. \quad (7.26)$$

Точное аналитическое решение этого уравнения удается получить только для длинных пластин при $a/b \rightarrow \infty$. Окончательный результат такого решения записывают в виде, аналогичном формуле (17.25):

$$\tau_{кр} = \frac{q_{кр}}{h} = K_{\tau} \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{h}{b} \right)^2, \quad (7.27)$$

где b — ширина пластины. При свободно опертых длинных сторонах пластины $K_{\tau} = 5,34$, а при защемленных $K_{\tau} = 8,98$.

Для прямоугольных пластин с конечным отношением сторон решение уравнения (7.26) получают с помощью того или иного приближенного метода, причем окончательный результат обычно тоже записывают в виде (7.27). На рис. 7.14 даны значения K_{τ} в зависимости от отношения сторон a/b для пластин с защемленным (I) и свободно опертым (II) контуром.

По определению относительные удлинения в направлениях осей x и y равны

$$\varepsilon_x = \frac{A_1 B_1 - AB}{AB} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} - 1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \dots;$$

$$\varepsilon_y = \frac{A_1 C_1 - AC}{AC} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2} - 1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \dots$$

Здесь и далее многоточием заменены величины высших порядков малости.

Определим углы сдвига, вызываемые перемещениями w . Прямой угол между отрезками AB и AC при изгибе пластины искажается; значение угла между отрезками $A_1 B_1$ и $A_1 C_1$ равно $\pi/2 - \gamma_{xy}$, где γ_{xy} — угол сдвига. Скалярное произведение векторов можно подсчитать по формуле

$$\begin{aligned} \vec{A_1 B_1} \cdot \vec{A_1 C_1} &= A_1 B_1 \cdot A_1 C_1 \cos(\pi/2 - \gamma_{xy}) = \\ &= dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2} \sin \gamma_{xy} = dx dy (\gamma_{xy} + \dots). \end{aligned}$$

С другой стороны, скалярное произведение векторов равно сумме попарных произведений их проекций на оси координат:

$$\vec{A_1 B_1} \cdot \vec{A_1 C_1} = dx \cdot 0 + 0 \cdot dy + \frac{\partial w}{\partial x} dx \frac{\partial w}{\partial y} dy = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy.$$

Сравнивая два последних выражения, находим величину γ_{xy} ; ограничившись квадратичными членами разложения, окончательно запишем

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (7.28)$$

Теперь изменение полной потенциальной энергии пластины при переходе к новому отклоненному состоянию можно записать в виде

$$\Delta \mathcal{E} = U + \iint \left[\frac{1}{2} T_{10} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + S_0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{2} T_{20} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right] dx dy, \quad (7.29)$$

где U — энергия изгиба пластины, определяемая выражением (2.54).

Из энергетического критерия устойчивости

$$\delta(\Delta \mathcal{E}) = 0, \quad (7.30)$$

во-первых, можно получить основное линейаризованное уравнение (7.16) теории устойчивости пластин и те граничные условия, каким может быть подчинено его решение (см. Приложение I), а, во-вторых, по этому критерию можно строить различные варианты приближенного решения задачи устойчивости пластины.

Для определенности будем считать, что все действующие на пластину внешние нагрузки изменяются пропорционально одному параметру F . Тогда критическое значение этого параметра можно найти из условия (7.30), воспользовавшись, например, методом Рэлея—Ритца

(см. § 3.1). Для этого зададим функцию поперечного прогиба в виде ряда

$$\omega = \sum_1^N C_i f_i(x, y), \quad (7.31)$$

где $f_i(x, y)$ — координатные функции, удовлетворяющие (каждая в отдельности) геометрическим граничным условиям конкретной задачи. Подставив этот ряд в выражение (7.29) и выполнив все необходимые операции дифференцирования и интегрирования, получим

$$\Delta \mathcal{E} = \Delta \mathcal{E}(F, C_1, C_2, \dots, C_N).$$

Учитывая структуру исходного выражения для величины $\Delta \mathcal{E}$, нетрудно установить, что эта зависимость является квадратичной формой от N параметров C_i . Поэтому условие стационарности $\delta(\Delta \mathcal{E}) = 0$ приводит к системе N однородных линейных уравнений с N неизвестными C_i :

$$\frac{\partial \Delta \mathcal{E}}{\partial C_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (7.32)$$

Тривиальное решение полученной системы уравнений $C_i \equiv 0$ соответствует начальному состоянию равновесия пластины. Для существования отличных от нуля решений этой системы, т. е. для существования новых состояний равновесия, отличных от начального, определитель системы (7.32) должен быть равен нулю. Из этого условия можно найти те значения F_n нагрузки, при которых возможны состояния равновесия пластины, отклоненные от начального. Наименьшее из таких значений приближенно равно критическому: $F_{n \min} = F_{кр}$.

Иногда вместо условия $\delta(\Delta \mathcal{E}) = 0$ удобнее пользоваться иной формулировкой энергетического критерия устойчивости, вытекающей из данного в § 1.6 определения критической нагрузки. Положив $\Delta \mathcal{E} = 0$, приходим к такой зависимости:

$$F = - \frac{U}{\frac{1}{2} \iint \left[\bar{T}_{10} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + 2\bar{S}_0 \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \bar{T}_{20} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy}, \quad (7.33)$$

где $\bar{T}_{10} = \bar{T}_{10}(x, y)$, $\bar{T}_{20} = \bar{T}_{20}(x, y)$, $\bar{S}_0 = \bar{S}_0(x, y)$ — распределение начальных сил в срединной плоскости пластины при $F = 1$; величина U определяется выражением (2.54). Минимизируя каким-либо численным методом последнее выражение, находим $F_{\min} = F_{кр}$.

По изложенному варианту энергетического метода, когда изменение полной потенциальной энергии выражено в виде (7.29), следует сделать два замечания. Во-первых, необходимо подчеркнуть, что в это выражение входят начальные силы в срединной плоскости пластины, которые необходимо предварительно определить, решая (точно или приближенно) плоскую задачу теории упругости*. Во-вторых, сле-

* Задачи устойчивости можно решать и минуя определение начальных сил, но для этого необходимо использовать иной вариант энергетического метода [1].

дует отметить, что критерий устойчивости $\delta(\Delta\mathcal{E}) = 0$ справедлив независимо от того, какие причины привели к возникновению начальных сил в срединной плоскости пластины. (Эти силы могли возникнуть под действием контурных или массовых нагрузок, неравномерного нагрева, структурных превращений в материале пластины и т. д.). В любом случае, после того как начальные силы найдены, выражение (7.29) можно использовать для исследования устойчивости плоского напряженного состояния тонкой упругой пластины. Различие в причинах возникновения начальных напряжений никак не отразится на их критическом значении, но это различие может самым существенным образом повлиять на поведение пластины после потери устойчивости.

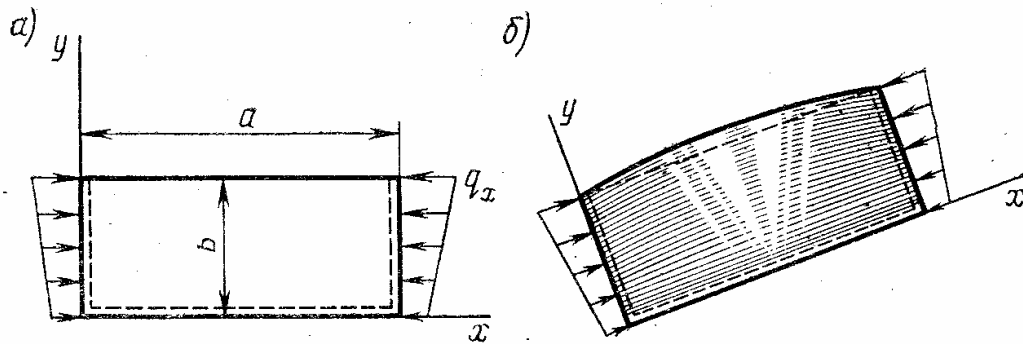


Рис. 7.16

Как пример рассмотрим следующую задачу, имеющую большое практическое значение: прямоугольная пластина длиной a и шириной b с одним свободным краем сжата распределенными контурными нагрузками, изменяющимися по закону (рис. 7.16, а) $q_x = q(1 + \eta y/b)$, где η — фиксированный параметр ($\eta \geq -1$).

Решение плоской задачи в данном случае очевидно (см. § 2.2):

$$T_{10} = -q(1 + \eta y/b); T_{20} = 0; S_0 = 0.$$

В соответствии с выражением (7.29) запишем

$$\Delta\mathcal{E} = U - \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b q \left(1 + \eta \frac{y}{b}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx dy.$$

Если по трем остальным сторонам пластина свободно оперта, то геометрические граничные условия, которые необходимо удовлетворить при решении задачи энергетическим методом, таковы:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x=0 \\ \text{при } x=a \end{array} \right\} w=0; \quad \text{при } y=0 \quad w=0.$$

В этом случае функцию поперечного прогиба удобно взять в виде ряда

$$w(x, y) = \sin \frac{n\pi x}{a} \sum_{i=1}^N C_i y^i.$$

Если край пластины при $y = 0$ зашпелен, а два других края свободно оперты, то геометрические граничные условия будут такими:

$$\text{при } \left. \begin{array}{l} x=0 \\ x=a \end{array} \right\} w=0; \quad \text{при } y=0 \quad w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial y}=0.$$

В этом случае функцию поперечного прогиба можно взять в виде

$$w(x, y) = \sin \frac{n\pi x}{a} \sum_{i=2}^N C_i y^i.$$

Еще раз подчеркнем, что при решении задачи энергетическим методом все граничные условия не обязательно должны быть удовлетворены (см. § 3.1).

Остановимся далее на решении задачи для пластины с тремя свободно опертыми краями, ограничившись для простоты одним членом ряда. Найдем производные, входящие в выражение для $\Delta \mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= C_1 y \left(\frac{n\pi}{a} \right) \cos \frac{n\pi x}{a}; & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -C_1 y \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{a}; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= C_1 \left(\frac{n\pi}{a} \right) \cos \frac{n\pi x}{a}; & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned}$$

Далее, выполнив несложные операции интегрирования, получим

$$\Delta \mathcal{E} = C_1^2 \frac{ab}{4} \left\{ D \left[\frac{b^2}{3} \left(\frac{n\pi}{a} \right)^4 + 2(1-\mu) \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right] - q \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 b^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{\eta}{4} \right) \right\}.$$

В данном случае, когда мы ограничились одним членом ряда, условие $\delta(\Delta \mathcal{E}) = 0$ сводится к одному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d(\Delta \mathcal{E})}{dC_1} &= 2C_1 \frac{ab}{4} \left\{ D \left[\frac{b^2}{3} \left(\frac{n\pi}{a} \right)^4 + 2(1-\mu) \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right] - \right. \\ &\quad \left. - q \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 b^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{\eta}{4} \right) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Чтобы было возможно $C_1 \neq 0$, должно обращаться в нуль выражение, стоящее в фигурных скобках; соответствующие значения нагрузки будут

$$q_n = \frac{\pi^2 D}{b^2} \frac{n^2 b^2/a^2 + 6(1-\mu)/\pi^2}{1 + 3\eta/4}.$$

Поскольку число полуволн n входит только в числитель, наименьшее значение q_n получим при $n = 1$ (рис. 7.16, б). Следовательно, приближенное критическое значение нагрузки

$$q_{кр} = K_\sigma \frac{\pi^2 D}{b^2}, \quad (7.34)$$

где

$$K_\sigma = \frac{b^2/a^2 + 6(1-\mu)/\pi^2}{1 + 3\eta/4}.$$

Взяв большее число членов ряда, можно уточнить полученный результат, но в рассмотренном примере даже первое приближение дает вполне приемлемую для практических целей точность.

В приведенной задаче точное аналитическое решение удастся получить только при $\eta = 0$, откуда при $a/b \rightarrow \infty$ и $\mu = 0,3$ следует $K_\sigma = 0,4255$. Из полученного приближенного решения тоже имеем при тех же условиях $K_\sigma = 0,4255$. Потому можно ожидать, что и при $\eta \neq 0$ точность приближенного решения будет удовлетворительной. Заметим, что точность приближенного решения полностью определяется выбором аппроксимирующих функций; в данном случае взятый

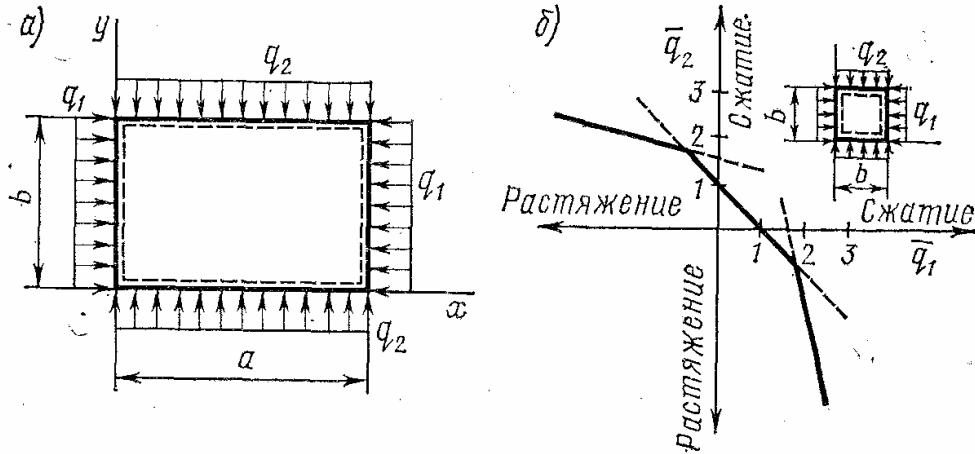


Рис. 7.17

нами первый член ряда очень близок к точному решению: изменение по координате x соответствует точному решению, а при $y = 0$ выполнено не только геометрическое, но и силовое граничное условие.

Рассмотрим далее случай комбинированного нагружения, когда на пластину в ее плоскости одновременно действуют несколько независимо изменяющихся внешних нагрузок. Например, на рис. 7.17, а показана свободно опертая по всему контуру пластина длиной a и шириной b , равномерно сжатая в двух направлениях распределенными силами q_1 и q_2 ; начальные внутренние силы при этом: $T_{10} = -q_1$, $T_{20} = -q_2$, $S_0 = 0$. Для решения снова воспользуемся энергетическим методом, взяв функцию прогиба в виде ряда (7.23). Подсчитаем с помощью выражения (7.29) изменение полной потенциальной энергии:

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{ab}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ D \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]^2 - \left[q_1 \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + q_2 \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right] \right\} \frac{C_{nm}^2}{2}. \quad (7.35)$$

Система уравнений (7.32) распадается на независимые уравнения

$$\left\{ D \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]^2 - \left[q_1 \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + q_2 \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right] \right\} C_{nm} = 0.$$

Если $C_{nm} \neq 0$, то должно обращаться в нуль выражение в фигурных скобках; из этого условия находим те сочетания значений нагрузок q_1 и q_2 , при которых возможны соответствующие формы равновесия пластины с искривленной срединной плоскостью:

$$q_1 \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + q_2 \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 = \pi^2 D \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]^2. \quad (7.36)$$

Полученное решение естественно обобщается на тот случай, когда пластина в одном направлении сжата, а в другом растянута. Так, если $T_{10} < 0$, а $T_{20} > 0$, то в зависимости (7.36) достаточно перед величиной q_2 изменить знак на обратный.

Выражение (7.36) при заданном отношении сторон a/b позволяет в координатах q_1, q_2 построить границу области устойчивости, т. е. границу, отделяющую область таких значений q_1 и q_2 , при которых начальное состояние пластины устойчиво, от значений q_1 и q_2 , при которых оно неустойчиво. Для квадратной пластины со стороной b такое построение приведено на рис. 7.17, б. Участки прямых, показанные сплошной линией, дают критическое сочетание безразмерных сил $\bar{q}_1 = q_1/q_{1кр}$ и $\bar{q}_2 = q_2/q_{2кр}$, а ломаная, состоящая из этих участков, является границей области устойчивости. Величины $q_{1кр}$ и $q_{2кр}$, к которым отнесены силы q_1 и q_2 , равны критическим нагрузкам при сжатии пластины соответственно только в направлении x и только в направлении y ; они подсчитываются по формуле (7.25) при $K_\delta = 4$.

Если при нагружении пластины силы q_1 и q_2 возрастают пропорционально одному параметру, то в координатах \bar{q}_1 и \bar{q}_2 такое нагружение описывается лучом, исходящим из начала координат. Точки этого луча до пересечения границы области устойчивости характеризуют устойчивое начальное состояние равновесия, а после пересечения — неустойчивое. Общий случай комбинированного нагружения пластины описывается в координатах \bar{q}_1 и \bar{q}_2 кривой, исходящей из начала координат и называемой путем погружения. Важно подчеркнуть, что для упругих пластин критическое сочетание величин \bar{q}_1 и \bar{q}_2 не зависит от пути нагружения.

При граничных условиях на контуре прямоугольной пластины, отличных от граничных условий свободного опирания, решение существенно усложняется, но результаты такого решения, которые можно представить графиком, похожим на изображенный на рис. 7.17, б, качественно повторяют полученные выше: сжатие пластины в одном направлении уменьшает, а растяжение увеличивает значение критической нагрузки в другом направлении. Исключение составляет случай потери устойчивости пластины по форме, близкой к развертывающейся поверхности (сильно удлиненная пластина и пластина с двумя свободными противоположными сторонами). В этом случае растяжение или сжатие пластины в продольном направлении практически не влияет на критическое значение сжимающей нагрузки в поперечном направлении (см. рис. 7.10).

При комбинированном нагружении прямоугольной пластины касательными контурными силами q_τ и растягивающими или сжимающими силами q_1 (рис. 7.18, а) решение удается получить только приближенными методами. Критические сочетания касательных и нормальных сил в этой задаче при различных граничных условиях и различном отношении сторон пластины можно аппроксимировать одной зависимостью

$$\bar{q}_\tau^2 + \bar{q}_1 = 1, \quad (7.37)$$

где $\bar{q}_\tau = q_\tau/q_{\tau\text{кр}}$; $\bar{q}_1 = q_1/q_{1\text{кр}}$, причем $q_{\tau\text{кр}}$ и $q_{1\text{кр}}$ — критические значения касательных и нормальных сжимающих сил, действующих на ту же пластину порознь [и определяемых соответственно форму-

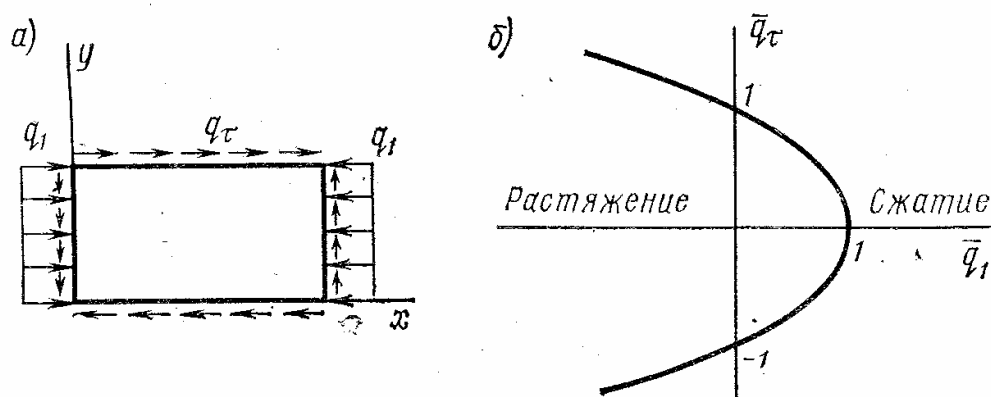


Рис. 7.18

лами (7.27) и (7.25) при K_τ и K_σ , зависящих от граничных условий и отношения сторон пластины; в случае растягивающих нормальных сил знак перед вторым слагаемым меняется на обратный.

На рис. 7.18, б зависимость (7.37) изображена графически. Как видим, растяжение пластины приводит к увеличению значений критических касательных нагрузок, а сжатие — к уменьшению.

Аналогичные результаты получены и табулированы для ряда других практически важных случаев расчета прямоугольных пластин на устойчивость при комбинированном нагружении [9].

Говоря о границе области устойчивости пластины при комбинированном нагружении, следует сделать два замечания. Во-первых, обратим внимание на форму этой границы (см. рис. 7.17, б и 7.18, б). Общие свойства границ областей устойчивости упругих систем были детально исследованы П. Ф. Папковичем. В частности, им была доказана важная теорема о выпуклости границы области устойчивости. Согласно *теореме Папковича* эта граница не может быть обращена выпуклостью к области устойчивости. Так, при действии на пластину двух независимых внешних нагрузок граница устойчивости может состоять только из отрезков прямых и криволинейных участков, направленных выпуклостью к области неустойчивости. Этой теоремой поль-

зуются для приближенного построения границы области устойчивости по отдельным известным ее точкам: соединяя эти точки прямыми, можно получить аппроксимацию истинной границы, причем ошибка только увеличивает запас устойчивости.

Во-вторых, необходимо подчеркнуть, что отмеченное выше стабилизирующее влияние растягивающих нагрузок на устойчивость пластины имеет место, лишь пока пластина работает в упругой области. Растягивающие нагрузки, вызывающие пластические деформации, могут снижать значения критических нагрузок.

§ 7.4. Поведение стержней и пластин после потери устойчивости.

Влияние начальных неправильностей

С помощью линеаризованных уравнений и энергетического критерия определяют критические значения нагрузок и те формы, по которым происходит потеря устойчивости. Но ни линеаризованное уравнение, ни энергетический критерий не дают никакой информации о том, как будет вести себя система после потери устойчивости. Для описания за критического поведения системы задачу необходимо рассматривать в нелинейной постановке.

Рассмотрим сначала за критическое деформирование прямого упругого стержня. Возможны два качественно различных случая. В первом случае, когда после потери устойчивости один из торцов стержня свободно смещается в продольном направлении, за критическое деформирование сводится к изгибу и жесткость стержня на растяжение — сжатие практически не влияет на поведение стержня после потери устойчивости (рис. 7.19, а). Во втором случае, когда оба торца стержня закреплены относительно продольных смещений, за критическое деформирование связано не только с изгибом, но и с растяжением стержня (рис. 7.19, б).

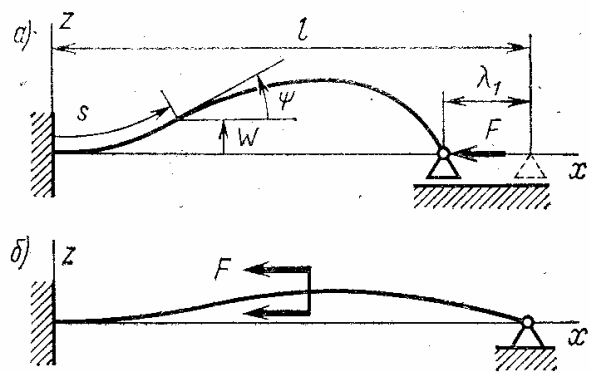


Рис. 7.19

Основное практическое значение имеет первый случай, и на нем мы остановимся подробнее. После потери устойчивости ось стержня можно считать нерастяжимой; тогда связанные с изгибом стержня продольные перемещения $u_1 = u_1(s)$ точек оси стержня легко выразить через угол наклона касательной к изогнутой оси $\psi = \psi(s)$. При неподвижном левом торце

$$u_1 = - \int_0^s (1 - \cos \psi) ds, \quad (7.38)$$

где s — координата, отсчитываемая вдоль изогнутой оси стержня.

Изгибающий момент в тонком стержне определяется зависимостью

$$M = \frac{EJ}{\rho} = EJ \frac{d\psi}{ds}, \quad (7.39)$$

где ρ — радиус кривизны изогнутой оси стержня.

В изогнутом состоянии стержня полная потенциальная энергия

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \Delta\mathcal{E}, \quad (7.40)$$

где \mathcal{E}_0 — полная потенциальная энергия начального прямолинейного состояния равновесия; $\Delta\mathcal{E}$ — изменение полной потенциальной энергии, вызванное изгибом стержня. В результате изгиба потенциал внешних сил (рис. 7.19, а) уменьшится на величину $F\lambda_1$, где $\lambda_1 = -u_1(l)$. Поскольку ось стержня при изгибе принята нерастяжимой, то, учитывая зависимость (7.38), получим

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \int_0^l \left[\frac{1}{2} EJ \left(\frac{d\psi}{ds} \right)^2 - F(1 - \cos \psi) \right] ds. \quad (7.41)$$

Аналогично можно подсчитать величину \mathcal{E} и для любого другого случая продольного нагружения стержня, например для стержня, нагруженного распределенной нагрузкой.

Из условия стационарности полной потенциальной энергии ($\delta\mathcal{E} = 0$) можно найти равновесные состояния изогнутого стержня и, исследуя знак второй вариации $\delta^2\mathcal{E}$, установить, какие из равновесных состояний устойчивы. Пока на значения перемещений и углов поворота не наложено никаких ограничений, приведенные зависимости, описывающие изгиб стержней с нерастяжимой осью, являются точными (в рамках теории гибких упругих стержней). Для ряда частных случаев нелинейное дифференциальное уравнение, к которому сводится задача изгиба стержня при конечных перемещениях, допускает аналитическое решение. В общем случае это нелинейное уравнение можно с любой степенью точности решить численно. Сейчас мы с помощью метода Рэлея—Ритца найдем приближенное аналитическое решение, позволяющее наглядно описать закритическое поведение любого произвольно нагруженного стержня при конечных, но не слишком больших прогибах.

Предположим, что задача устойчивости решена (точно или приближенно) и критическое значение нагрузки, а также форма, по которой происходит потеря устойчивости стержня, известны. С ростом прогибов форма изогнутой оси стержня, естественно, изменяется, но при построении приближенного решения можно принять, что при малых конечных прогибах это изменение невелико, и искать решение нелинейной задачи в первом приближении в виде

$$\psi(s) = A\psi_{кр}(s), \quad (7.42)$$

где A — коэффициент, зависящий от величины внешней нагрузки; $\psi_{кр}(s)$ — функция из решения задачи устойчивости в линейной постановке.

При малых прогибах, когда углы ψ малы, в выражении (7.38) величину $\cos \psi$ целесообразно разложить в ряд:

$$u_1(s) = - \int_0^s \left(\frac{1}{2!} \psi^2 - \frac{1}{4!} \psi^4 + \dots \right) ds. \quad (7.43)$$

Тогда, используя зависимости (7.41) и (7.42) и ограничиваясь в разложении четвертой степенью ψ , получаем

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \int_0^l \left[\frac{A^2}{2} EJ \left(\frac{d\psi_{кр}}{ds} \right)^2 - F \left(\frac{A^2}{2} \psi_{кр}^2 - \frac{A^4}{24} \psi_{кр}^4 \right) \right] ds. \quad (7.44)$$

Поскольку величина \mathcal{E}_0 не зависит от параметра A , условие стационарности ($\delta \mathcal{E} = 0$) сводится к уравнению

$$\frac{d\mathcal{E}}{dA} = A \int_0^l EJ \left(\frac{d\psi_{кр}}{ds} \right)^2 ds - FA \left(\int_0^l \psi_{кр}^2 ds - \frac{A^2}{6} \int_0^l \psi_{кр}^4 ds \right) = 0. \quad (7.45)$$

Поделив все слагаемые на интеграл $\int_0^l \psi_{кр}^2 ds$ и обозначив

$$\frac{\int_0^l EJ \left(\frac{d\psi_{кр}}{ds} \right)^2 ds}{\int_0^l \psi_{кр}^2 ds} = F_{кр}; \quad \frac{1}{6} \frac{\int_0^l \psi_{кр}^4 ds}{\int_0^l \psi_{кр}^2 ds} = B, \quad (7.46)$$

получим уравнение

$$A [F_{кр} - F (1 - A^2 B)] = 0. \quad (7.47)$$

Из этого уравнения следует, что при любых значениях нагрузки возможно решение $A = 0$, т. е. возможно состояние равновесия стержня с неискривленной осью. Чтобы найти решения, отличные от $A = 0$, следует приравнять нулю выражение, стоящее в квадратных скобках; тогда получим

$$A = \pm \sqrt{(F - F_{кр}) / (BF)}.$$

Отсюда следует, что действительные значения A возможны только при $F > F_{кр}$, поскольку $B > 0$. Таким образом, пока $F < F_{кр}$, возможно только состояние равновесия стержня с неискривленной осью, а при $F > F_{кр}$ кроме этого состояния может быть состояние равновесия стержня с искривленной осью.

Обозначив $F - F_{кр} = \Delta F$ и считая $\Delta F \ll F_{кр}$, окончательно запишем

$$A = \pm \frac{1}{\sqrt{B}} \sqrt{\frac{\Delta F}{F_{кр}}}. \quad (7.48)$$

Зная, как изменяется угол $\psi(s)$ наклона касательной, легко найти поперечные прогибы стержня на ранней закритической стадии деформирования. При неподвижной левой опоре (рис. 7.19, а)

$$w = \int_0^s \sin \psi ds.$$

Ограничившись первым членом разложения $\sin \psi$ и учитывая зависимость (7.42), получим

$$w = A \int_0^s \psi_{кр} ds = A w_{кр}(s). \quad (7.49)$$

Другими словами, в полученном приближенном решении при конечных, но малых прогибах амплитуда поперечных перемещений тоже растет пропорционально параметру A , определяемому формулой (7.48). На рис. 7.20, а схематично показано, как с ростом

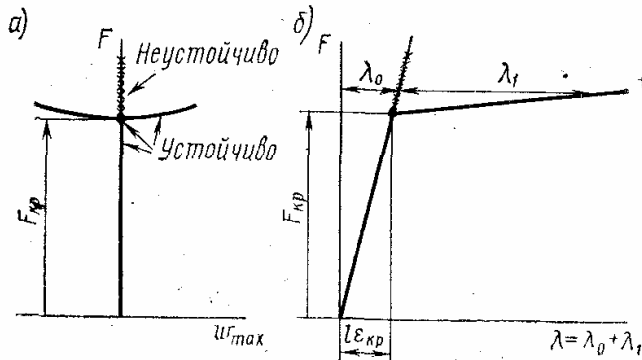


Рис. 7.20

нагрузки изменяются поперечные прогибы стержня.

Кроме зависимости амплитуды поперечных перемещений от нагрузки можно построить зависимость сближения торцов стержня от нагрузки. При неподвижном левом торце (см. рис. 7.19, а) сближение λ торцов стержня равно продольному переме-

щению правого торца; оно складывается из укорочения λ_0 стержня под действием сжимающей нагрузки и дополнительного перемещения λ_1 , вызванного изгибом стержня: $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1$.

Первое из этих слагаемых при известном распределении начальных усилий определяется элементарно, а перемещение, вызванное изгибом, в соответствии с зависимостями (7.43) и (7.48) равно

$$\lambda_1 = \frac{1}{2B} \frac{\Delta F}{F_{кр}} \int_0^l \psi_{кр}^2 ds - \frac{1}{24B^2} \left(\frac{\Delta F}{F_{кр}} \right)^2 \int_0^l \psi_{кр}^4 ds. \quad (7.50)$$

Этот результат схематично изображен на рис. 7.20, б, где по оси абсцисс отложено суммарное перемещение правого торца. Заметим, что при $\Delta F \ll F_{кр}$ второе слагаемое в выражении (7.50) оказывается пренебрежимо малым. Другими словами, на ранней закритической стадии деформирования перемещение λ_1 линейно зависит от величины ΔF .

Как видно из рис. 7.20, малейшее превышение нагрузкой критического значения вызывает чрезвычайно быстрый рост поперечных и продольных перемещений первоначально прямого стержня. Возьмем, например, свободно опертый стержень (в этом случае $\psi_{кр} = \cos \pi s/l$) тонкостенного трубчатого сечения с моментом инерции $J = \pi R^3 \delta$, площадью поперечного сечения $S = 2\pi R \delta$ и длиной $l = 100R$, где R — радиус трубы; δ — толщина стенки. Для такого стержня

превышение критической силы всего на 1% вызовет (при упругой деформации стержня) поперечное перемещение $w_{\max} \approx 9R$ и продольное перемещение λ_1 , примерно в сто раз превышающее критическое укорочение стержня. При этом в стержне возникнут изгибные напряжения, максимальные абсолютные значения которых почти в двадцать раз больше критических напряжений равномерно сжатого стержня.

Любопытно отметить, что для линейно упругого материала значение критического относительного укорочения

$$\epsilon_{\text{кр}} = \frac{F_{\text{кр}}}{ES} = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{R}{l} \right)^2$$

не зависит от модуля упругости, а является чисто геометрической характеристикой стержня.

Для пластины, как и для стержня, возможны два качественно различных случая поведения в закритическом состоянии. Если закрепление контура пластины не препятствует ее чисто изгибной деформации, т. е. деформации без удлинений и сдвигов срединной плоскости (рис. 7.21, а), то после потери устойчивости поведение пластины будет таким же, как и у стержня с незакрепленным относительно поперечного смещения торцом: малейшее превышение критической нагрузки приводит к чрезвычайно большим поперечным прогибам и изгибным напряжениям. В этом случае потеря устойчивости практически означает и потерю несущей способности пластины. Но если для стержней такой случай закритического поведения основной, то для тонкой пластины, являющейся элементом силовой конструкции, такой случай скорее исключительный.

Когда контур пластины закреплен, то после потери устойчивости срединная плоскость превращается в поверхность двойной кривизны. Такое деформирование неизбежно связано с появлением дополнительных удлинений и углов сдвига в срединной плоскости, и закритическое поведение пластины в этом случае будет похоже на поведение стержня, изображенного на рис. 7.19, б: и после потери устойчивости такая пластина может продолжать работать под возрастающей внешней нагрузкой.

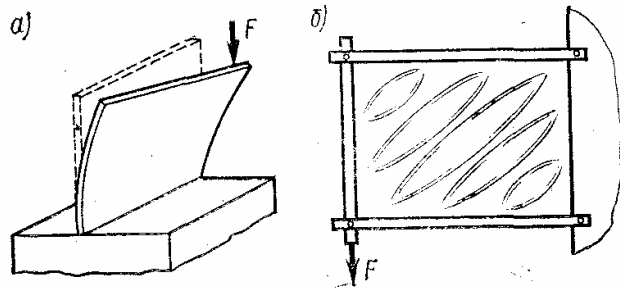


Рис. 7.21

На рис. 7.21, б изображена тонкая пластина, прикрепленная по контуру к жесткой шарнирной рамке и нагруженная силой F . До потери устойчивости пластина находится в состоянии чистого сдвига. Когда внешняя нагрузка превысит критическое значение, определяемое формулой (7.27), пластина теряет устойчивость, и ее поверхность становится волнистой, но при этом несущая способность пластины не исчерпывается. Довольно очевидно, что после потери устойчивости возрастающая внешняя нагрузка будет восприниматься главным образом за счет растягивающих сил в пластине, направленных вдоль

наклонных волн. Аналогично ведет себя после потери устойчивости закрепленная по контуру пластина и при сжатии; силы, возникающие в деформированной срединной плоскости, помогают пластине продолжать воспринимать возрастающую внешнюю нагрузку.

Строгое теоретическое описание поведения пластины после потери устойчивости — весьма и весьма сложная задача, решение которой обычно удается получить только в приближенном виде. Дополнительная сложность заключается в том, что после потери устойчивости по мере роста внешней нагрузки происходит скачкообразная перестройка формы изогнутой поверхности пластины. Однако для сжатой в одном

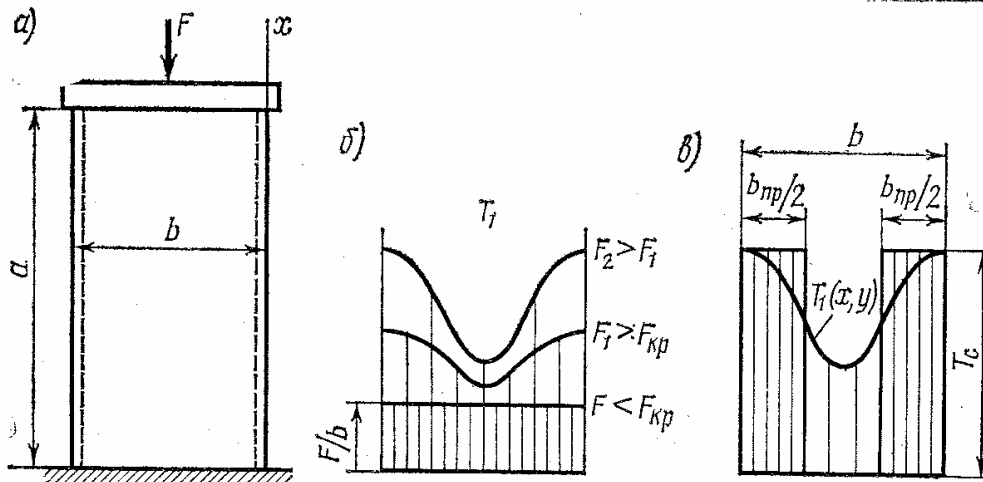


Рис. 7.22

направлении прямоугольной пластины T . Карманом предложен полу эмпирический прием, позволяющий крайне просто и, главное, достаточно точно оценить работу пластины в закритической области.

Рассмотрим закрепленную по контуру пластину толщиной h , нагруженную в направлении x , как показано на рис. 7.22, *a*. Будем считать, что края пластины после потери устойчивости остаются прямыми. (Примерно так ведет себя клетка обшивки между продольным и поперечным силовым набором в реальной конструкции.) До потери устойчивости начальные силы в срединной плоскости пластины равны

$$T_{10} = -F/b; \quad T_{20} = 0; \quad S_0 = 0. \quad (7.51)$$

После потери устойчивости в пластине помимо изгиба возникает сложное напряженное состояние в деформированной срединной плоскости $T_1 = T_1(x, y)$; $T_2 = T_2(x, y)$; $S = S(x, y)$, характер которого изменяется по мере роста внешней нагрузки. На рис. 7.22, *б* схематично показано распределение сил T_1 по ширине пластины до и после потери устойчивости. (После потери устойчивости величина T_1 изменяется и по длине пластины.)

Прием Кармана основывается на двух упрощающих допущениях:

1. Неизвестный закон распределения $T_1 = T_1(x, y)$ на всей длине пластины заменяется ступенчатым (рис. 7.22, *в*). Такая схематизация напряженного состояния отражает тот факт, что после потери устойчивости искривляющаяся центральная часть пластины «уходит» из

под нагрузки и продольные сжимающие силы воспринимают в основном участки пластины, прилегающие к прямым кромкам.

2. Считается, что силы T_c равны критическому значению T_1 для равномерно сжатой пластины шириной $b_{пр}$, т. е.

$$T_c = K_\sigma \pi^2 D / b_{пр}^2, \quad (7.52)$$

где коэффициент K_σ такой же, как и у исходной пластины.

Учитывая, что для исходной пластины шириной b

$$T_{кр} = K_\sigma \pi^2 D / b^2,$$

можно записать $b_{пр} = \varphi b$, где

$$\varphi = \sqrt{\frac{T_{0\text{кр}}}{T_c}}. \quad (7.53)$$

Величину $b_{пр}$ называют приведенной шириной пластины, а коэффициент φ — редуцированным коэффициентом.

Если ввести среднее по ширине пластины сжимающее напряжение $\bar{\sigma}_1 = F/(bh)$, то полученный результат можно представить в таком виде

$$\bar{\sigma}_1 = \sqrt{\sigma_c \sigma_{кр}}, \quad (7.54)$$

где $\sigma_c = T_c/h$; $\sigma_{кр} = T_{кр}/h$. Сжимающее напряжение σ_c на кромке пластины следует определять из каких-нибудь дополнительных условий (см., например, расчет лонжеронного отсека на с. 326).

Суммарная продольная сила, воспринимаемая пластиной после потери устойчивости, может быть подсчитана по формуле

$$F = \bar{\sigma} bh = \sigma_c \varphi bh = bh \sqrt{\sigma_c \sigma_{кр}}. \quad (7.55)$$

Прием Кармана позволяет построить приближенную зависимость сближения торцов λ от нагрузки F после потери устойчивости пластины, аналогичную зависимости для стержня, изображенной на рис. 7.20, б. До потери устойчивости, очевидно, $F = \lambda E b h / a$. После потери устойчивости, учитывая зависимость (7.53), можно записать

$$F = \frac{\lambda}{a} E b_{пр} h = E h^2 \sqrt{\frac{K_\sigma \pi^2}{12(1-\mu^2)}} \sqrt{\frac{\lambda}{a}}. \quad (7.56)$$

Полученный результат схематично изображен на рис. 7.23, а, причем

$$F_{кр} = T_{кр} b = K_\sigma \frac{\pi^2 E h^2}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{h}{b}\right), \quad \varepsilon_{кр} = \frac{\sigma_{кр}}{E} = K_\sigma \frac{\pi^2}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{h}{b}\right)^2.$$

На рис. 7.23, б показан характер зависимости максимального поперечного прогиба пластины от внешней нагрузки.

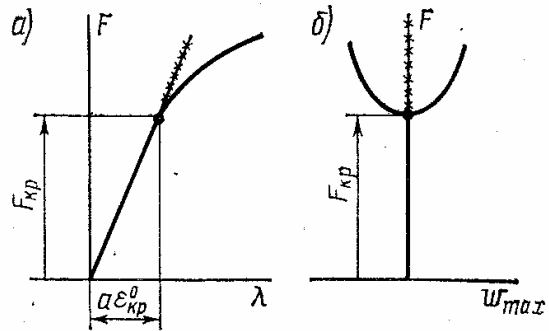


Рис. 7.23

До сих пор мы рассматривали задачи устойчивости стержней и пластин идеально правильной формы. В силу этого допущения при любом уровне внешних нагрузок возможна исходная прямолинейная форма равновесия стержня и плоская форма равновесия пластин. Именно это допущение приводит к понятию критической нагрузки, т. е. такой нагрузки, при превышении которой исходная форма равновесия стерж-

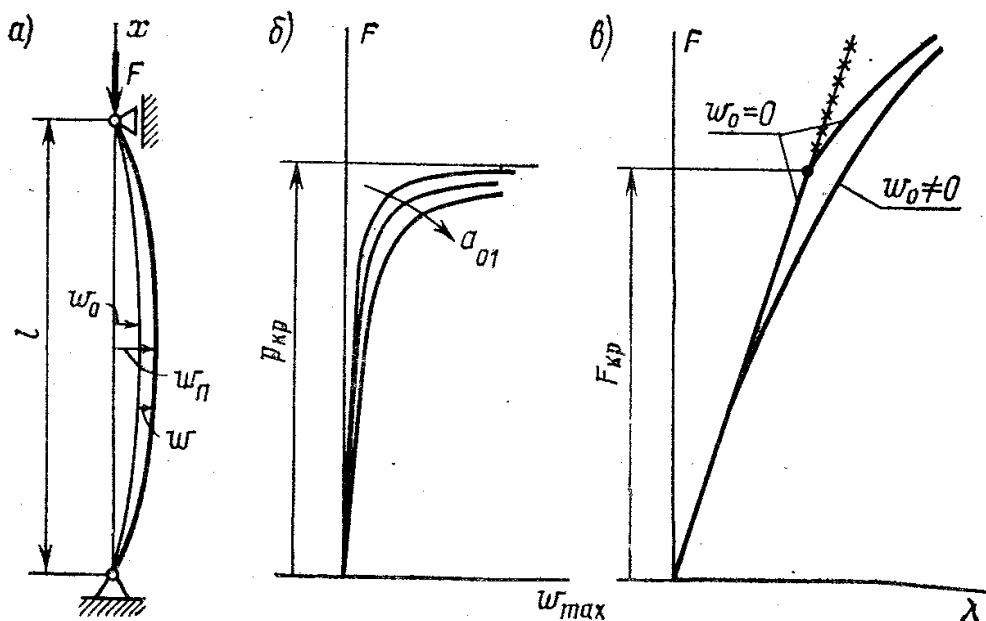


Рис. 7.24

ня или пластины перестает быть устойчивой. Но ось любого реального стержня не является идеально прямой, точно так же как и любая реальная пластина не является идеально плоской.

Влияние таких начальных неправильностей формы покажем на простом примере. Рассмотрим шарнирно опертый стержень, сжатый силой F (рис. 7.24, а). До нагружения начальный прогиб стержня $w_0 = w_0(x)$. После приложения продольной силы прогиб стержня будет $w_n = w_0 + w$, где $w = w(x)$ — дополнительный прогиб от нагружения. Приравняв момент от внешней силы F внутреннему изгибающему моменту и оставляя только первую степень величины w_n , можем записать

$$EJw'' + Fw_n = 0. \quad (7.57)$$

В первое слагаемое входит только дополнительный прогиб w , ибо возникновение внутреннего момента связано с дополнительным изгибом стержня; во второе слагаемое входит полный прогиб: плечо внешней силы определяется полным прогибом w_n . Начальную форму оси стержня $w_0(x)$ будем считать известной и уравнение (7.57) запишем в виде

$$EJw'' + Fw = -Fw_0 \quad (7.58)$$

при граничных условиях: $w(0) = 0$; $w(l) = 0$.

При $\omega_0(x) = 0$ решением однородного уравнения, удовлетворяющим граничным условиям, очевидно, будут функции

$$\omega_n(x) = C_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (7.59)$$

где $n = 1, 2, \dots$ при

$$F_n = n^2 \pi^2 EJ / l^2. \quad (7.60)$$

Критическая сила, соответствующая $n = 1$, равна

$$F_{кр} = \pi^2 EJ / l^2.$$

Решение неоднородного уравнения (7.58) удобно искать в виде разложения по функциям (7.59):

$$\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

представив правую часть тоже в виде разложения по той же системе функций:

$$\omega_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{0n} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Тогда, подставив эти ряды в уравнение (7.58) и приравняв коэффициенты при каждой из синусоид в левой и правой частях равенства, получим цепочку независимых алгебраических уравнений

$$(-F_n + F) a_n = -F a_{0n},$$

отсюда находим

$$a_n = \frac{a_{0n}}{(F_n/F - 1)},$$

где $n = 1, 2, \dots$ Следовательно,

$$\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{0n}}{(F_n/F - 1)} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (7.61)$$

Таким образом, при $F \rightarrow F_n$ амплитуда соответствующей гармоники стремится к бесконечности. Но при изменении нагрузки от нуля до $F_{кр} = F_1$ неограниченно возрастать может только амплитуда первой гармоники и независимо от соотношений между начальными амплитудами a_{0n} при приближении нагрузки к критическому значению $F_{кр}$ доминирующей окажется первая гармоника. Поэтому в приближенном решении можно принять

$$\omega(x) \approx a_1 \sin \frac{\pi x}{l} = \frac{a_{01}}{(F_{кр}/F - 1)} \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (7.62)$$

На рис. 7.24, б показана зависимость $\omega_{\max} = a_1$ от нагрузки F .

Определив поперечные прогибы, можно найти максимальный изгибающий момент M_{\max} и подсчитать изгибные напряжения в стержне:

$$\sigma_{\text{изг}} = \pm M_{\max}/W,$$

где W — момент сопротивления сечения стержня.

В рассматриваемом примере

$$M_{\max} = Fw_{\text{п max}} \approx \frac{Fa_{01}}{1 - F/F_{\text{кр}}}. \quad (7.63)$$

Полное напряжение

$$\sigma = -\frac{F}{S} \pm \frac{M_{\max}}{W} = -\frac{F}{S} \left(1 \mp \frac{S}{W} \frac{a_{01}}{1 - F/F_{\text{кр}}} \right), \quad (7.64)$$

где S — площадь поперечного сечения стержня.

Например, для тонкостенного трубчатого сечения, как в предыдущем примере, $S = 2\pi R\delta$,

$$W = \pi R^2 \delta \quad \text{и} \quad \sigma = -\frac{F}{S} \left(1 \mp \frac{2a_{01}}{R} \frac{1}{1 - F/F_{\text{кр}}} \right).$$

Как видно из этой формулы, изгибные напряжения зависят от отношения амплитуды начального прогиба к размеру поперечного сечения и резко возрастают по мере приближения сжимающей нагрузки к ее критическому значению. Так, например, если $a_{01}/(2R) = 0,05$, то при $F = 0,8F_{\text{кр}}$ максимальные изгибные напряжения оказываются по абсолютному значению равными напряжениям осевого сжатия.

Так же начальные неправильности формы влияют на поведение сжатых стержней и при других граничных условиях, если один из торцов стержня может беспрепятственно перемещаться в осевом направлении. Начальные неправильности срединной плоскости тоже существенным образом отражаются на поведении пластины, однако полное исследование этого влияния является чрезвычайно сложной задачей, требующей решения нелинейных уравнений в частных производных.

На рис. 7.24, в схематично показано, как начальные неправильности влияют на сближение торцов прямоугольной пластины, сжатой в одном направлении, в зависимости от приложенной нагрузки.

Глава 8

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Для расчета конструкций ракет задачи устойчивости цилиндрических оболочек имеют наибольшее значение. С другой стороны, на примере исследования устойчивости цилиндрических оболочек можно проследить все основные особенности задач устойчивости тонких упругих оболочек. Поэтому мы ограничимся изложением основ теории устойчивости упругих оболочек применительно к задачам устойчивости круговых цилиндрических оболочек.

Из методических соображений, прежде чем перейти к исследованию устойчивости цилиндрических оболочек, рассмотрена родственная задача устойчивости равномерно сжатого упругого кругового коль-

ца. Затем приведены основные варианты уравнений устойчивости упругой круговой цилиндрической оболочки, находящейся в неоднородном безмоментном докритическом состоянии; дано выражение для подсчета изменения полной потенциальной энергии такой оболочки при переходе ее в смежное состояние.

Рассмотрены аналитические решения только трех основных задач устойчивости оболочки: при равномерном внешнем давлении, равномерном осевом сжатии и кручении. Многочисленные приближенные решения других задач устойчивости упругих оболочек, в том числе решения, полученные с помощью ЭВМ, можно найти в литературе [8, 9, 12].

§ 8.1. Устойчивость круговых колец

Рассмотрим кольцо радиусом R , сжатое равномерно распределенной радиальной нагрузкой (рис. 8.1, а). Если до нагружения кольцо имело идеально правильную круговую форму, а интенсивность q распределенной нагрузки строго постоянна по всему кольцу, то всегда возможна начальная круговая форма равновесия кольца, подобно тому как у центрально сжатого прямого стержня всегда возможна начальная прямолинейная форма равновесия (см. § 7.1). Найдем критическое значение $q_{кр}$ нагрузки, при превышении которого начальная круговая форма равновесия перестает быть устойчивой и кольцо принимает новую некруговую форму, например изображенную пунктиром

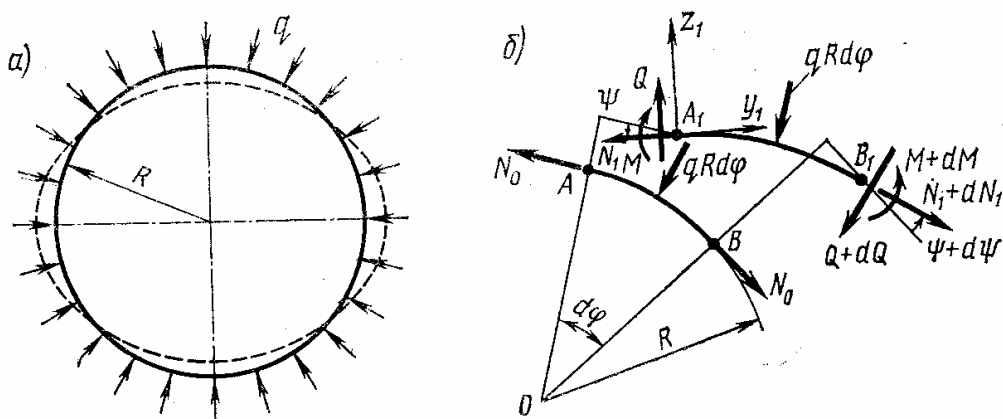


Рис. 8.1

на рис. 8.1, а. При этом мы ограничимся изучением потери устойчивости кольца в своей плоскости, а внешнюю нагрузку будем считать гидростатической, т. е. такой, что при изгибе кольца она остается нормальной к деформированной оси кольца и ее интенсивность q не меняется.

Линейная задача изгиба круговых колец рассмотрена в § 4.1. Напомним, что в линейных задачах условия равновесия формулируются для недеформированного элемента, а в задачах устойчивости необходимо рассматривать равновесие искривленного и отклоненного от

своего начального положения элемента. Такой элемент $Rd\varphi$ кругового кольца, до изгиба имевший форму дуги AB окружности, изображен на рис. 8.1, б. При начальной круговой форме равновесия осевая сила $N_0 = -qR$ постоянна по всему кольцу. Осевую силу при некруговой форме равновесия запишем в виде двух слагаемых: $N_1 = N_0 + N$, где $N = N(\varphi)$ — дополнительная составляющая, возникающая в результате изгиба кольца. Значения изгибающего момента и поперечной силы, возникающих в кольце в результате изгиба, обозначим соответственно $M = M(\varphi)$ и $Q = Q(\varphi)$. Введем оси координат y_1 и z_1 , направленные соответственно по касательной и нормали к деформированной оси кольца в точке A_1 . Приравнявая нулю суммы проекций на эти оси всех сил, действующих на элемент A_1B_1 изогнутого кольца, и отбрасывая величины заведомо высших порядков малости, получим

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{d\varphi} - Q + Q \frac{d\psi}{d\varphi} &= 0; \\ \frac{dQ}{d\varphi} + N_1 - N_1 \frac{d\psi}{d\varphi} &= qR. \end{aligned}$$

Третье уравнение равновесия без величин высших порядков малости имеет вид

$$\frac{dM}{Rd\varphi} = Q.$$

Чтобы получить линейризованное уравнение, описывающее потерю устойчивости кольца, воспользуемся геометрическими зависимостями, полученными в § 4.1:

$$\begin{aligned} \psi &= -\frac{1}{R} \left(\frac{d^2v}{d\varphi^2} + v \right); \\ \kappa &= \frac{1}{R} \frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{1}{R^2} \left(\frac{d^3v}{d\varphi^3} + \frac{dv}{d\varphi} \right), \end{aligned} \quad (8.1)$$

и соотношением упругости

$$M = EJ\kappa, \quad (8.2)$$

где EJ — жесткость кольца на изгиб в своей плоскости.

Как нетрудно установить, величины ψ , κ , M , Q и N имеют тот же первый порядок малости, что и перемещение v . Поэтому, учитывая, что $N_1 = N_0 + N$ и $N_0 = -qR$, и отбрасывая в двух первых уравнениях равновесия произведения величин первого порядка малости, получим линейризованные уравнения равновесия деформированного элемента кольца:

$$\begin{aligned} Q - \frac{dN}{d\varphi} &= 0; \\ \frac{dQ}{d\varphi} + N &= -qR^2 \kappa; \\ \frac{dM}{d\varphi} &= QR. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Сравнивая полученную систему линеаризованных уравнений с системой уравнений (4.1) линейной задачи изгиба кольца, видим, что эти системы будут формально эквивалентны, если, как это было сделано в § 7.2, ввести фиктивную поперечную нагрузку

$$q_{z\phi} = -qR\kappa \quad (8.4)$$

и положить $q_z = q_{z\phi}$, $q_y = 0$, $m = 0$. Поэтому, минуя промежуточные выкладки, по аналогии с уравнением (4.3) можно сразу записать уравнение

$$\frac{d^3M}{d\phi^3} + \frac{dM}{d\phi} = -R^3 q \frac{d\kappa}{d\phi}.$$

Окончательно, подставив значения M и κ , получим однородное линеаризованное уравнение, описывающее потерю устойчивости кругового кольца под действием гидростатической нагрузки:

$$\frac{EJ}{R^3} \left(\frac{d^6v}{d\phi^6} + 2 \frac{d^4v}{d\phi^4} + \frac{d^2v}{d\phi^2} \right) + q \left(\frac{d^4v}{d\phi^4} + \frac{d^2v}{d\phi^2} \right) = 0. \quad (8.5)$$

Для замкнутого свободного кольца, исключив его перемещения как жесткого целого, решение уравнения (8.5) можно найти в виде тригонометрического ряда (см. § 4.4):

$$v = \sum_{n=2}^{\infty} C_n \sin n\phi.$$

Подставив этот ряд в уравнение (8.5), для каждой гармоники получим

$$C_n \left[-\frac{EJ}{R^3} n^2(n^2-1)^2 + q_n n^2(n^2-1) \right] = 0.$$

Из условия существования $C_n \neq 0$ находим

$$q_n = (n^2 - 1) EJ/R^3.$$

Наименьшее из найденных значений q_n , соответствующее $n = 2$, дает* критическое значение интенсивности внешней нагрузки:

$$q_2 = q_{кр} = 3EJ/R^3. \quad (8.6)$$

Определим с точностью до масштаба форму, по которой кольцо теряет устойчивость. Деформация кольца при потере устойчивости связана с его изгибом и удлинение оси кольца практически равно нулю. В этом случае (см. § 4.1) $\omega = -dv/d\phi$. В частности, если $v_n = \sin n\phi$, то $\omega = -n \cos n\phi$. На рис. 8.2 схематично показаны формы изогнутой оси кольца при $n = 2$ (а) и $n = 4$ (б). Поскольку критической нагрузке соответствует $n = 2$, форма изогнутой оси кольца описывается функциями

$$\begin{aligned} v_{кр} &= v_2 = \sin 2\phi; \\ \omega_{кр} &= \omega_2 = -2 \cos 2\phi. \end{aligned} \quad (8.7)$$

* Значение q_n при $n = 1$ соответствует смещению кольца как жесткого целого (см. § 4.3) и для рассматриваемой задачи устойчивости интереса не представляет.

Как уже говорилось, линеаризованные уравнения дают возможность определить только форму потери устойчивости, а для определения зависимости нагрузка—перемещение при нагрузках, больше чем критические, необходимо решать задачу в нелинейной постановке. Приближенное решение такой задачи можно получить методом, изложенным в § 7.4 для стержня. Из этого решения следует, что свободное кольцо на ранней закритической стадии деформирования ведет себя так же, как стержень со свободно смещающимся в осевом направлении торцом (см. рис. 7.20, а), т. е. малейшее превышение критического значения нагрузки вызывает резкий рост перемещений.

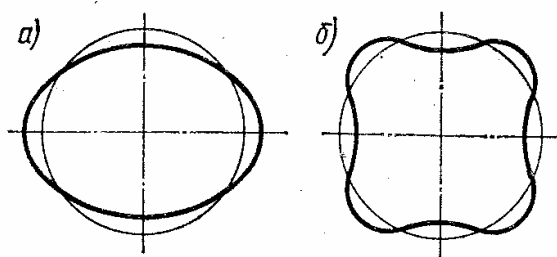


Рис. 8.2

Необходимо сделать несколько замечаний по практическому применению формулы (8.6). Хотя формула эта широко известна и вошла во многие справочники и руководства, к сожалению, для подавляющего числа практических задач, когда круговое кольцо приходится рассчитывать на устойчивость, эта формула, строго говоря, не верна.

Чтобы пояснить это, рассмотрим несколько типичных случаев нагружения круговых колец равномерно распределенными радиальными силами (рис. 8.3). Изображенный на рис. 8.3, а шпангоут бака, нагруженного внутренним давлением, сжат радиальной нагрузкой интенсивностью $q_z = (pR_c/2) \cos \theta$ и начальная осевая сила в нем $N_0 = -q_z R$.

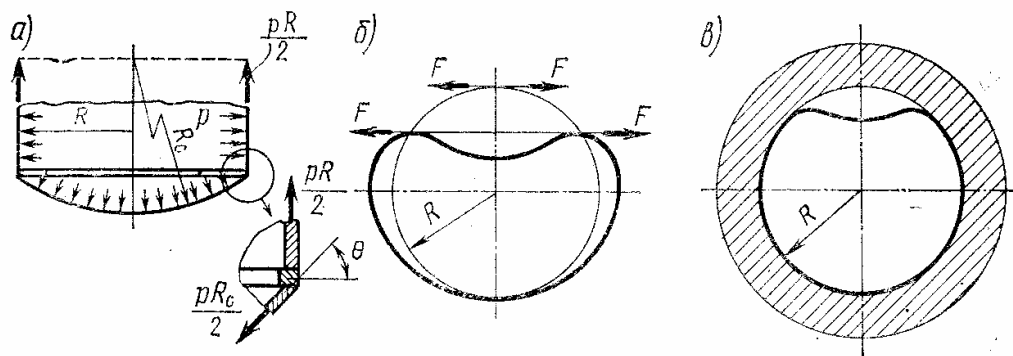


Рис. 8.3

В тонком упругом кольце, стянутом гибкой нитью (рис. 8.3, б), начальная осевая сжимающая сила $N_0 = -F$. Равномерно сжатым в начальном напряженном состоянии оказывается и тонкое кольцо, вставленное с натягом в жесткую обойму (рис. 8.3, в).

Во всех этих случаях начальное напряженное состояние качественно ничем не отличается от начального напряженного состояния, возникающего в кольце при гидростатическом нагружении. При расчете на прочность все эти случаи можно считать эквивалентными. Однако как уже неоднократно отмечалось, для исследования устойчивости системы необходимо рассмотреть условия ее равновесия

В отклоненном от начального состоянии. Поскольку при отклонениях колец от начальной круговой формы действующие на них внешние нагрузки в задачах, изображенных на рис. 8.3, ведут себя качественно различно, то и задачи эти являются принципиально различными с точки зрения устойчивости.

Так, в первой задаче передаваемая на шпангоут нагрузка при изгибе шпангоута существенно изменяется по значению и направлению, поэтому формула (8.6), полученная для гидростатической нагрузки, к этой задаче неприменима. Кроме того, эта формула не учитывает поддерживающего влияния оболочки бака, поэтому значение критической нагрузки, подсчитанное по формуле (8.6), оказывается во много раз ниже действительного [17].

В двух других задачах передаваемая на кольцо нагрузка при отклонениях колец от круговой формы также не является гидростатической: на тех участках, где сохраняется контакт с нитью или обоймой, нагрузка, оставаясь нормальной к оси кольца, меняет свое значение, а на остальной части кольца она просто обращается в нуль. В результате поведение колец при потере устойчивости даже качественно отличается от поведения кольца, теряющего устойчивость под действием гидростатической нагрузки [1].

Можно привести и другие примеры, когда определение критической радиальной нагрузки по формуле (8.6) приводит к неверному результату. Один из немногих, но практически чрезвычайно важных случаев, когда применение этой формулы строго обосновано, — это расчет на устойчивость длинной цилиндрической трубы, нагруженной внешним давлением.

§ 8.2. Основные уравнения устойчивости цилиндрической оболочки

Линеаризованные уравнения устойчивости упругой цилиндрической оболочки получим с помощью приема фиктивной нагрузки, как это было сделано при выводе линеаризованных уравнений устойчивости пластины и кругового кольца (см. § 7.2 и 8.1). При этом задачу устойчивости цилиндрической оболочки рассмотрим в следующей постановке:

1. Замкнутая круговая цилиндрическая оболочка нагружена только приложенными к торцам распределенными силами и гидростатическим внешним давлением интенсивностью $p = p(x, \varphi)$.

2. Срединная поверхность оболочки имеет идеально правильную цилиндрическую форму, и изменением этой формы в начальном докритическом состоянии полностью пренебрегаем.

3. Начальное докритическое состояние оболочки безмоментное, а при потере устойчивости связь между бифуркационными перемещениями первого порядка малости u , v , w и дополнительными внутренними силами выражается зависимостями (6.41), (6.42) линейной теории цилиндрической оболочки при неосесимметричной деформации.

Составим уравнения для определения критического значения внешней нагрузки, при превышении которого начальное состояние равно-

веса оболочки перестает быть устойчивым. В соответствии с перечисленными допущениями в оболочке существуют только начальные внутренние силы $T_{10} = T_{10}(x, \varphi)$, $T_{20} = T_{20}(x, \varphi)$, $S_0 = S_0(x, \varphi)$, удовлетворяющие уравнениям равновесия (6.43) ... (6.45) безмоментной теории:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{10}}{\partial x} + \frac{\partial S_0}{R \partial \varphi} &= 0; \\ \frac{\partial S_0}{\partial x} + \frac{\partial T_{20}}{R \partial \varphi} &= 0; \\ \frac{T_{20}}{R} &= p_z, \end{aligned} \quad (8.8)$$

где $p_z = -p(x, \varphi)$.

Для определения фиктивной поперечной нагрузки $p_{z\varphi} = p_{z\varphi}(x, \varphi)$ подсчитаем сумму проекций всех начальных внутренних сил на направление нормали к деформированному элементу оболочки, как это было сделано для пластины и кольца (см. с. 191 и 219). В результате получим

$$p_{z\varphi} = \frac{\partial}{\partial x} (\vartheta_1 T_{10}) + \frac{\partial}{R \partial \varphi} (\vartheta_2 T_{20}) + \frac{\partial}{\partial x} (\vartheta_2 S_0) + \frac{\partial}{R \partial \varphi} (\vartheta_1 S_0), \quad (8.9)$$

где ϑ_1, ϑ_2 — углы поворота нормали к срединной поверхности оболочки в соответствующих плоскостях. Выполнив в этом выражении дифференцирование произведений, с учетом уравнений равновесия (8.8) получаем формулу

$$p_{z\varphi} = -pR\kappa_2 + T_{10}\kappa_1 + 2S_0\kappa_{12}, \quad (8.10)$$

где κ_1, κ_2 и κ_{12} — изменения кривизн и скручивание срединной поверхности оболочки, определяемые зависимостями (6.35).

Теперь для получения однородных линеаризованных уравнений устойчивости достаточно в общих линейных уравнениях, описывающих изгиб цилиндрической оболочки, положить: $p_z = p_{z\varphi}$, $p_x = 0$, $p_\varphi = 0$. Так, например, для изотропной оболочки, используя систему уравнений (6.46) ... (6.48), получим систему однородных уравнений относительно бифуркационных перемещений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{R^2 \partial \varphi^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{R \partial \varphi \partial x} + \mu \frac{\partial w}{R \partial x} &= 0; \\ \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{R \partial \varphi \partial x} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{R^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial w}{R^2 \partial \varphi} + \\ + \frac{h^2}{12R^2} \left(-\frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \varphi} + \frac{\partial^3 w}{R^2 \partial \varphi^3} \right) &= 0; \quad (8.11) \\ \frac{\mu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{R^2 \partial \varphi} + \frac{w}{R^2} + \frac{h^2}{12R^2} \left(-\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \varphi} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3} + \right. \\ \left. + R^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) &= p_{z\varphi}. \end{aligned}$$

Для замкнутой в окружном направлении цилиндрической оболочки в соответствии с порядком полученной системы уравнений на каждом из торцов должно быть задано по четыре граничных условия: два граничных условия относительно нормального прогиба w и его производных и два граничных условия относительно тангенциальных перемещений u и v и их производных. Следует подчеркнуть, что входящие в систему уравнений (8.11) бифуркационные перемещения u, v, w описывают отклонения срединной поверхности оболочки от начальной докритической формы равновесия. Поэтому однородные граничные условия для этих перемещений непосредственно не связаны с граничными условиями начального докритического состояния и должны формулироваться независимо от них (примеры формулировки граничных условий будут рассмотрены в следующих параграфах при решении конкретных задач устойчивости оболочек).

Потери устойчивости цилиндрических оболочек обычно происходят по таким формам, при которых $|\partial w / \partial \varphi| \gg |v|$, $|\partial^2 w / \partial \varphi^2| \gg |w|$. Поэтому в задачах устойчивости часто используют упрощенные зависимости для углов поворота нормали и изменений кривизн пологой оболочки (см. § 6.2):

$$\vartheta_1 = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \vartheta_2 = \frac{\partial w}{R \partial \varphi}; \quad (8.12)$$

$$\kappa_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \kappa_2 = \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \varphi^2}; \quad \kappa_{12} = \frac{\partial^2 w}{R \partial \varphi \partial x}.$$

В этом случае уравнения равновесия должны также быть упрощены [17]: в уравнении (6.39) следует отбросить слагаемое Q_2/R и уравнения равновесия в проекции на три координатные оси будут:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{R \partial \varphi} &= 0; \\ \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{R \partial \varphi} &= 0; \end{aligned} \quad (8.13)$$

$$\frac{T_2}{R} + \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{R \partial \varphi \partial x} + \frac{\partial^2 M_2}{R^2 \partial \varphi^2} = p_z.$$

Как было сделано в плоской задаче теории упругости (см. § 2.1), введем функцию F с помощью соотношений

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = T_2, \quad \frac{\partial^2 F}{R^2 \partial \varphi^2} = T_1; \quad \frac{\partial^2 F}{R \partial \varphi \partial x} = -S. \quad (8.14)$$

Тогда два первых уравнения системы (8.13) будут удовлетворены тождественно. Если учесть, что при использовании упрощенных зависимостей (8.12) для изменения кривизн выражения для изгибающих моментов имеют вид

$$\begin{aligned} M_1 &= D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \varphi^2} \right); \quad M_2 = D \left(\frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \varphi^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ M_{12} &= (1 - \mu) D \frac{\partial^2 w}{R \partial \varphi \partial x}, \end{aligned} \quad (8.15)$$

то третье уравнение равновесия можно записать так:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + D \nabla^2 \nabla^2 w = p_z, \quad (8.16)$$

где

$$\nabla^2 (*) = \frac{\partial^2 (*)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (*)}{R^2 \partial \varphi^2}.$$

Исключая из формул (6.34) для относительных удлинений и углов сдвига перемещения u и v , приходим к уравнению совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{R^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{R \partial \varphi \partial x} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (8.17)$$

Используя соотношения упругости (6.41) и соотношения (8.14), из уравнения совместности деформаций получим

$$\frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 F = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (8.18)$$

Окончательно, заменив в уравнении равновесия (8.16) поперечную нагрузку p_z фиктивной нагрузкой по формуле (8.10), запишем упрощенную систему линейных однородных уравнений устойчивости цилиндрической оболочки:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + D \nabla^2 \nabla^2 w + pR \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \varphi^2} - T_{x0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2S_0 \frac{\partial^2 w}{R \partial \varphi \partial x} = 0; \\ - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 F = 0. \end{aligned} \quad (8.19)$$

При решении этой системы уравнений однородные граничные условия, конечно, следует выразить через функции w и F и их производные.

Упрощенную систему уравнений (8.19) следует использовать в тех случаях, когда потеря устойчивости оболочки происходит с образованием большого числа волн как в окружном, так и в осевом направлениях: тогда в пределах каждой волны оболочку можно считать полой.

Многие задачи устойчивости изотропных и ортотропных цилиндрических оболочек удается просто и, главное, достаточно точно решить с помощью полубезмоментной теории, изложенной в § 6.4. Однородное уравнение устойчивости полубезмоментной цилиндрической оболочки можно получить, заменив в основном разрешающем уравнении (6.66) поперечную нагрузку p_z фиктивной поперечной нагрузкой по формуле (8.10) и положив $p_x = 0$ и $p_\varphi = 0$:

$$\begin{aligned} B_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{D_2}{R^6} \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w \right) + \\ + \frac{\partial^4}{R^2 \partial \varphi^4} (pR \kappa_2 - T_{10} \kappa_1 - 2S_0 \kappa_{12}) = 0. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Здесь B_1 и D_2 — соответственно жесткость оболочки на растяжение—сжатие в продольном направлении и изгибная жесткость в окружном направлении. Изменения кривизн подсчитывают по формулам

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \kappa_2 = \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w \right); \\ \kappa_{12} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \approx \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial x}. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Однородные граничные условия в задачах устойчивости полубезмоментной оболочки и условия сопряжения формулируются аналогично тому, как это было сделано в § 6.4.

Применение уравнения (8.20) оправдано, когда при потере устойчивости оболочки образуется несколько волн в окружном направлении и одна полуволна в осевом направлении. В этом случае для бифуркационных перемещений выполняется условие $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \ll \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}$ и полубезмоментная теория достаточно точно описывает деформацию оболочки. Пример такой задачи — потеря устойчивости оболочки при внешнем давлении.

Энергетический путь исследования устойчивости оболочек бывает весьма полезен как для получения приближенных решений, так и для вывода системы разрешающих уравнений и формулировки граничных и стыковочных условий в сложных задачах, например в задачах устойчивости многослойных анизотропных оболочек. Сейчас без подробных промежуточных выкладок приведем основные соотношения, необходимые для исследования устойчивости изотропной цилиндрической оболочки при сформулированных в начале параграфа допущениях.

Полная потенциальная энергия оболочки $\mathcal{E} = U + \Pi$, где U — внутренняя энергия деформации оболочки; Π — потенциал внешних сил, действующих на оболочку. В линейных задачах деформирования оболочек, когда справедливы зависимости (6.34) и (6.35), величина U определяется выражением

$$\begin{aligned} U &= \frac{D}{2} \iint [(\kappa_1 + \kappa_2)^2 + 2(1 - \mu)(\kappa_{12}^2 - \kappa_1 \kappa_2)] R d\varphi dx + \\ &+ \frac{Eh}{2(1 - \mu^2)} \iint \left(\varepsilon_1^2 + 2\mu \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 + \frac{1 - \mu}{2} \gamma^2 \right) R d\varphi dx. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Потенциал внешних поверхностных сил (без учета контурных нагрузок)

$$\Pi = - \iint (p_x u + p_\varphi v + p_z w) R d\varphi dx. \quad (8.23)$$

Для определения критических нагрузок (см. § 1.6) необходимо изменение полной потенциальной энергии $\Delta \mathcal{E}$ подсчитать с точностью до квадратов бифуркационных перемещений, переводящих оболочку в новое состояние равновесия, смежное с начальным. Используя третье допущение, сформулированное в начале параграфа, и рассуждая так же, как при подсчете изменения полной потенциальной энергии пластины (см. § 7.3), окончательно получим [1]:

$$\Delta \mathcal{E} = U_s + U_\kappa + V + \Delta \Pi, \quad (8.24)$$

где

$$\begin{aligned}
 U_\varepsilon &= \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \iint \left(\varepsilon_1^2 + 2\mu\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 + \frac{1-\mu}{2} \gamma^2 \right) R d\varphi dx; \\
 U_\kappa &= \frac{D}{2} \iint [(\kappa_1 + \kappa_2)^2 + 2(1-\mu)(\kappa_{12}^2 - \kappa_1\kappa_2)] R d\varphi dx; \\
 V &= \iint \left(\frac{1}{2} \vartheta_1^2 T_{10} + \vartheta_1 \vartheta_2 S_0 + \frac{1}{2} \vartheta_2^2 T_{20} \right) R d\varphi dx; \\
 \Delta\Pi &= \frac{1}{2} \iint p [\omega(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - u\vartheta_1 - v\vartheta_2] R d\varphi dx.
 \end{aligned}$$

Здесь p — внешнее гидростатическое давление; T_{10} , T_{20} , S_0 — внутренние силы начального безмоментного состояния равновесия оболочки. Удлинение ε_1 , ε_2 , γ , углы поворота нормали ϑ_1 , ϑ_2 и изменения кривизн κ_1 , κ_2 , κ_{12} , связанные с переходом оболочки в новое состояние равновесия, выражаются через бифуркационные перемещения u , v , ω с помощью линейных зависимостей, приведенных в § 6.3.

Дальнейшее решение можно вести из условия $\delta(\Delta\Pi) = 0$ либо из условия $\Delta\Pi = 0$ при дополнительном требовании минимума критической нагрузки. На основе того и другого условия можно строить как точные, так и приближенные решения задач устойчивости оболочек.

§ 8.3. Устойчивость цилиндрической оболочки при осевом сжатии

На рис. 8.4 изображена цилиндрическая оболочка длиной l и радиусом R с толщиной стенки h , сжатая равномерно распределенными силами интенсивностью q . Начальное безмоментное состояние такой оболочки

$$T_{10} = -q, \quad T_{20} = 0, \quad S_0 = 0. \quad (8.25)$$

Найдем критическое значение $q_{кр}$ нагрузки, при превышении которого это начальное безмоментное состояние перестанет быть устойчивым. В рассматриваемой задаче в зависимости от геометрических параметров оболочки и условий закрепления ее торцов потеря устойчивости может происходить по нескольким качественно различным формам.

Для исследования осесимметричной формы потери устойчивости (рис. 8.4, а) воспользуемся уравнением осесимметричного изгиба цилиндрической оболочки под действием поперечной нагрузки:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w = p_z. \quad (8.26)$$

Заменив здесь поперечную нагрузку p_z фиктивной поперечной нагрузкой по формуле (8.10), получим однородное линейное уравнение, описывающее осесимметричные формы потери устойчивости цилиндрической оболочки при начальном напряженном состоянии, выражаемом зависимостями (8.25):

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w + q \frac{d^2 w}{dx^2} = 0. \quad (8.27)$$

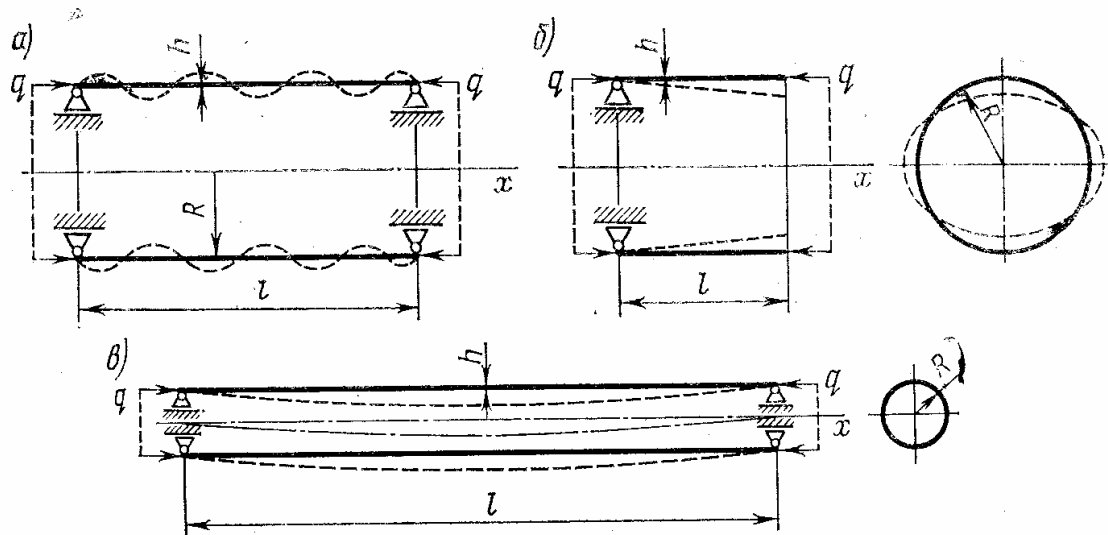


Рис. 8.4

Наиболее просто это уравнение решается при граничных условиях свободного опирания, когда на обоих торцах оболочки задано $w=0$ и $d^2w/dx^2=0$. В этом случае решением уравнения (8.27) будут функции

$$w_m = C_m \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad (8.28)$$

где $m = 1, 2, \dots$

Подставив это решение в уравнение (8.27), получим для каждого числа полуволн m свое независимое уравнение

$$C_m \left[D \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 + \frac{Eh}{R^2} - q_m \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right] \sin \frac{m\pi x}{l} = 0.$$

Тривиальный случай, когда все коэффициенты $C_m \equiv 0$ соответствуют начальному безмоментному состоянию равновесия. Чтобы было возможно $C_m \neq 0$, необходимо, чтобы обращалось в нуль выражение в квадратных скобках. Из этого условия следует

$$q_m = D \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \frac{Eh}{R^2} \left(\frac{l}{m\pi} \right)^2, \quad (8.29)$$

где $m = 1, 2, \dots$. Подобрав число полуволн m из условия минимума значения q_m , найдем критическое значение $q_{кр}$, как это делалось при решении задачи устойчивости прямоугольной пластины (см. § 7.2).

Структура выражения (8.29) характерна для задач устойчивости оболочек: величина q_m зависит от двух слагаемых, первое из которых пропорционально изгибной жесткости оболочки D , а второе — жесткости оболочки Eh на растяжение—сжатие, причем первое слагаемое растет с увеличением числа полуволн m , второе — уменьшается.

Тонкие оболочки обычно теряют устойчивость с образованием большого числа полуволн. Обозначив $(m\pi/l)^2 = \eta$, можно записать

$$q_m = D\eta + \frac{Eh}{R^2} \frac{1}{\eta} \quad (8.30)$$

и, условно считая параметр η изменяющимся непрерывно, искать минимум этого выражения из условия $dq_m/d\eta = 0$. После несложных выкладок получим

$$m_{кр} \approx \frac{l}{\pi} \sqrt{\eta_{кр}} = \frac{l}{\pi R} \sqrt[4]{\frac{EhR^2}{D}} \quad (8.31)$$

и

$$q_{кр} = \frac{2}{R} \sqrt{DEh}. \quad (8.32)$$

(Отметим, что выражения (8.31) и (8.32) можно использовать и для ортотропной оболочки, заменив в них величину D изгибной жесткостью оболочки D_1 в осевом направлении, и величину Eh — жесткостью оболочки B_2 на растяжение—сжатие в окружном направлении.)

Уравнение (8.27) нетрудно решить и при других граничных условиях, причем оказывается, что если на обоих торцах задано $w = 0$, то независимо от двух других граничных условий значение величины $q_{кр}$ для достаточно длинных и тонких оболочек практически совпадает со значением $q_{кр}$, определяемым формулой (8.32).

Неосесимметричные формы потери устойчивости сжатой в осевом направлении изотропной цилиндрической оболочки можно исследовать с помощью системы уравнений (8.19), которая при напряженном состоянии, соответствующем зависимостям (8.25), принимает вид

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + D \nabla^2 \nabla^2 w + q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad (8.33)$$

$$\frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 F - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Для оболочек конечной длины эта система уравнений допускает элементарное аналитическое решение только при одной единственной комбинации граничных условий, когда на обоих торцах оболочки задано

$$w = 0; M_1 = 0; v = 0; T_1 = 0. \quad (8.34)$$

Как нетрудно проверить, эти граничные условия эквивалентны таким граничным условиям:

$$w = 0; \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0; F = 0; \quad (8.35)$$

Приведенные граничные условия довольно своеобразны: это не условия шарнирного закрепления края оболочки, поскольку $T_1 = 0$ и, следовательно, $u \neq 0$, и не условия свободного опирания, так как $v = 0$ и, следовательно, $S \neq 0$. Физически эти граничные условия можно трактовать так: край оболочки подкреплен тонким кольцом с не-растяжимой осью, обладающим очень большой изгибной жесткостью в своей плоскости, но совершенно не сопротивляющимся кручению и деформациям из плоскости.

Решением системы уравнений (8.33) при граничных условиях (8.34) будут функции

$$\begin{aligned} \omega_{nm} &= A_{nm} \sin n\varphi \sin \frac{m\pi x}{l}; \\ F_{nm} &= B_{nm} \sin n\varphi \sin \frac{m\pi x}{l}, \end{aligned} \quad (8.36)$$

где n, m — некоторые целые числа.

Подставив эти функции в систему дифференциальных уравнений и сократив общее для всех слагаемых произведение синусов, получим однородную систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \left\{ D \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right]^2 - q \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right\} A_{nm} - \frac{1}{R} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 B_{nm} &= 0; \\ \frac{1}{R} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 A_{mn} + \frac{1}{Eh} \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right]^2 B_{nm} &= 0. \end{aligned}$$

Из условия равенства нулю определителя последней системы находим

$$q_{nm} = D\eta + \frac{Eh}{R^2} \frac{1}{\eta}, \quad (8.37)$$

где $\eta = \left(\frac{l}{m\pi} \right)^2 \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right]^2$.

Выражение (8.37) формально совпадает с выражением (8.30) осесимметричной задачи. При большом числе волн в осевом и окружном направлениях, — а в § 8.2 отмечалось, что уравнения (8.19) применимы именно в этом случае, — комплекс η можно рассматривать как непрерывно изменяющийся параметр. Тогда условие минимума величины q_{nm} снова приводит к формуле (8.32), которая для изотропной оболочки принимает вид

$$q_{кр} = \frac{Eh^3}{R \sqrt{3(1-\mu^2)}}. \quad (8.38)$$

Критическое значение комплекса

$$\eta_{кр} = \left(\frac{l}{m_{кр}\pi} \right)^2 \left[\left(\frac{m_{кр}\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{n_{кр}}{R} \right)^2 \right]^2 = \frac{2 \sqrt{3(1-\mu^2)}}{Rh}. \quad (8.39)$$

Последняя формула не дает конкретных критических значений $m_{кр}$ и $n_{кр}$, а только устанавливает некоторую связь между ними. Таким образом, одному и тому же критическому значению нагрузки изотропной оболочки, определяемому формулой (8.32), соответствует целая серия различных комбинаций значений $m_{кр}$ и $n_{кр}$, включая $n_{кр} = 0$. Это означает, что при достижении значения $q_{кр}$ у оболочки становится возможным не одно, а целая серия новых изгибных состояний равновесия, смежных с начальным безмоментным.

При граничных условиях, отличных от условий (8.34), решение несимметричной задачи устойчивости сжатой в осевом направлении

цилиндрической оболочки резко усложняется. Однако оказывается, что если на торцах оболочки запрещены перемещения w и v , то для тонкой и достаточно длинной цилиндрической оболочки нагрузка $q_{кр}$ практически не зависит от остальных граничных условий и тоже определяется формулой (8.32).

Рассмотрим далее задачу устойчивости, сжатой в осевом направлении цилиндрической оболочки, на одном краю которой заданы граничные условия (8.34), а другой край полностью свободен (рис. 8.4, б). Качественное отличие этой задачи от только что рассмотренных заключается в том, что при заданных граничных условиях оболочка допускает чисто изгибные деформации без растяжений и сдвигов срединной поверхности.

Для определения нагрузки $q_{кр}$ воспользуемся энергетическим методом, причем решение построим приближенное, взяв бифуркационные перемещения

$$u_n = -\frac{A_n}{n^2} \cos n\varphi, \quad v_n = -\frac{A_n}{n} \frac{x}{R} \sin n\varphi, \quad w_n = A_n \frac{x}{R} \cos n\varphi, \quad (8.40)$$

где A_n — произвольный параметр. Как легко проверить, выбранные функции удовлетворяют всем граничным условиям при $x = 0$ и двум граничным условиям ($T_1 = 0$, $S = 0$) на свободном краю оболочки; два остальных силовых граничных условия на свободном краю удовлетворяются только приближенно.

При выбранных функциях, используя зависимости из § 6.3, находим

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 0; \quad \varepsilon_2 = 0; \quad \gamma = 0; \\ \vartheta_1 &= \frac{A_n}{R} \cos n\varphi; \quad \vartheta_2 = -\frac{A_n x}{R^2} \left(n - \frac{1}{n} \right) \sin n\varphi; \\ \kappa_1 &= 0; \quad \kappa_2 = -\frac{A_n x}{R^3} (n^2 - 1) \cos n\varphi; \quad \kappa_{12} = -\frac{A_n}{R^2} \left(n - \frac{1}{2n} \right) \sin n\varphi. \end{aligned}$$

Используя энергетический подход, изменение полной потенциальной энергии подсчитываем с помощью выражения (8.24) при начальном напряженном состоянии, соответствующем зависимостям (8.25). Учитывая, что в рассматриваемой задаче $U_e = 0$ и $\Delta\Pi = 0$, получим

$$\Delta\mathcal{E} = A_n^2 \pi R l \left\{ \frac{D}{2R^4} \left[\frac{(n^2 - 1)^2}{3} \left(\frac{l}{R} \right)^2 + 2(1 - \mu) \left(n - \frac{1}{2n} \right)^2 \right] - \frac{q}{2R^2} \right\}.$$

Из условия $\Delta\mathcal{E} = 0$ при дополнительном требовании минимума критической нагрузки приходим к окончательной формуле

$$q_{кр} = \frac{D}{R^2} \left[3 \left(\frac{l}{R} \right)^2 + (1 - \mu) \frac{49}{8} \right] \quad (8.41)$$

при $n_{кр} = 2$.

Поскольку в рассмотренном случае оболочка теряет устойчивость без растяжений и сдвигов срединной поверхности, структура формулы (8.41), в которую входит только изгибная жесткость оболочки D , качественно отличается от структуры формул (8.32) и (8.38). Вид оболочки, потерявшей устойчивость, показан пунктиром на рис. 8.4, б.

Очень длинная цилиндрическая оболочка (труба) при осевом сжатии может потерять устойчивость как стержень (рис. 8.4, в). В этом случае, поскольку сжимающая сила $F = 2\pi Rq$, получаем

$$q_{кр} = \frac{1}{2\pi R} C \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = C \frac{\pi^2 Eh}{2} \left(\frac{R}{l}\right)^2, \quad (8.42)$$

где коэффициент C зависит от способа закрепления торцов трубы (см. § 7.1). (При свободном опирании торцов $C = 1$.)

Итак, сжатая в осевом направлении цилиндрическая оболочка может терять устойчивость по трем качественно различным формам: с искривлением образующих (рис. 8.4, а), без растяжения срединной поверхности (рис. 8.4, б) и как стержень (рис. 8.4, в). Сравним значения критических сжимающих напряжений, соответствующих этим трем случаям потери устойчивости.

Для изотропной оболочки в первом случае из формулы (8.38) получим

$$\sigma_{кр} = \frac{q_{кр}}{h} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \frac{h}{R}. \quad (8.43)$$

во втором случае из формулы (8.41) находим

$$\sigma_{кр} = \frac{E}{12(1-\mu^2)} \left[3 \left(\frac{l}{R}\right)^2 + (1-\mu) \frac{49}{8} \right] \left(\frac{h}{R}\right)^2; \quad (8.44)$$

наконец, в третьем случае формула (8.42) дает (при $C = 1$)

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{R}{l}\right)^2 E. \quad (8.45)$$

Для тонких оболочек средней длины формула (8.44), содержащая малый множитель $(h/R)^2$, приводит к значениям критических напряжений, существенно меньшим, чем две другие формулы. Но этот случай потери устойчивости почти не встречается в практике, так как в реальных конструкциях торцы оболочки обычно бывают закреплены. Потому для оболочек средней длины основное практическое значение имеет первый случай, для которого при $\mu = 0,3$ получаем простую, но чрезвычайно важную для всей теории устойчивости оболочек формулу

$$\sigma_{кр} = 0,6Eh/R. \quad (8.46)$$

Отметим при этом, что суммарная осевая критическая сила равна

$$F_{кр} = 0,6 \cdot 2\pi h^2 E \quad (8.47)$$

и не зависит от радиуса R оболочки.

§ 8.4. Устойчивость цилиндрической оболочки при внешнем давлении

Для цилиндрической оболочки длиной l , радиусом R с толщиной стенки h , нагруженной внешним давлением p (рис. 8.5) и находящейся в начальном безмоментном состоянии:

$$T_{10} = 0, T_{20} = -pR, S_0 = 0, \quad (8.48)$$

найдем критическое значение $p_{кр}$ внешнего давления.

Если оболочка не слишком короткая, то простое и надежное решение этой задачи дает полубезмоментная теория цилиндрических оболочек. Однородное уравнение устойчивости (8.20), полученное на основе полубезмоментной теории, перепишем для начального состояния (8.48):

$$B_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{D_2}{R^3} \left(\frac{\partial^8 w}{\partial \varphi^8} + 2 \frac{\partial^6 w}{\partial \varphi^6} + \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) + \frac{\rho}{R^3} \left(\frac{\partial^6 w}{\partial \varphi^6} + \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) = 0. \quad (8.49)$$

В случае замкнутой в окружном направлении оболочки с произвольными, но неизменными по всему контуру торцов граничными условиями решение можно искать в виде

$$w = X \sin n\varphi, \quad (8.50)$$

где $X = X(x)$; $n = 2, 3, 4, \dots$. Подставив эту функцию в однородное уравнение устойчивости и сократив общий множитель $\sin n\varphi$, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами

$$X^{IV} - \left(\frac{\lambda}{R} \right)^4 X = 0, \quad (8.51)$$

где $(*)' = d(*)/dx$;

$$\lambda^4 = \frac{R n^4 (n^2 - 1)}{B_1} \left[\rho - \frac{D_2 (n^2 - 1)}{R^3} \right]. \quad (8.52)$$

Заданные на торцах оболочки однородные граничные условия выразим через функцию $X(x)$ (см. § 6.4). Например, граничные условия $v = 0$; $T_1 = 0$ приводят к условиям

$$X = 0; \quad X'' = 0. \quad (8.53)$$

Неподвижное закрепление торца оболочки ($v = 0$, $u = 0$) дает

$$X = 0, \quad X' = 0. \quad (8.54)$$

На свободном торце оболочки, где $T_1 = 0$, $S = 0$, получим

$$X'' = 0, \quad X''' = 0. \quad (8.55)$$

Уравнение (8.51) и его граничные условия по форме полностью совпадают с уравнением и граничными условиями хорошо изученной задачи о свободных колебаниях однородной балки, и при одинаковых граничных условиях функция $X(x)$ повторяет форму изогнутой оси колеблющейся балки.

Считая $\lambda^4 > 0$, запишем решение уравнения (8.51) так:

$$X = A_1 \sin \frac{\lambda x}{R} + A_2 \cos \frac{\lambda x}{R} + A_3 \operatorname{sh} \frac{\lambda x}{R} + A_4 \operatorname{ch} \frac{\lambda x}{R}. \quad (8.56)$$

Заданные на торцах оболочки четыре однородных граничных условия (по два на каждом торце) составляют систему четырех однородных линейных уравнений относительно произвольных постоянных A_j . Равенство нулю определителя этой системы уравнений приводит к характеристическому уравнению, наименьший корень λ_1 которого* позволяет, используя выражение (8.52), записать

$$p_n = \frac{B_1}{R} \frac{\lambda_1^4}{n^4(n^2-1)} + \frac{D_2}{R^3} (n^2-1). \quad (8.57)$$

При фиксированных геометрических и жесткостных параметрах оболочки, подобрав из условия минимума величины p_n число волн $n_{кр}$, получим критическое значение внешнего давления $p_{кр}$.

При достаточно большом числе волн n , образующихся в окружном направлении, в формуле для p_n можно пренебречь единицей по сравнению с величиной n^2 и тогда определение критического давления $p_{кр}$ существенно упрощается. В этом случае, рассматривая величину $n^2 = \eta$ как непрерывно изменяющийся параметр, из условия минимума значения p_n находим

$$n_{кр}^2 \approx \eta_{кр} = \lambda_1 \left(\frac{B_1 3R^3}{RD_2} \right)^{1/4} \quad (8.58)$$

и

$$p_{кр} = 4\lambda_1 \left(\frac{B_1}{R} \right)^{1/4} \left(\frac{D_2}{3R^3} \right)^{3/4}. \quad (8.59)$$

Приведем примеры определения критического давления $p_{кр}$ для нескольких конкретных вариантов граничных условий, заданных на торцах оболочки.

1. На обоих торцах оболочки заданы граничные условия (8.53) свободного опирания; аналог этой задачи — свободные колебания шарнирно опертой балки. В этом случае в общем решении (8.56), очевидно, $A_2 = A_3 = A_4 = 0$; $\lambda_1 = \pi R/l$, и поперечный бифуркационный прогиб оболочки описывается функцией

$$w_n = A_1 \sin \frac{\pi x}{l} \sin n\varphi. \quad (8.60)$$

Выражение (8.57) принимает вид

$$p_n = \frac{B_1 (\pi R/l)^4}{R n^4 (n^2-1)} + \frac{D_2}{R^3} (n^2-1). \quad (8.61)$$

Отсюда при $l/R \rightarrow \infty$ получим формулу для бесконечно длинной оболочки (трубы), нагруженной внешним давлением:

$$p_{кр}^\infty = \frac{(n_{кр}^2-1) D_2}{R^3} = \frac{3D_2}{R^3}, \quad (8.62)$$

где $n_{кр} = 2$. Как и следовало ожидать, эта формула совпадает с формулой (8.6) для кольца с изгибной жесткостью $EJ = 1 \cdot D_2$, нагруженного гидростатической погонной силой $q = 1 \cdot p$.

* Остальные корни λ_i для определения значения $p_{кр}$ интереса не представляют.

3. На одном торце оболочки заданы граничные условия (8.54), а на другом — граничные условия (8.55), т. е. один торец закреплен неподвижно, а другой полностью свободен; аналог — консольно заземленная балка. В этом случае $\lambda_1 = 0,6\pi R/l$, откуда

$$p_{кр} = 0,6p_{кр0}. \quad (8.67)$$

Критическое число волн $n_{кр}$ для оболочек средней длины, как и в предыдущей задаче, определяется формулой (8.58) при соответствующем значении λ_1 .

4. На одном торце оболочки заданы граничные условия (8.53), а на другом — условия (8.55), т. е. один торец оперт, а другой — полностью свободен; аналог — балка, один конец которой шарнирно закреплен, а другой полностью свободен. Это вырожденный случай, и первая частота свободных колебаний балки равна нулю, так как при таких граничных условиях балка превращается в механизм. Как отмечалось в предыдущем параграфе, при таких граничных условиях цилиндрическая оболочка может деформироваться без растяжений и сдвигов срединной поверхности; поэтому критическое давление полубезмоментной оболочки при этих граничных условиях определяется формулой (8.62).

Аналогично можно исследовать устойчивость полубезмоментной оболочки и при других вариантах граничных условий, в том числе и при упругом закреплении торцов [1].

Нагружение цилиндрической оболочки внешним давлением в большинстве реальных случаев сопровождается возникновением в ней осевых сил. Для оценки степени влияния этих осевых сил на значение $p_{кр}$ сопоставим значения критических напряжений при осевом сжатии и поперечном давлении. В случае длинной изотропной оболочки, учитывая, что $\sigma_2 = -pR/h$, по формуле (8.62) находим критическое сжимающее окружное напряжение

$$\sigma_{2кр}^{\infty} = \frac{E}{4(1-\mu^2)} \left(\frac{h}{R} \right)^2. \quad (8.68)$$

Для изотропной оболочки средней длины [см. формулу (8.64)]

$$\sigma_{2кр} = 0,92E \frac{R}{l} \left(\frac{h}{R} \right)^{3/2}. \quad (8.69)$$

В то же время определяемое формулой (8.46) критическое сжимающее осевое напряжение $\sigma_{1кр} = 0,6E(h/R)$. Как видим, для тонких и не слишком коротких цилиндрических оболочек с закрепленными торцами критические окружные напряжения оказываются существенно меньше осевых. Поэтому, если в таких оболочках начальные окружные и осевые напряжения имеют один порядок, можно ожидать, что значение критического внешнего давления будет мало зависеть от осевой силы. В частности, при всестороннем внешнем давлении, когда $\sigma_2 = 2\sigma_1$, критическое давление можно подсчитывать по вышеприведенным зависимостям.

В тех случаях, когда критическое давление заметным образом зависит от осевой силы, достаточно точное решение можно получить с

помощью упрощенной системы уравнений (8.19), которая при $T_{10} = -q$, $T_{20} = -pR$, $S_0 = 0$ принимает такой вид:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + D \nabla^2 \nabla^2 w + q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{p}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = 0; \quad (8.70)$$

$$-\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{Eh} \nabla \nabla F = 0,$$

где q — погонная сжимающая нагрузка, приложенная к торцам оболочки.

Простое аналитическое решение этой системы уравнений опять удастся получить только при граничных условиях (8.34). Повторив выкладки и рассуждения, изложенные в § 8.3, приходим к выражению

$$p_{nm} + \left(\frac{m\pi R}{nl} \right)^2 \frac{q_{nm}}{K} = \frac{Eh}{R} \frac{(m\pi R/l)^4}{n^6 \{1 + [m\pi R/(nl)]^2\}^2} + \frac{D}{R^3} n^2 \{1 + [m\pi R/(nl)]^2\}^2, \quad (8.71)$$

минимизируя которое по n и m можно найти критические значения давления p и осевой нагрузки q , т. е. построить границу области устойчивости для рассматриваемой задачи (см. § 7.3). Выражение (8.71) при соответствующем изменении знаков при величинах p и q справедливо и для тех случаев, когда внешнее давление сочетается с осевым растяжением или, наоборот, осевое сжатие сочетается с внутренним давлением.

На рис. 8.7 показана граница области устойчивости в безразмерных координатах $\bar{p} = p/p_{кр}$ и $\bar{q} = q/q_{кр}$, где $p_{кр}$ и $q_{кр}$ — соответственно критические значения внешнего давления и осевой сжимающей нагрузки, действующих порознь. При $q > 0$ и $p < 0$, т. е. при сочетании осевого сжатия с внутренним давлением, $\bar{q}_{кр} = 1$ и не зависит от давления p ; при этом потеря устойчивости происходит по осесимметричной форме ($n_{кр} = 0$) и число полуволн в осевом направлении $m_{кр}$ определяется формулой (8.31).

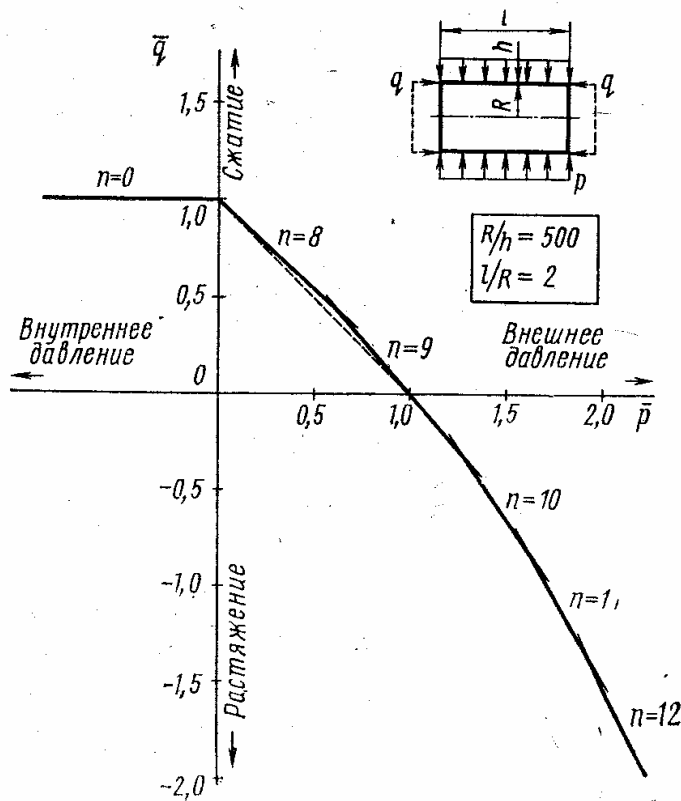


Рис. 8.7

В случае сжатия и в окружном, и в осевом направлениях, т. е. при $p > 0$ и $q > 0$ и при сочетании внешнего давления с растяжением в осевом направлении, граница области устойчивости состоит из отрезков прямых, соответствующих различным значениям $n_{кр}$ при $m = 1$. Отметим, что границу области устойчивости в первом квадранте можно аппроксимировать прямой, изображенной пунктиром на рис. 8.7:

$$\bar{q} + \bar{p} = 1. \quad (8.72)$$

На рис. 8.7 граница области устойчивости построена для оболочки с конкретными значениями параметров $R/h = 500$ и $l/R = 2$, однако в безразмерных координатах \bar{p} и \bar{q} совершенно аналогично выглядит граница области устойчивости и при других значениях этих параметров.

В случае граничных условий, отличных от (8.34), решение задачи существенно усложняется, но характер границы области устойчивости сохраняется тем же.

§ 8.5. Устойчивость цилиндрической оболочки при кручении и поперечном изгибе

Рассмотрим задачу устойчивости цилиндрической оболочки длиной l , радиусом R и толщиной стенки h , находящейся в безмоментном напряженном состоянии (рис. 8.8, а):

$$T_{10} = 0, T_{20} = 0, S_0 = -q_\tau, \quad (8.73)$$

где q_τ — равномерно распределенные касательные силы, приложенные к торцам оболочки и создающие в ней крутящий момент $M = 2\pi R^2 q_\tau$. Для решения этой задачи воспользуемся уравнением (8.20) устойчивости полубезмоментной оболочки, которое при рассматриваемом начальном напряженном состоянии принимает вид

$$B_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{D_2}{R^6} \left(\frac{\partial^8 w}{\partial \varphi^8} + 2 \frac{\partial^6 w}{\partial \varphi^6} + \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) + 2q_\tau \left(\frac{\partial^6 w}{\partial x \partial \varphi^5} + \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial \varphi^3} \right) = 0. \quad (8.74)$$

Простое аналитическое решение этого уравнения удается получить лишь для очень длинных оболочек, игнорируя граничные условия на ее торцах. В этом случае решением будет функция

$$w = A \sin(\lambda x - n\varphi). \quad (8.75)$$

Здесь n — число волн, образующихся в окружном направлении; λ — параметр, определяющий шаг спирали, по которой смещаются гребни этих волн вдоль оболочки (рис. 8.8, б).

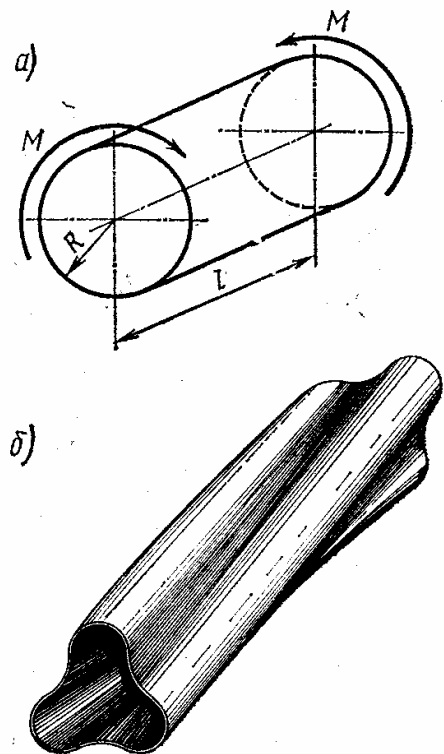


Рис. 8.8

Подставив функцию (8.75) в уравнение (8.74) и сократив общий для всех слагаемых множитель $A \sin(\lambda x - n\varphi)$, получим зависимость

$$q_{\tau n} = \frac{1}{2} \frac{B_1 R^3}{n^3 (n^2 - 1)} \lambda^3 + \frac{1}{2} \frac{D_2 n (n^2 - 1)}{R^3 \lambda}; \quad (n = 2, 3, \dots). \quad (8.76)$$

Поскольку для длинных оболочек параметр λ естественно считать непрерывно изменяющейся величиной, то из условия минимума нагрузки $q_{\tau n}$ находим $\lambda_{\text{кр}}^4 = D_2 n^4 (n^2 - 1)^2 / (3B_1 R^6)$ и, ограничившись действительными значениями $q_{\tau n}$, получим формулу

$$q_{\tau n} = \pm 2R \sqrt{n^2 - 1} \left(\frac{D_2}{3R^3} \right)^{3/4} \left(\frac{B_1}{R} \right)^{1/4}.$$

Наименьшее и, следовательно, критическое значение $q_{\tau n}$, определяемое этой формулой, соответствует $n_{\text{кр}} = 2$:

$$q_{\tau \text{кр}} = \pm 2\sqrt{3} R \left(\frac{D_2}{3R^3} \right)^{3/4} \left(\frac{B_1}{R} \right)^{1/4}. \quad (8.77)$$

В частности, для изотропной оболочки

$$q_{\tau \text{кр}} = \pm \frac{\sqrt{2} ER}{6(1 - \mu^2)^{3/4}} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2}.$$

Окончательные формулы можно переписать в виде зависимостей для критических значений касательного напряжения или крутящего момента. Так, например, для изотропной оболочки

$$\tau_{\text{кр}} = \frac{q_{\tau \text{кр}}}{h} = \pm \frac{\sqrt{2}}{6} \frac{E}{(1 - \mu^2)^{3/4}} \left(\frac{h}{R} \right)^{3/2};$$

$$M_{\text{кр}} = 2\pi R^2 q_{\tau \text{кр}} = \pm \frac{\pi \sqrt{2}}{3} \frac{ER^3}{(1 - \mu^2)^{3/4}} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2}.$$

Обратим внимание на две качественные особенности полученного решения задачи устойчивости длинной цилиндрической оболочки при кручении. Во-первых, потеря устойчивости такой оболочки при кручении (в отличие от потери устойчивости длинной оболочки при внешнем давлении) сопровождается как изгибом, так и растяжением (сжатием) срединной поверхности. Поэтому в окончательную формулу для величины $q_{\tau \text{кр}}$ входят две жесткостные характеристики B_1 и D_2 оболочки и уровень критических напряжений $\tau_{\text{кр}}$ оказывается существенно выше уровня критических окружных сжимающих напряжений, определяемых формулой (8.68). Во-вторых, значения критических нагрузок в задаче о кручении цилиндрической оболочки определяются с точностью до знака, поскольку в силу симметрии изменение направления кручения оболочки не может отразиться на абсолютном значении критических нагрузок.

Для оболочек конечной длины, когда следует учитывать граничные условия на торцах, решение усложняется. Дело в том, что входя-

щие в уравнение (8.74) смешанные производные не позволяют получить решение в виде (8.50). Решение приходится искать в виде ряда

$$w = \sum_m A_m \sin\left(\frac{m\pi x}{l} - n\varphi\right),$$

а это приводит к весьма громоздким выкладкам. Если ограничиться двумя членами такого ряда, удовлетворив при этом лишь условия $w = 0$ на обоих торцах оболочки, решение уравнения (8.74) следует записать в виде

$$w = A \left[\sin\left(\frac{m\pi x}{l} - n\varphi\right) - \sin\left(\frac{(m+2)\pi x}{l} - n\varphi\right) \right]. \quad (8.78)$$

Подставив эту функцию в исходное уравнение и приравняв нулю множители при одинаковых синусах, приходим вместо одного выражения (8.76) к двум:

$$q_{\tau nm} = \frac{1}{2} \frac{B_1 R^3 l}{n^3 (n^2 - 1)} \left(\frac{m\pi}{l}\right)^3 + \frac{1}{2} \frac{D_2 n (n^2 - 1)}{R^3} \left(\frac{l}{m\pi}\right);$$

$$q_{\tau nm} = \frac{1}{2} \frac{B_1 R^3}{n^3 (n^2 - 1)} \left(\frac{(m+2)\pi}{l}\right)^3 + \frac{1}{2} \frac{D_2 n (n^2 - 1)}{R^3} \left(\frac{l}{(m+2)\pi}\right).$$

Минимизируя величину $q_{\tau nm}$ после несложных, но довольно громоздких выкладок, находим критическую нагрузку $q_{\tau \text{кр}}$ (считая при этом $n^2 \gg 1$). Подчеркнем, что величины n и m нельзя в данном случае рассматривать как независимые параметры, ибо два последних выражения устанавливают между ними определенную связь. Окончательный результат можно записать так:

$$q_{\tau \text{кр}} = \pm 9,3R \left(\frac{D_2}{3R^3}\right)^{5/8} \left(\frac{B_1}{R}\right)^{3/8} \left(\frac{R}{l}\right)^{1/2}, \quad (8.79)$$

или для изотропной оболочки

$$\tau_{\text{кр}} = \pm \frac{0,74E}{(1-\mu^2)^{5/8}} \left(\frac{h}{R}\right)^{5/4} \left(\frac{R}{l}\right)^{1/2}.$$

Для оболочек средней длины (при выполнении условий $w = 0$ на обоих торцах) этими формулами можно пользоваться в оценочных расчетах, не принимая во внимание остальные граничные условия на торцах оболочки.

Влияние поперечного давления на величину $\tau_{\text{кр}}$ можно исследовать тоже с помощью уравнения устойчивости полубезмоментной оболочки. Если оболочка с заглушенными торцами помимо сил q_τ нагружена всесторонним внешним давлением p и ее начальное безмоментное напряженное состояние $T_{10} = -pR/2$, $T_{20} = -pR$, $S_0 = q_\tau$, то уравнение (8.20) принимает вид

$$B_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{D_2}{R^6} \left(\frac{\partial^8 w}{\partial \varphi^8} + 2 \frac{\partial^6 w}{\partial \varphi^6} + \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) + \frac{p}{R^3} \left(\frac{\partial^6 w}{\partial \varphi^6} + \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) +$$

$$+ \frac{2q_\tau}{R^3} \left(\frac{\partial^6 w}{\partial x \partial \varphi^5} + \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial \varphi^3} \right) + \frac{p}{2R} \frac{\partial^6 w}{\partial \varphi^4 \partial x^2} = 0. \quad (8.80)$$

Для очень длинных оболочек естественно считать $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \varphi^2}$, что позволяет пренебречь последним слагаемым в уравнении (8.80). Тогда, снова воспользовавшись функцией (8.75), вместо зависимости (8.76) получим

$$q_{\tau n} = \frac{1}{2} \frac{B_1 R^3}{n^3 (n^2 - 1)} \lambda^3 + \frac{1}{2} \frac{D_2 n (n^2 - 1)}{R^3} \left(1 - \frac{p}{p_n} \right) \frac{1}{\lambda},$$

где $p_n = D_2 (n^2 - 1) / R^3$.

Минимизируя значения $q_{\tau n}$ по λ и учитывая, что, как и при $p = 0$, минимуму величины $q_{\tau n}$ соответствует критическое число волн $n_{\text{кр}} = 2$, окончательно приходим к зависимости

$$\left(\frac{q_{\tau}}{q_{\tau \text{кр}}} \right)^{4/3} + \frac{p}{p_{\text{кр}}} = 1. \quad (8.81)$$

Здесь $q_{\tau \text{кр}}$ и $p_{\text{кр}}$ — критические значения нагрузок, q_{τ} и p действующих порознь. Последней зависимостью можно, конечно, пользоваться и для случая внутреннего давления, изменив знак при p на обратный. Граница области устойчивости, описываемая зависимостью (8.81), показана сплошной линией на рис. 8.9 в безразмерных координатах $q_{\tau} = q_{\tau} / q_{\tau \text{кр}}$ и $p = p / p_{\text{кр}}$.

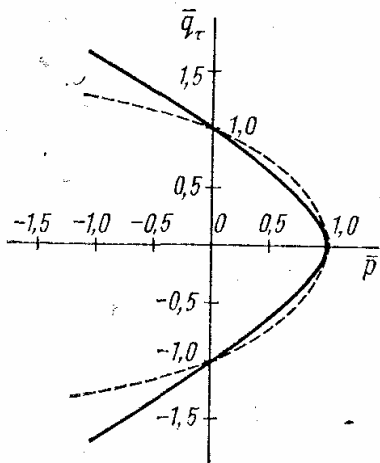


Рис. 8.9

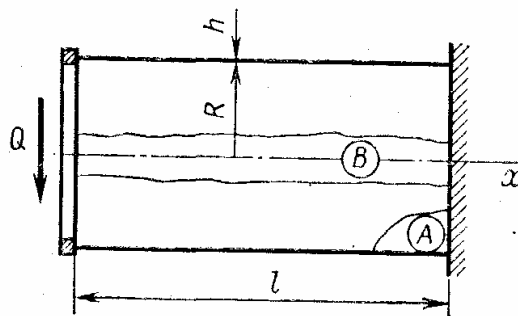


Рис. 8.10

У оболочек средней длины с закрепленными торцами аналитический учет влияния поперечного давления на значение $q_{\tau \text{кр}}$ усложняется, но для оценочных расчетов можно воспользоваться полуэмпирической зависимостью

$$\left(\frac{q_{\tau}}{q_{\tau \text{кр}}} \right)^2 + \frac{p}{p_{\text{кр}}} = 1, \quad (8.82)$$

где $q_{\tau \text{кр}}$ и $p_{\text{кр}}$ определяют по формулам (8.79) и (8.64). На рис. 8.9 эта зависимость показана пунктиром.

Теперь рассмотрим изображенную на рис. 8.10 оболочку, нагруженную поперечной силой Q . Если сила передается через достаточно

жесткий шпангоут, то начальное напряженное состояние оболочки можно считать безмоментным:

$$T_{10} = \frac{Qx}{\pi R^2} \cos \varphi, \quad T_{20} = 0, \quad S_0 = \frac{Q}{\pi R} \sin \varphi. \quad (8.83)$$

Задача устойчивости при таком неоднородном начальном напряженном состоянии сводится к уравнению в частных производных с переменными коэффициентами, которое проинтегрировать аналитически не представляется возможным. Для оценки критического значения $Q_{кр}$ поперечной силы воспользуемся элементарным, но довольно эффективным упрощающим приемом. В основу этого приема положены два соображения. Во-первых, тонкие оболочки средней длины теряют устойчивость с образованием довольно большого числа волн, как было показано в предыдущих параграфах. Поэтому в тех случаях, когда в зоне действия максимальных начальных сил образуется несколько волн, расчет оболочки на устойчивость при переменных величинах $S_0 = S_0(x, \varphi)$ и $T_{10} = T_{10}(x, \varphi)$ можно свести к расчету оболочки с постоянными начальными внутренними силами, равными максимальным их значениям.

Во-вторых, при поперечном изгибе цилиндрической оболочки в зоне максимальных осевых сжимающих напряжений (зона A на рис. 8.10) близки к нулю касательные напряжения, а в зоне максимальных касательных напряжений (зона B на рис. 8.10) близки к нулю осевые напряжения. Поэтому расчет такой оболочки на устойчивость можно производить отдельно по осевым сжимающим напряжениям и по касательным напряжениям.

Максимальное сжимающее напряжение в зоне A равно $\sigma_{1\max} = Ql/(h\pi R^2)$, а максимальное касательное напряжение в зоне B равно $\tau_{\max} = Q/(\pi R)$. Отсюда, используя формулы (8.46) и (8.79), получаем (при $\mu = 0,3$)

$$Q_{\sigma \text{ кр}} = 0,6\pi E h^2 \frac{R}{l}; \quad (8.84)$$

$$Q_{\tau \text{ кр}} = 2,46 E h^2 \sqrt[4]{\frac{R h}{l^2}}. \quad (8.85)$$

Окончательное значение $Q_{кр}$ критической поперечной силы равно меньшему из получаемых по этим формулам. Причем если на оболочку дополнительно действует поперечное давление, то его влияние на значение $Q_{кр}$ можно оценить по его влиянию на величины $\sigma_{кр}$ и $\tau_{кр}$ подобно тому, как это делалось ранее.

§ 8.6. Особенности расчета реальных оболочек на устойчивость

В предыдущих параграфах критические нагрузки оболочек были определены при использовании упрощающих допущений, т. е. в них исследовалась устойчивость некоторых упрощенных аналитических моделей оболочек. Основные допущения состояли в замене реальной оболочки идеализированной оболочкой совершенной геометрической фор-

мы, причем до потери устойчивости начальное напряженное состояние такой идеализированной модели оболочки было принято безмоментным, а размеры и форма — неизменными. В такой постановке (называемой иногда «классической») были найдены критические значения внешних нагрузок, т. е. те значения, при превышении которых начальное напряженное состояние становится неустойчивым.

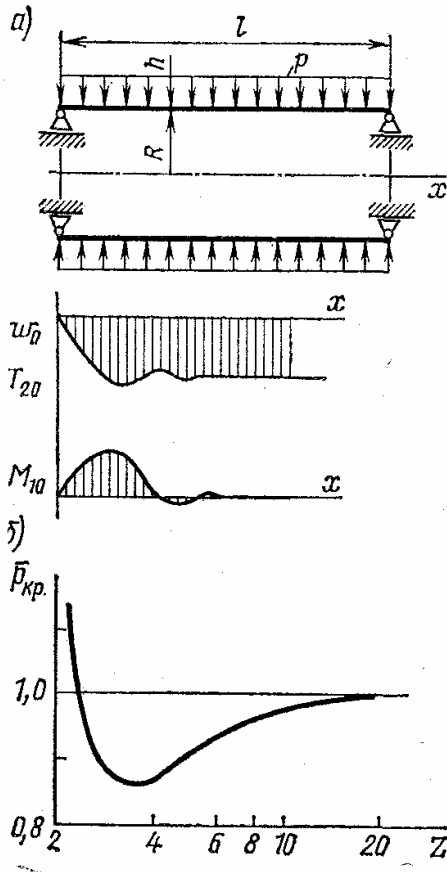


Рис. 8.11

Возникает естественный вопрос, насколько полно и точно результаты исследования устойчивости идеализированных моделей отражают поведение тех реальных оболочек, с которыми инженеру приходится иметь дело при расчете и испытании реальных конструкций. Ответ на этот вопрос можно получить двумя путями: теоретическим, анализируя более сложные решения, свободные от тех или иных допущений, и экспериментальным, исследуя поведение реальных оболочек при нагружении.

Достоверные теоретические решения, свободные от упомянутых упрощающих допущений, удалось получить сравнительно недавно с помощью ЭВМ. Остановимся на тех поправках, которые вносятся в классическое решение, если учитывать моментность начального напряженного состояния и искривление образующей цилиндрической оболочки в начальном состоянии.

На рис. 8.11, а схематично изображено начальное моментное напряженно-деформированное состояние нагруженной равномерным внешним давлением p цилиндрической оболочки длиной l , радиусом R и толщиной стенки h со свободно опертыми торцами: изменение вблизи левого торца осесимметричного прогиба $w_0(x)$ окружной силы $T_{20}(x)$ и изгибающего осевого момента $M_{10}(x)$.

Это напряженно-деформированное состояние описывается уравнением осесимметричного изгиба цилиндрической оболочки:

$$D\bar{w}_0^{IV} + \frac{Eh}{R^2} w_0 = -p - \mu \frac{T_{10}}{R}, \quad (8.86)$$

решение которого при $T_{10} = 0$ можно представить в виде

$$w_0 = -\frac{pR^2}{Eh} + (C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) e^{-kx} + (C_3 \sin kx + C_4 \cos kx) e^{kx}, \quad (8.87)$$

где $k = \sqrt[4]{3(1-\mu^2)/\sqrt{Rh}}$; C_i — произвольные постоянные, определяемые из граничных условий на торцах оболочки.

В рассматриваемом случае граничные условия свободного опирания имеют вид: $w_0(0) = 0$; $w_0''(0) = 0$; $w_0(l) = 0$; $w_0''(l) = 0$.

В частности, для не слишком коротких оболочек при $l \geq 3\sqrt{Rh}$, когда граничные условия на одном торце практически не влияют на напряженно-деформированное состояние оболочки в окрестности другого торца, находим $C_1 = 0$, $C_2 = \rho R^2/(Eh)$, $C_3 = C_4 = 0$, откуда

$$\begin{aligned} w_0 &= -\frac{\rho R^2}{Eh} (1 - e^{-kx} \cos kx); \\ T_{20} &= -\rho R (1 - e^{-kx} \cos kx); \\ M_{10} &= -\frac{\sqrt{3}}{12} \frac{Rh}{\sqrt{1-\mu^2}} \rho e^{-kx} \sin kx. \end{aligned} \quad (8.88)$$

Последние выражения описывают напряженно-деформированное состояние оболочки вблизи левого торца. В силу симметрии задачи точно так же выглядит напряженно-деформированное состояние и вблизи правого торца. В средней части оболочка находится в безмоментном напряженном состоянии:

$$w_{0\text{б.м.}} = -\rho R^2/(Eh), \quad T_{20\text{б.м.}} = -\rho R, \quad M_{10\text{б.м.}} = 0.$$

При $l < 3\sqrt{Rh}$ осесимметричный изгиб охватывает всю длину оболочки; и в этом случае, используя симметрию задачи, нетрудно найти коэффициенты C_i и получить выражения, описывающие начальное напряженно-деформированное состояние оболочки.

Линеаризованные уравнения устойчивости, учитывающие моментность начального напряженного состояния и искривление образующей оболочки, сложнее, чем те, которые были получены в § 8.2, причем следует подчеркнуть, что даже при постоянном внешнем давлении это будут уравнения в частных производных с переменными коэффициентами. Результаты численного решения этих уравнений [12] можно представить в виде графика, показанного на рис. 8.11, б, где

$$Z = \sqrt[4]{1-\mu^2} \frac{l}{R} \sqrt{\frac{R}{h}}; \quad \bar{p}_{\text{кр}} = \frac{p_{\text{кр}}}{\rho_{\text{кр б.м.}}}$$

Здесь $p_{\text{кр}}$ — критическое давление, подсчитанное с учетом моментности начального состояния и искривления образующей, а $\rho_{\text{кр б.м.}}$ — критическое давление, подсчитанное без такого учета по формулам § 8.4. Как видим, моментность начального напряженно-деформированного состояния и искривление образующей оказывает заметное влияние на значение критического внешнего давления только для коротких оболочек. Аналогично влияет на значение $p_{\text{кр}}$ учет начального осесимметричного изгиба оболочки и при других граничных условиях на ее торцах, в том числе и в случае подкрепления торцов упругими шпангоутами [12].

Учет начального осесимметричного изгиба сильнее влияет на результат при расчете равномерно сжатой в осевом направлении цилиндрической оболочки длиной l и радиусом R (рис. 8.12, а). Дело в том, что осевые сжимающие силы при приближении их значений к критическим принципиально изменяют характер начального осесимметричного изгиба оболочки (рис. 8.12, б).

Для выявления этого эффекта вместо линейного уравнения (8.86) осесимметричного изгиба следует использовать уравнение

$$Dw_0^{IV} + \frac{Eh}{R^2} w_0 - T_{10} w_0'' = p - \mu \frac{T_{10}}{R}. \quad (8.89)$$

Это линейризованное неоднородное уравнение, которое иногда называют уравнением нелинейного краевого эффекта, получается из условий равновесия искривленного элемента оболочки (как и при выводе однородных линейризованных уравнений устойчивости). Решение уравнения (8.89) при $T_{10} = -q$ и $p = 0$ можно записать в следующей форме при условии $-1 < \bar{q} = q/q_{кр. б.м} < 1$:

$$w_0 = \mu \frac{qR}{Eh} + C_1 \sin k_1 x \operatorname{sh} k_2 x + C_2 \cos k_1 x \operatorname{ch} k_2 x + C_3 \sin k_1 x \operatorname{ch} k_2 x + C_4 \cos k_1 x \operatorname{sh} k_2 x,$$

где $k_1 = k \sqrt{1 + \bar{q}}$; $k_2 = k \sqrt{1 - \bar{q}}$; $k = \sqrt[4]{3(1 - \mu^2)/Rh}$; $q_{кр. б.м} = Eh^2/[R \sqrt{3(1 - \mu^2)}]$ — критическое значение осевой погонной сжимающей силы, найденное в § 8.3 в предположении безмоментности начального напряженно-деформированного состояния; произвольные постоянные C_i определяют из граничных условий.

При малых (по сравнению с единицей) значениях безразмерной нагрузки \bar{q} решение уравнения (8.89) нелинейного краевого эффекта мало отличается от решения обычного линейного уравнения (8.86) осесимметричного изгиба цилиндрической оболочки. Но если $\bar{q} \rightarrow 1$, понятие «краевого эффекта» теряет силу, так как возмущения, которые при малых значениях \bar{q} локализуются у торцов оболочки, распространяются на расстояния, значительно превышающие зону обычного линейного краевого эффекта (рис. 8.12, б). Амплитуды этих возмущений, охватывающих всю длину оболочки, неограниченно возрастают.

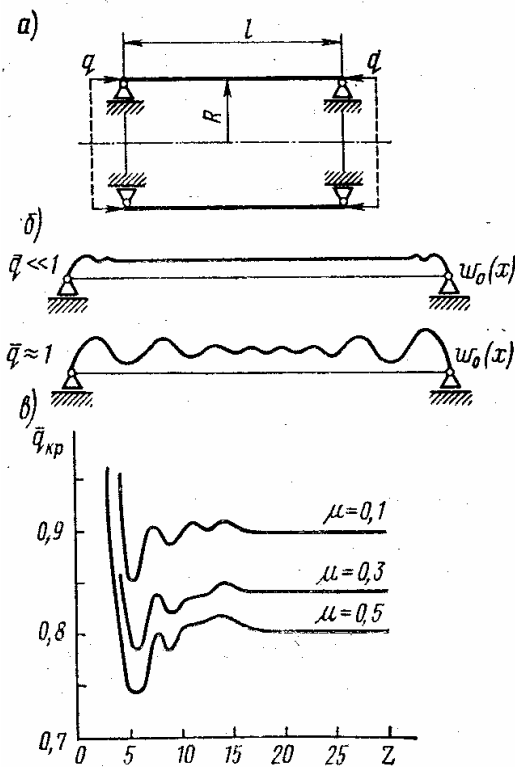


Рис. 8.12

Как показывают вычисления, осесимметричная начальная форма равновесия $w_0 = w_0(x)$ перестает быть устойчивой при некоторых значениях $q_{кр} < q_{кр. б.м}$. На рис. 8.12, в приведены кривые зависимости величины $q_{кр}$ от относительной длины оболочки Z при различных значениях коэффициента Пуассона μ (для оболочки со свободно опертыми торцами). Решения получены и при других граничных условиях на торцах оболочки. Установлено, что учет моментности и изменения геометрии оболочки в начальном напряженно-деформированном состоянии несколько снижает критические значения осевого сжимающего напряжения по сравнению с классическим, причем в зависимости от размеров, граничных условий и значения коэффициента Пуассона μ это сниже-

ние колеблется от нуля до 20%. Аналогичные результаты получены и для других задач устойчивости тонких оболочек [12].

К значительно более серьезным последствиям приводит основное допущение, на котором базируется классическое решение: пренебрежение начальными геометрическими неправильностями формы реальных оболочек. Поведение реальных стержней и пластин с начальными геометрическими неправильностями рассматривалось в § 7.4. Напомним, что малые начальные неправильности при нагрузках меньше критических приводят к появлению малых дополнительных прогибов реальных стержней и пластин; с приближением нагрузки к критическому значению эти дополнительные прогибы начинают сильно расти.

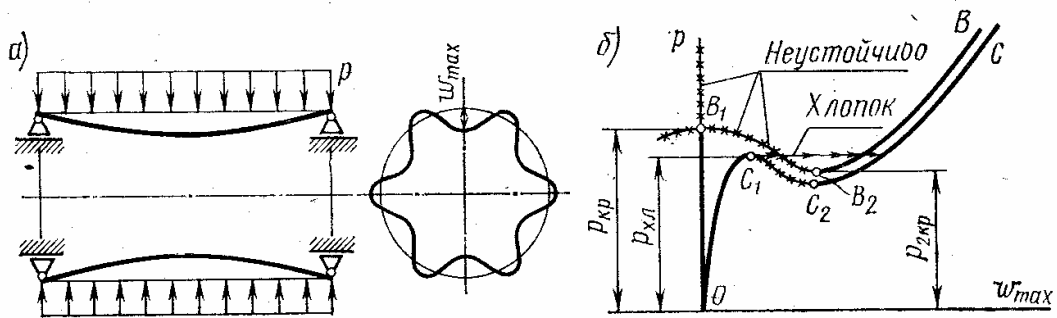


Рис. 8.13

Важно подчеркнуть, что при плавном нарастании нагрузки упругие стержни и пластины в зоне критических значений нагрузки деформируются тоже плавно, все время проходя только через статически устойчивые состояния равновесия.

Аналогично ведет себя под нагрузкой и тонкая упругая оболочка, если закрепления ее торцов допускают чисто изгибную деформацию срединной поверхности без растяжений и сдвигов: начальные неправильности с самого начала нагружения приводят к появлению дополнительных прогибов, которые монотонно увеличиваются по мере роста нагрузки. С приближением нагрузки к критическому значению дополнительные прогибы растут столь интенсивно, что критическое значение нагрузки, найденное для оболочки идеальной формы, будет практически предельным для всякой реальной оболочки (как и в случае сжатого упругого стержня). Например, так деформируются реальные длинные цилиндрические оболочки под действием внешнего давления.

Но если закрепления краев оболочки исключают возможность чисто изгибной деформации, как это обычно и бывает в реальных конструкциях, поведение тонких упругих оболочек при потере устойчивости становится качественно иным.

Рассмотрим, как ведет себя тонкая упругая оболочка, нагруженная внешним давлением p (рис. 8.13, а), и построим диаграмму ее деформирования в координатах p, w_{\max} (рис. 8.13, б), где p — внешнее давление; w_{\max} — перемещение точки, расположенной на гребне волны дополнительного прогиба, направленной внутрь оболочки

(рис. 8.13, а). Для идеально правильной оболочки с помощью линеаризованных уравнений устойчивости может быть найдено критическое значение давления (точка бифуркации B_1 на рис. 8.13, б). Чтобы выяснить, как будет вести себя оболочка после потери устойчивости, необходимо рассмотреть задачу в нелинейной постановке, как это было проделано в § 7.4 при исследовании закритического деформирования стержней и пластин. Для оболочки идеально правильной формы полученная в результате решения нелинейной задачи зависимость нагрузка—прогиб имеет вид кривой B_1B_2B . (Такое решение, конечно, удастся получить только с помощью того или иного приближенного метода.) Эта зависимость качественно отличается от зависимостей нагрузка—прогиб, полученных в § 7.4 для сжатых стержней и пластин.

Во-первых, у оболочки в окрестности критической точки бифуркации B_1 нет новых устойчивых статических состояний равновесия. Новые устойчивые состояния равновесия удалены (участок B_2B) от начального устойчивого состояния (участок OB_1) на конечные расстояния. Поэтому переход оболочки в новое состояние равновесия не может произойти плавно; такой переход неизбежно должен носить скачкообразный характер, происходить в виде хлопка*.

Во-вторых, новые состояния равновесия становятся возможными еще до достижения критического значения давления, найденного с помощью линеаризованных уравнений устойчивости. Эти новые состояния равновесия отделены от начального некоторым энергетическим барьером, уменьшающимся по мере приближения нагрузки к критическому значению.

Всякая реальная оболочка из-за геометрических несовершенств сразу же после приложения нагрузки начинает отклоняться от своей начальной формы (кривая OC_1 на рис. 8.13, б). При достижении некоторого значения нагрузки оболочка теряет устойчивость, переходя хлопком в новое состояние равновесия (из точки C_1 на кривую C_2C). Если такой хлопок сопровождается только упругими деформациями оболочки, то при последующем уменьшении внешнего давления происходит обратный хлопок (из точки C_2 на кривую OC_1).

В задаче устойчивости цилиндрической оболочки, сжатой в осевом направлении (рис. 8.14, а), диаграмму деформирования (рис. 8.14, б) принято строить в координатах q, λ , где q — сжимающая погонная нагрузка; λ — сближение торцов оболочки. Эта диаграмма качественно отличается от диаграмм, построенных в § 7.4 для сжатых стержней и пластин. Прямая OB_1 соответствует равномерному сжатию идеально правильной оболочки. Когда нагрузка достигнет значения $q_{кр}$, соответствующего точке бифуркации B_1 , начальная форма равновесия перестанет быть устойчивой. Но в окрестности точки B_1 у оболочки нет новых устойчивых состояний равновесия и поэтому, как и при нагружении внешним давлением, оболочка теряет устойчивость хлопком. Заметим, что для гладкой изотропной оболочки $\lambda_{кр} =$

* В реальных условиях хлопок сопровождается колебаниями оболочки; новое устойчивое состояние статического равновесия оболочка займет после угасания этих колебаний. Полное описание такого процесса требует динамического подхода и здесь не рассматривается.

$= q_{кр} l / (Eh)$, где l — длина оболочки. Если значение $q_{кр}$ подсчитывать по формулам § 8.3 без учета моментности начального напряженно-деформированного состояния, то получим (независимо от значения модуля упругости материала оболочки E)

$$\lambda_{кр.б.м} = \frac{hl}{R \sqrt{3(1-\mu^2)}} \approx 0,6 \frac{hl}{R},$$

где h — толщина оболочки; R — ее радиус.

Деформирование реальной оболочки, имеющей начальные геометрические несовершенства формы, будет происходить по некоторой кривой OC_1 . После достижения нагрузкой значения $q_{хл}$, соответствующего

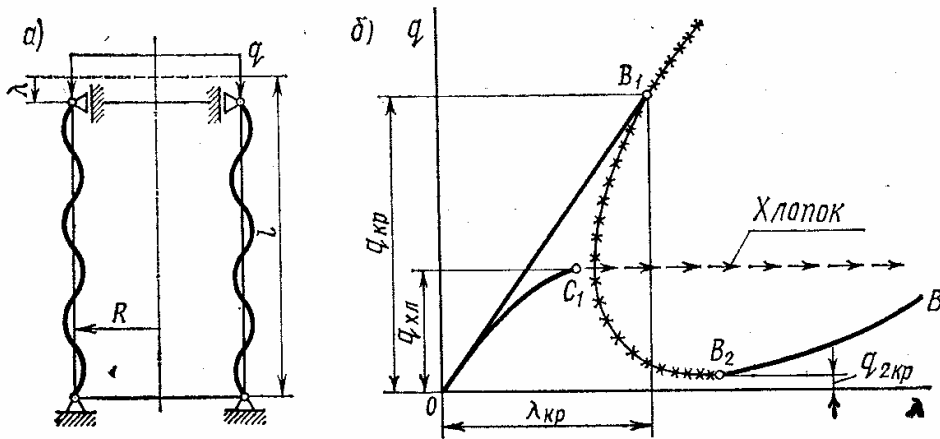


Рис. 8.14

точке C_1 , начальное деформированное состояние равновесия реальной оболочки перестает быть устойчивым и оболочка хлопком переходит в новое состояние, существенно удаленное от начального.

В теории устойчивости тонких оболочек выделяют два основных характерных значения нагрузки:

$F_{кр}$ — критическая нагрузка*, после достижения которой перестает быть устойчивой начальное напряженно-деформированное состояние идеально правильной оболочки;

$F_{хл}$ — нагрузка, при достижении которой происходит хлопок реальной оболочки с геометрическими несовершенствами.

Значение $F_{кр}$ критической нагрузки идеальных оболочек определяют с помощью линеаризованных уравнений; при осесимметричном нагружении оболочек вращения численное решение таких уравнений как без учета моментности начального состояния, так и с его учетом в настоящее время не представляет принципиальных трудностей.

* Эту нагрузку, соответствующую точке бифуркации B_1 , иногда называют верхней критической и обозначают $F_{кр1}$ в отличие от соответствующей точке B_2 нижней критической нагрузки $F_{2кр}$, при превышении которой становятся возможными новые, отличные от начального, состояния равновесия идеально правильной оболочки (см. рис. 8.13, б и 8.14, б). Для расчета силовых конструкций величина $F_{2кр}$ не представляет практического интереса и нами не рассматривается.

Величину $F_{хл}$ реальной оболочки можно представить в виде $F_{хл} = k_{хл} F_{нр}$. Для тонких гладких оболочек значение коэффициента $k_{хл}$ чрезвычайно чувствительно к изменениям размеров и форм начальных неправильностей, что приводит к принципиальным трудностям при его определении. Так, для теоретического определения $k_{хл}$ данной реальной оболочки необходимо с большой точностью и достоверностью знать ее начальные неправильности, что практически крайне трудно. Экспериментально для каждой конкретной оболочки, конечно, можно найти значение $k_{хл}$, но от оболочки к оболочке даже в пределах одной серии экспериментов значение $k_{хл}$ может заметно меняться.

К счастью, значения коэффициента $k_{хл}$ не всегда столь чувствительны к таким случайным и трудноконтролируемым факторам, как начальные геометрические неправильности. Например, в рациональных оболочечных конструкциях, создаваемых с использованием каркасированных оболочек, трехслойных, подкрепленных гофром или вафельных оболочек, значение $k_{хл}$ оказывается достаточно стабильным.

Глава 9

ОСНОВЫ РАСЧЕТА ОБОЛОЧЕК ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ

Уравнения, описывающие деформированное состояние оболочек вращения, интегрируются аналитически только в некоторых частных случаях. Получить решение для оболочек более общего вида до недавнего времени было очень сложно. Приходилось прибегать к упрощениям, которые значительно сужали область применимости полученных результатов.

Современные вычислительные машины и разработанные численные процедуры позволили иначе подойти к этой проблеме. Сейчас многие задачи расчета оболочек могут быть решены численно. Существует несколько методов решения таких задач. Некоторые из них, такие, как метод начальных параметров, метод конечных разностей и метод конечных элементов, были рассмотрены выше в гл. 3. Здесь эти методы применяются к расчету оболочек.

§ 9.1. Расчет оболочек матричным методом начальных параметров

Применение этого метода при расчете оболочек вращения требует формулировки краевой задачи на основе дифференциальных уравнений первого порядка. Ниже рассмотрен одномерный случай, когда оболочка нагружена осесимметричными поверхностными p_n , p_θ и контурными T_{11} , Q_{11} , M_{11} и T_{12} , Q_{12} , M_{12} силами (рис. 9.1). Система уравнений моментной теории оболочек вращения приведена в гл. 5. Для осесимметричного случая она содержит шесть дифференциальных

и шесть алгебраических уравнений. Перепишем их так, чтобы вначале были представлены дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned}
 \frac{du}{ds} + \frac{w}{R_1} - \varepsilon_1 &= 0; \\
 \frac{dw}{ds} - \frac{u}{R_1} - \vartheta_1 &= 0; \\
 \frac{d\vartheta_1}{ds} - \kappa_1 &= 0; \\
 \frac{dT_1}{ds} + T_1 \frac{\cos \theta}{r} - T_2 \frac{\cos \theta}{r} - \frac{Q_1}{R_1} &= -p_\theta; \\
 \frac{dQ_1}{ds} + Q_1 \frac{\cos \theta}{r} + T_1 \frac{1}{R_1} + T_2 \frac{\sin \theta}{r} &= p_n; \\
 \frac{dM_1}{ds} + M_1 \frac{\cos \theta}{r} - M_2 \frac{\cos \theta}{r} - Q_1 &= 0.
 \end{aligned} \tag{9.1}$$

Они должны быть дополнены алгебраическими уравнениями, которые имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_2 - u \frac{\cos \theta}{r} - w \frac{\sin \theta}{r} &= 0; \\
 \kappa_2 - \vartheta_1 \frac{\cos \theta}{r} &= 0; \\
 M_1 - D(\kappa_1 + \mu \kappa_2) &= 0; \\
 M_2 - D(\kappa_2 + \mu \kappa_1) &= 0; \\
 T_1 - \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2) &= 0; \\
 T_2 - \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1) &= 0.
 \end{aligned} \tag{9.2}$$

Система уравнений (9.1), (9.2) — полная, в ней двенадцать искомых функций $u, w, \vartheta_1, T_1, Q_1, M_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \kappa_1, \kappa_2, T_2, M_2$. Будем считать первые шесть функций: те, которые под знаком дифференциала в системе (9.1) основными неизвестными системы уравнений; остальные — дополнительными, поскольку они связаны только алгебраическими уравнениями. Запишем систему (9.1), (9.2) в матрично-векторной форме. Введем векторы основных и дополнительных неизвестных $\{z_1\}$ и $\{z_2\}$ и вектор внешних нагрузок $\{p\}$

$$\{z_1\} = \{u, w, \vartheta_1, T_1, Q_1, M_1\}^T; \tag{9.3}$$

$$\{z_2\} = \{\varepsilon_2, \kappa_2, \kappa_1, M_2, \varepsilon_1, T_2\}^T; \tag{9.4}$$

$$\{p\} = \{0, 0, 0, -p_\theta, p_n, 0\}^T. \tag{9.5}$$

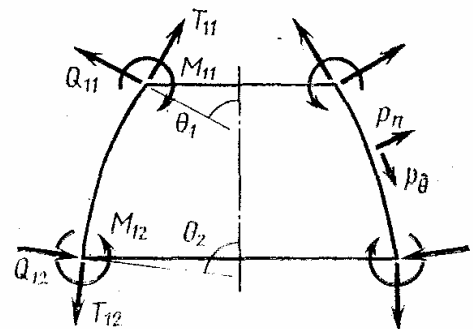


Рис. 9.1

Система дифференциальных уравнений (9.1) тогда может быть представлена в форме

$$\frac{d}{ds} \{z_1\} + [a_1] \{z_1\} + [b_1] \{z_2\} = \{p\}. \quad (9.6)$$

Здесь матрицы $[a_1]$ и $[b_1]$ имеют вид

$$[a_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1/R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/R_1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta/r & -\frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R_1 & \cos \theta/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \cos \theta/r \end{bmatrix};$$

$$[b_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos \theta/r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \theta/r \\ 0 & 0 & 0 & -\cos \theta/r & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матричная форма алгебраических уравнений (9.2) такая:

$$[a_2] \{z_1\} + [b_2] \{z_2\} = 0. \quad (9.7)$$

Соответствующие матрицы $[a_2]$ и $[b_2]$ таковы:

$$[a_2] = \begin{bmatrix} -\cos \theta/r & -\sin \theta/r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos \theta/r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$[b_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu D & -D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -D & -\mu D & 1 & 0 & 0 \\ -\mu \frac{Eh}{1-\mu^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{Eh}{1-\mu^2} & 0 \\ -\frac{Eh}{1-\mu^2} & 0 & 0 & 0 & -\mu \frac{Eh}{1-\mu^2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Исключая вектор $\{z_2\}$ из соотношений (9.6) и (9.7), приводим систему к одному матричному уравнению

$$\frac{d}{ds} \{z_1\} + [A_1] \{z_1\} = \{p\}, \quad (9.8)$$

где

$$[A_1] = [a_1] - [b_1] \cdot [b_2]^{-1} [a_2]. \quad (9.9)$$

Таким образом, деформация оболочки вращения описывается матричным уравнением (9.8). Остановимся на приведении уравнения к безразмерному виду. При численном решении безразмерная форма уравнений позволяет выделить основные параметры системы, провести более общий анализ решения и получить результаты, которые могут быть использованы для широкой области изменения значений нагрузок, жесткости, геометрии системы и др. Введем характерный геометрический параметр оболочки R_0 . Это может быть радиус какого-либо сечения оболочки, ее длина или какой-нибудь другой характерный размер. Отнесем к нему радиус поперечного сечения, меридиональный радиус кривизны и длину дуги оболочки: $\rho = r/R_0$; $R = R_1/R_0$; $x = s/R_0$.

Искомый вектор состояния, соответствующий вектору (9.3), обозначим $\{y\}$:

$$\{y\} = \{\bar{u} \bar{\omega} \bar{\nu}_1 \bar{T}_1 \bar{Q} \bar{M}\}^T. \quad (9.10)$$

Безразмерные составляющие (обозначенные черточками) этого вектора для оболочки постоянной толщины выражаются через перемещение и силы: $\bar{u} = u/R_0$; $\bar{\omega} = \omega/R_0$; $\bar{T}_1 = T_1/(Eh)$; $\bar{Q} = Q_1/(Eh)$, $\bar{M} = M_1/(EhR_0)$. Разрешающее уравнение, соответствующее уравнению (9.8), теперь будет иметь вид

$$\frac{d}{dx} \{y\} + [A] \{y\} = \{p\}. \quad (9.11)$$

Матрица $[A]$ имеет безразмерные составляющие:

$$[A] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & \alpha_{14} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 & 0 & \alpha_{36} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & 0 & \alpha_{44} & \alpha_{45} & 0 \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & 0 & \alpha_{54} & \alpha_{55} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{63} & 0 & 0 & \alpha_{66} \end{bmatrix}, \quad (9.12)$$

где $\alpha_{11} = \mu \cos \theta/\rho$; $\alpha_{12} = 1/R + \mu \sin \theta/\rho$; $\alpha_{14} = -(1 - \mu^2)$; $\alpha_{21} = -1/R$; $\alpha_{23} = -1$; $\alpha_{33} = \mu \cos \theta/\rho$; $\alpha_{36} = -1/k$; $\alpha_{41} = -\cos^2 \theta/\rho^2$; $\alpha_{42} = -\sin \theta \cos \theta/\rho^2$; $\alpha_{44} = (1 - \mu) \cos \theta/\rho$; $\alpha_{45} = -1/R$; $\alpha_{51} = \sin \theta \cos \theta/\rho^2$; $\alpha_{52} = \sin^2 \theta/\rho^2$; $\alpha_{54} = \mu \sin \theta/\rho + 1/R$; $\alpha_{55} = \cos \theta/\rho$; $\alpha_{63} = -(1 - \mu^2) k \cos^2 \theta/\rho^2$; $\alpha_{66} = (1 - \mu) \cos \theta/\rho$.

Вектор правой части уравнения (9.11)

$$\{p\} = \left\{ 0 \ 0 \ 0 \ -\frac{p_\theta R_0}{Eh} \ \frac{p_n R_0}{Eh} \ 0 \right\}^T.$$

Параметр k , определяющий отношение толщины оболочки к радиусу R_0 , равен

$$k = \frac{D}{EhR_0^2} = \frac{h^2}{12(1 - \mu^2)R_0^2}. \quad (9.13)$$

От его значения существенно зависит точность решения задачи. Так как рассматриваются тонкие оболочки, величина k — мала. В матрицу $[A]$, как видно из выражения (9.12), входят величины k (малая величина) и $1/k$ (большая величина). Такие системы уравнений при большой длине интервала интегрирования требуют применения особых приемов при проведении расчетов.

Уравнение (9.11) при решении задачи должно быть дополнено граничными условиями. На каждом граничном контуре для осесимметричного случая моментной оболочки необходимо, чтобы были удовлетворены три граничных условия. Иначе говоря, по три компонента вектора известны в конце и в начале интервала интегрирования или заданы их линейные комбинации. Общее решение уравнения (9.11), как и в § 3.2, представим в виде

$$\{y\} = C_1 \{y_1\} + C_2 \{y_2\} + C_3 \{y_3\} + \{z\}. \quad (9.14)$$

Константы $C_1 \dots C_3$ определяют следующим образом. Вначале трехкратным интегрированием однородной части системы (9.11) при значениях векторов $\{y_1\}_0 \dots \{y_3\}_0$, удовлетворяющих граничным условиям в начале интервала интегрирования, находят векторы $\{y_1\}_1$, $\{y_2\}_1$, $\{y_3\}_1$. Вектор $\{z\}_0$ частного решения может быть задан нулевым. Еще одно интегрирование на этот раз неоднородного уравнения (9.11) дает значение вектора $\{z\}_1$.

После определения векторов в конце интервала интегрирования константы $C_1 \dots C_3$ находят из граничных условий. Нужно отметить, что полученные значения векторов $\{y_1\}$, $\{y_2\}$, $\{y_3\}$, $\{z\}$ могут быть ис-

пользованы для самых разных граничных условий в конце интервала. Так что если приходится решать ряд задач с одинаковыми граничными условиями на одном конце и разными на другом, выгодно начинать интегрирование системы уравнений с того края, где граничные условия одинаковы. После определения констант $C_1 \dots C_3$ значение вектора $\{y\}_0$ в начале интервала известно [уравнение (9.14)]. При этом начальном значении необходимо провести еще одно интегрирование уравнения (9.11). Здесь уже нужно записывать значения составляющих вектора $\{y\}$ в промежуточных точках интервала, так как они по существу являются искомыми значениями функций сил и перемещений. Обратим внимание на то, что не все усилия и перемещения находят интегрированием уравнений. С помощью уравнения (9.7), если привести его составляющие к безразмерной форме, можно найти остальные силы и перемещения.

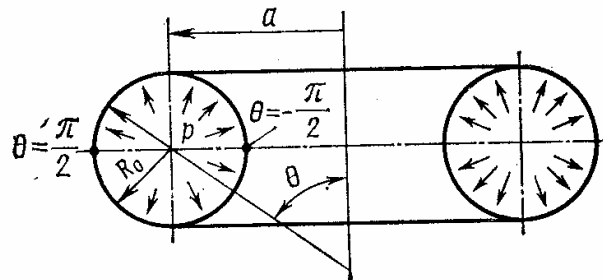


Рис. 9.2

Как уже отмечалось, задачи расчета оболочек имеют особенность. Они описываются уравнениями, имеющими сильно отличающиеся по значению коэффициенты. Это приводит к тому, что при интегрировании уравнения (9.11) при разных значениях векторов $\{y_1\}_0$, $\{y_2\}_0$ и т. д. могут получиться мало отличающиеся друг от друга векторы $\{y_1\}$, $\{y_2\}$ и т. д. При этом получаются очень неточные значения констант $C_1 \dots C_3$ и, по существу, неверное решение. Это особенно заметно при расчете оболочек большой длины. Для того чтобы добиться результата, удовлетворяющего необходимой точности, применяют прием деления оболочки на несколько сегментов. Особенности его изложены в § 3.2. Для оболочек вращения минимальная длина сегмента может быть выбрана на основе теории краевого эффекта. Длина l каждого участка приближенно определяется формулой

$$\frac{l}{R_2} = \beta \sqrt{\frac{h}{R_2}}, \quad (9.15)$$

где R_2 и h — соответственно окружной радиус кривизны и толщина оболочки на рассматриваемом участке; коэффициент β может быть принят равным трем (см. § 6.1).

Рассмотрим пример расчета торообразной оболочки, нагруженной равномерным давлением p (рис. 9.2). Известно, что поле перемещений для этой задачи, определенное по линейной безмоментной теории оболочек, характеризуется разрывом в зонах, близких к линиям нулевой кривизны. Применение моментной теории позволяет избежать этого. Однако общее аналитическое решение задачи получить затруднительно. При проведении численного расчета положим, что характерному геометрическому параметру R_0 соответствует радиус сечения тора. Размер r определяется соотношением $r = a + R_0 \sin \theta$. Безраз-

мерный радиус $\rho = a/R_0 + \sin \theta$. Касательная составляющая нагрузки равна нулю, а нормальная $p_n = p$. В связи с тем, что $x = s/R_0 = \theta$, переменная в уравнении (9.11) соответствует угловой координате θ :

$$\frac{d}{d\theta} \{y\} + [A] \{y\} = \{p\}.$$

Составляющие матрицы $[A]$ зависят от коэффициента Пуассона μ , параметров оболочки k , a/R_0 и угловой координаты θ . Вектор правой части имеет вид

$$\{p\} = \left\{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{qR_0}{Eh} \ 0 \right\}^T.$$

Благодаря симметрии оболочки относительно экваториального сечения интегрирование можно вести не по всему контуру, а только от $\theta = -\pi/2$ до $\theta = \pi/2$. Для задачи при $\theta = -\pi/2$ граничные условия: $u = 0$; $\vartheta = 0$; $Q_1 = 0$; при $\theta = \pi/2$ граничные условия: $u = 0$; $\vartheta = 0$; $Q_1 = 0$.

Решение представляется в виде

$$\{y\} = C_1 \{y_1\} + C_2 \{y_2\} + C_3 \{y_3\} + \{z\}.$$

При интегрировании уравнения (9.11) начальные значения векторов (в соответствии с граничным условием при $\theta = -\pi/2$) принимаются следующими:

$$\{y_1\}_0 = \{0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T, \quad \{y_2\}_0 = \{0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0\}^T, \quad \{y_3\}_0 = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1\}^T, \\ \{z\}_0 = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T.$$

После определения констант $C_1 \dots C_3$ и нахождения истинных начальных параметров еще одно интегрирование позволяет построить поле

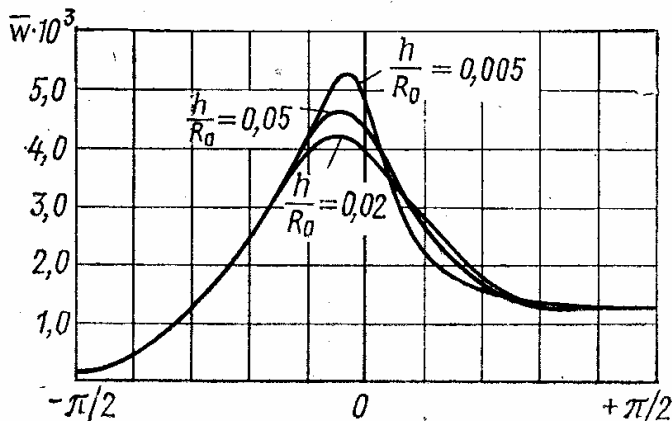


Рис. 9.3

перемещений и усилий в оболочке. На рис. 9.3 приведены кривые нормального перемещения \bar{w} для оболочки, геометрические параметры которой следующие:

$$a/R_0 = 1,5; \quad (h/R_0)_1 = 0,05; \\ (h/R_0)_2 = 0,02; \\ (h/R_0)_3 = 0,005.$$

Расчеты велись для безразмерного давления $pR_0/(Eh) = 0,002$ и коэффициента $\mu = 0,3$. На всем участке от $\theta = -\pi/2$ до $\theta = \pi/2$ кривая нормального перемещения плавная, без разрывов. В зоне, близкой к экваториальному сечению, вдали от точки $\theta = 0$ нормальное перемещение \bar{w} мало зависит от относительной толщины оболочки и приближенно может быть определено по линейной безмоментной теории. При этом для точки $\theta = \pi/2$ ме-

радиальная и окружная силы и безразмерное радиальное перемещение равны:

$$T_1 = \frac{\rho R_0}{2} \frac{2a+R}{a+R}; \quad T_2 = \frac{\rho R_0}{2};$$

$$\bar{w} = \frac{\rho R_0}{2Eh} \left[\frac{a}{R_0} (1-2\mu) + (1-\mu) \right].$$

При $\mu = 0,3$ и $\rho R_0/(Eh) = 0,002$ $\bar{w} = 1,3 \cdot 10^{-3}$. Как видно, отличие от численного расчета незначительно.

Рассмотренная процедура расчета оболочки вращения при осесимметричном нагружении является наиболее простой. Она может быть применена к более общим случаям нагружения, например к оболочкам при несимметричном нагружении или неравномерном нагреве. С помощью такого подхода могут быть решены задачи расчета анизотропных оболочек, а также оболочек, имеющих переменную толщину и дискретные кольцевые подкрепления. Общая схема расчета при этом остается той же.

§ 9.2. Расчет методом конечных разностей

Метод используется при решении широкого круга задач теории оболочек. Ниже на примере решения уравнения моментной цилиндрической оболочки при неосесимметричной деформации рассматриваются особенности и последовательность определения в ней усилий и перемещений.

Для однородных изотропных оболочек вращения уравнения моментной теории приведены в § 5.4. Для цилиндрической оболочки уравнения равновесия принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial s} + \frac{\partial S}{R \partial \varphi} &= -p_\theta; \\ \frac{\partial T_2}{R \partial \varphi} + \frac{\partial S}{\partial s} - \frac{Q_2}{R} &= -p_\varphi; \\ \frac{T_2}{R} + \frac{\partial Q_1}{\partial s} + \frac{\partial Q_2}{R \partial \varphi} &= p_n; \\ \frac{\partial M_1}{\partial s} + \frac{\partial M_{12}}{R \partial \varphi} - Q_1 &= 0; \\ \frac{\partial M_2}{R \partial \varphi} + \frac{\partial M_{12}}{\partial s} - Q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Деформации, углы поворота, перемещения и изменения кривизны связаны между собой соотношениями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial s}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{R \partial \varphi} + \frac{w}{R}; \quad \gamma = \frac{\partial u}{R \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial s}; \\ \vartheta_1 &= \frac{\partial w}{\partial s}; \quad \vartheta_2 = \frac{\partial w}{R \partial \varphi} - \frac{v}{R}; \\ \kappa_1 &= \frac{\partial \vartheta_1}{\partial s}; \quad \kappa_2 = \frac{\partial \vartheta_2}{R \partial \varphi}; \quad \kappa_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vartheta_1}{R \partial \varphi} + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial s} \right). \end{aligned} \quad (9.17)$$

Силы и моменты для изотропной однородной оболочки выражаются через деформации и изменения кривизн следующим образом:

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2); \quad T_2 = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1); \quad S = \frac{Eh}{2(1+\mu)} \gamma;$$

$$M_1 = D(\kappa_1 + \mu\kappa_2); \quad M_2 = D(\kappa_2 + \mu\kappa_1); \quad M_{12} = D(1-\mu)\kappa_{12}. \quad (9.18)$$

Система уравнений (9.16) ... (9.18) — полная. При девятнадцати уравнениях она содержит девятнадцать искомых функций: T_1 ; T_2 ; S ; Q_1 ; Q_2 ; M_1 ; M_2 ; M_{12} ; ε_1 ; ε_2 ; γ ; ϑ_1 ; ϑ_2 ; κ_1 ; κ_2 ; κ_{12} ; u ; v ; w . Приведем уравнения к безразмерному виду. Отнесем координату s вдоль меридиана к радиусу оболочки: $x = s/R$. Безразмерные силы, перемещения и изменения кривизн будут:

$$\bar{T}_1 = T_1/(Eh); \quad \bar{T}_2 = T_2/(Eh); \quad \bar{S} = S/(Eh); \quad \bar{Q}_1 = Q_1/(Eh);$$

$$\bar{Q}_2 = Q_2/(Eh);$$

$$\bar{M}_1 = M_1/(EhR); \quad \bar{M}_2 = M_2/(EhR); \quad \bar{M}_{12} = M_{12}/(EhR);$$

$$\bar{u} = u/R; \quad \bar{v} = v/R; \quad \bar{w} = w/R; \quad (9.19)$$

$$\bar{\kappa}_1 = \kappa_1 R; \quad \bar{\kappa}_2 = \kappa_2 R; \quad \bar{\kappa}_{12} = \kappa_{12} R;$$

$$k = D(1-\mu^2)/(EhR^2).$$

Первый этап решения задачи состоит в приведении уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Искомые силы, деформации и перемещения представляют в виде суммы произведений двух функций, одна из которых соответствует членам рядов Фурье по окружной координате, другая — функция координаты x :

$$\bar{T}_1 = \sum_{m=0} T_{1m} \cos m\varphi; \quad \bar{T}_2 = \sum_{m=0} T_{2m} \cos m\varphi; \quad \bar{S} = \sum_{m=1} S_m \sin m\varphi;$$

$$\bar{M}_1 = \sum_{m=0} M_{1m} \cos m\varphi; \quad \bar{M}_2 = \sum_{m=0} M_{2m} \cos m\varphi; \quad \bar{M}_{12} = \sum_{m=1} H_m \sin m\varphi;$$

$$\bar{Q}_1 = \sum_{m=0} Q_{1m} \cos m\varphi; \quad \bar{Q}_2 = \sum_{m=1} Q_{2m} \sin m\varphi;$$

$$u = \sum_{m=0} u_m \cos m\varphi; \quad \bar{v} = \sum_{m=1} v_m \sin m\varphi; \quad \bar{w} = \sum_{m=0} w_m \cos m\varphi; \quad (9.20)$$

$$\varepsilon_1 = \sum_{m=0} \varepsilon_{1m} \cos m\varphi; \quad \varepsilon_2 = \sum_{m=0} \varepsilon_{2m} \cos m\varphi; \quad \gamma = \sum_{m=1} \gamma_m \sin m\varphi;$$

$$\bar{\kappa}_1 = \sum_{m=0} \kappa_{1m} \cos m\varphi; \quad \bar{\kappa}_2 = \sum_{m=0} \kappa_{2m} \cos m\varphi; \quad \bar{\kappa}_{12} = \sum_{m=1} \kappa_m \sin m\varphi;$$

$$\vartheta_1 = \sum_{m=0} \vartheta_{1m} \cos m\varphi; \quad \vartheta_2 = \sum_{m=1} \vartheta_{2m} \sin m\varphi.$$

Под знаками суммы здесь стоят безразмерные значения сил, перемещений, деформаций, которые соответствуют определенной m -й гармонике и являются функцией только одной переменной x .

Нужно отметить, что разложения (9.20) не являются полными. Здесь опущены кососимметричные составляющие сил, перемещений и деформаций для величин $\bar{T}_1; \bar{T}_2; \bar{M}_1; \bar{M}_2; \bar{Q}_1; \bar{u}; \bar{w}; \varepsilon_1; \varepsilon_2; \bar{\kappa}_1; \bar{\kappa}_2; \vartheta_1$ и симметричные составляющие для величин $\bar{S}; \bar{M}_{12}; \bar{Q}_2; \bar{v}; \gamma; \bar{\kappa}_{12}; \vartheta_2$. В большинстве случаев при решении задач это допустимо, так как соответствующим выбором начала отсчета по φ и разделением системы на симметричную и кососимметричную появляется возможность дополнительные слагаемые не учитывать.

Дополним зависимости (9.20) разложениями в ряды Фурье составляющих поверхностной нагрузки:

$$p_\theta = \sum_{m=0} p_{1m} \cos m\varphi; \quad p_\varphi = \sum_{m=1} p_{2m} \sin m\varphi; \quad p_n = \sum_{m=0} p_{3m} \cos m\varphi.$$

Используя эти зависимости, а также зависимости (9.19), (9.20), приводим систему (9.16) уравнений равновесия к виду

$$\begin{aligned} \frac{dT_{1m}}{dx} + mS_m &= -\frac{p_{1m}R}{Eh}; \\ -mT_{2m} + \frac{dS_m}{dx} - Q_{2m} &= -\frac{p_{2m}R}{Eh}; \\ T_{2m} + \frac{dQ_{1m}}{dx} + mQ_{2m} &= \frac{p_{3m}R}{Eh}; \\ \frac{dM_{1m}}{dx} + mH_m - Q_{1m} &= 0; \\ -mM_{2m} + \frac{dH_m}{dx} - Q_{2m} &= 0. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Соотношения (9.17) представляют следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1m} &= \frac{du_m}{dx}; \quad \varepsilon_{2m} = mv_m + w_m; \quad \gamma_m = -mu_m + \frac{dv_m}{dx}; \\ \vartheta_{1m} &= \frac{dw_m}{dx}; \quad \vartheta_{2m} = -mw_m - v_m; \\ \kappa_{1m} &= \frac{d\vartheta_{1m}}{dx}; \quad \kappa_{2m} = m\vartheta_{2m}; \quad \kappa_m = -\frac{1}{2} \left(m\vartheta_{1m} - \frac{d\vartheta_{2m}}{dx} \right). \end{aligned} \quad (9.22)$$

Безразмерные составляющие сил и моментов для каждого значения m выражаются через деформации и изменения кривизн:

$$\begin{aligned} (1 - \mu^2) T_{1m} &= \varepsilon_{1m} + \mu\varepsilon_{2m}; \quad (1 - \mu^2) T_{2m} = \varepsilon_{2m} + \mu\varepsilon_{1m}; \\ 2(1 + \mu) S_m &= \gamma_m; \\ M_{1m} &= k(\kappa_{1m} + \mu\kappa_{2m}); \quad M_{2m} = k(\kappa_{2m} + \mu\kappa_{1m}); \\ H_m &= (1 - \mu) k\kappa_m. \end{aligned} \quad (9.23)$$

Полученная система уравнений может быть решена различными методами. Целесообразна процедура, изложенная в предыдущем параграфе: интегрирование системы уравнений первого порядка.

Рассмотрим другую возможность решения. Приведем данную систему к системе уравнений второго порядка. Для двухточечной краевой задачи и решения уравнений в разностной форме это наиболее удобно. Выразим выражения сил и моментов в уравнениях (9.21) через деформации по формулам (9.23). Будем использовать все соотношения, кроме выражения

$$M_{1m} = k (\kappa_{1m} + \mu \kappa_{2m}). \quad (9.24)$$

В уравнениях (9.21) исключим величины Q_{1m} и Q_{2m} — моменты M_{1m} остаются в виде одной из основных искомых функций. Представляя далее деформации и изменения кривизны в этих уравнениях и в уравнении (9.24) через перемещения по формулам (9.22), получаем систему из четырех обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Каждое уравнение имеет второй порядок:

$$\begin{aligned} a_1 \frac{d^2 u_m}{dx^2} + a_2 u_m + a_3 \frac{dv_m}{dx} + a_4 \frac{d\omega_m}{dx} &= -\frac{p_{1m} R}{Eh} (1 - \mu^2); \\ a_5 \frac{du_m}{dx} + a_6 \frac{d^2 v_m}{dx^2} + a_7 v_m + a_8 \frac{d^2 \omega_m}{dx^2} + a_9 \omega_m &= -\frac{p_{2m} R}{Eh} (1 - \mu^2); \\ a_{10} \frac{du_m}{dx} + a_{11} \frac{d^2 v_m}{dx^2} + a_{12} v_m + a_{13} \frac{d^2 \omega_m}{dx^2} + a_{14} \omega_m + a_{15} \frac{d^2 M_{1m}}{dx^2} &= \\ &= \frac{p_{3m} R}{Eh} (1 - \mu^2); \\ a_{16} v_m + a_{17} \frac{d^2 \omega_m}{dx^2} + a_{18} \omega_m + a_{19} M_{1m} &= 0. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Введем вектор искомых функций, состоящий из трех компонентов u_m, v_m, ω_m перемещений и момента M_{1m} :

$$\{y\} = \{u_m \ v_m \ \omega_m \ M_{1m}\}^T. \quad (9.26)$$

Уравнения (9.25) могут быть представлены в виде

$$[A] \frac{d^2}{dx^2} \{y\} + [B] \frac{d}{dx} \{y\} + [C] \{y\} = \{D\}, \quad (9.27)$$

где

$$\begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_6 & a_8 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{13} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{17} & 0 \end{bmatrix}; \quad [B] = \begin{bmatrix} 0 & a_3 & a_4 & 0 \\ a_5 & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ [C] &= \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_7 & a_9 & 0 \\ 0 & a_{12} & a_{14} & 0 \\ 0 & a_{16} & a_{18} & a_{19} \end{bmatrix}; \quad \{D\} = (1 - \mu^2) \frac{R}{Eh} \begin{pmatrix} -p_{1m} \\ -p_{2m} \\ p_{3m} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9.28)$$

Составляющие этих матриц подсчитывают, как показано выше. Они зависят от относительной толщины оболочки $k = h^2/(12R^2)$, коэффициента Пуассона μ и номера гармоники m .

Чтобы решить задачу, кроме уравнения (9.23) необходимо знать граничные условия на каждом из граничных контуров. Здесь могут быть заданы силы, перемещения или условия упругого закрепления контура. Общее число граничных условий на контуре равно четырем. Например, для заделанного края $u_m = v_m = w_m = \frac{dw_m}{dx} = 0$, для шарнирно опертого края $u_m = v_m = w_m = M_{1m} = 0$. Таким образом, известны некоторые из компонентов вектора $\{y\}$ или его производной $d\{y\}/dx$. В общем виде матричная форма граничных условий при $x = 0$ и $x = x_n$ может быть представлена следующим образом:

$$\begin{aligned} [E]_0 \frac{d}{dx} \{y\}_0 + [F]_0 \{y\}_0 &= \{G\}_0; \\ [E]_n \frac{d}{dx} \{y\}_n + [F]_n \{y\}_n &= \{G\}_n. \end{aligned} \quad (9.29)$$

Матрицы $[E]$ и $[F]$ имеют размер 4×4 и обычно слабо заполнены. Для заделанного края

$$[E] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [F] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

при нулевом векторе $\{G\}$ правой части (9.29).

Итак, краевая задача для оболочки описывается уравнением (9.27) и граничными условиями (9.29). Рассмотрим последовательность решения уравнений методом конечных разностей. Разобьем область интегрирования от $x = 0$ до $x = x_n$ на ряд участков. Длину каждого участка обозначим Δ . Первую и вторую производные от векторов $\{y\}$ запишем в разностной форме:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \{y\} &= \frac{1}{\Delta^2} (\{y\}_{i-1} - 2\{y\}_i + \{y\}_{i+1}); \\ \frac{d}{dx} \{y\} &= -\frac{1}{2\Delta} (\{y\}_{i-1} - \{y\}_{i+1}). \end{aligned}$$

Первую производную при аппроксимации граничных условий представим с точностью $O(\Delta^2)$ в соответствии с формулами (9.25) через правые разности для начала интервала:

$$\frac{d}{dx} \{y\}_0 = -\frac{3}{2\Delta} \{y\}_0 + \frac{2}{\Delta} \{y\}_1 - \frac{1}{2\Delta} \{y\}_2,$$

а для конца интервала через левые разности:

$$\frac{d}{dx} \{y\}_n = \frac{3}{2\Delta} \{y\}_n - \frac{2}{\Delta} \{y\}_{n-1} + \frac{1}{2\Delta} \{y\}_{n-2}.$$

Учитывая эти соотношения, граничные условия и уравнения оболочки могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} [H]_0 \{y\}_0 + \frac{2}{\Delta} [E]_0 \{y\}_1 - \frac{1}{2\Delta} [E]_0 \{y\}_2 &= \{G\}_0; \\ [L]_i \{y\}_{i+1} + [M]_i \{y\}_i + [N]_i \{y\}_{i-1} &= \{D\}_i; \\ \frac{1}{2\Delta} [E]_n \{y\}_{n-2} - \frac{2}{\Delta} [E]_n \{y\}_{n-1} + [H]_n \{y\}_n &= \{G\}_n. \end{aligned} \quad (9.30)$$

Первая строка здесь относится к левой границе ($i = 0$), третья — к правой ($i = n$). Значения i во втором уравнении принимаются $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$. Отсюда общее число уравнений равно $(n + 1)$ и соответствует числу искомым векторов $\{y\}$. Матрицы в выражениях (9.30) определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} [H]_0 &= -\frac{3}{2\Delta} [E]_0 + [F]_0; \\ [H]_n &= \frac{3}{2\Delta} [E]_n + [F]_n; \\ [L]_i &= \frac{1}{\Delta^2} [A]_i + \frac{1}{2\Delta} [B]_i; \\ [M]_i &= -\frac{2}{\Delta^2} [A]_i + [C]_i; \\ [N]_i &= \frac{1}{\Delta^2} [A]_i - \frac{1}{2\Delta} [B]_i. \end{aligned}$$

Для решения системы уравнений (9.30) воспользуемся *процедурой матричной прогонки*. Положим, что векторы $\{y\}$ в соседних точках связаны линейным соотношением

$$\{y\}_i = [\alpha]_i + [\beta]_i \{y\}_{i+1}, \quad (9.31)$$

где $[\alpha]_i$ и $[\beta]_i$ — матрицы прогонки. Построим рекуррентные формулы, связывающие эти матрицы в соседних точках. Для этого запишем формулу, аналогичную последней, но для предыдущей точки $i - 1$:

$$\{y\}_{i-1} = [\alpha]_{i-1} + [\beta]_{i-1} \{y\}_i.$$

Подставляя ее во второе соотношение (9.30) и учитывая соотношение (9.31), получаем связь между матрицами прогонки в соседних точках:

$$[\alpha]_i = ([M]_i + [N]_i [\beta]_{i-1})^{-1} ([D]_i - [N]_i [\alpha]_{i-1}); \quad (9.32)$$

$$[\beta]_i = - ([M]_i + [N]_i [\beta]_{i-1})^{-1} [L]_i.$$

Для первого этапа расчета — определения всех матриц прогонки — нужно знать их значения в начале интервала. Их можно найти с помощью первого и второго уравнений (9.30) для $i = 1$ и выражения (9.31)

для этого же значения i . После выполнения операций с матрицами получаем

$$\begin{aligned} [\alpha]_1 &= -\left([M]_1 + \frac{2}{\Delta} [N]_1 [H]_0 [E]_0\right)^{-1} ([D]_1 - [N]_1 [H]_0^{-1} [G]_0); \\ [\beta]_1 &= \left([M]_1 + \frac{2}{\Delta} [N]_1 [H]_0 [E]_0\right)^{-1} \left([L]_1 + \frac{1}{2\Delta} [N]_1 [H]_0^{-1} [E]_0\right). \end{aligned} \quad (9.33)$$

Эти значения матриц могут быть определены при заданных параметрах оболочки и известных граничных условиях в начале интервала. Остальные матрицы для $i = 2, i = 3$ и т. д. находят по формуле (9.31). Прямой ход при прогонке ведется до значения $i = n - 2$. В конце интервала нужно воспользоваться граничным условием — третьим и вторым уравнениями (9.30) для $i = n - 1$ и выражением (9.31) для $i = n - 1$. Из этих соотношений находят вектор искомых функций для предпоследней точки $n - 1$:

$$\begin{aligned} \{y\}_{n-1} &= \left([N]_{n-1} [\beta]_{n-2} - \frac{1}{2\Delta} [L]_{n-1} [H]_{n-1}^{-1} [E]_n [\beta]_{n-2} + [M]_{n-1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\Delta} [L]_{n-1} [H]_{n-1}^{-1} [E]_n\right)^{-1} \left([D]_{n-1} - [N]_{n-1} [\alpha]_{n-2} - \right. \\ &\quad \left. - [L]_{n-1} [H]_{n-1}^{-1} [G]_n + \frac{1}{2\Delta} [L]_{n-1} [H]_{n-1}^{-1} [E]_n [\alpha]_{n-2}\right). \end{aligned} \quad (9.34)$$

Векторы в остальных точках определяют последовательно с помощью соотношения (9.31) и известных матриц прогонки при обратном ходе. При этом необходимо записывать не только значения искомого вектора $\{y\}_i$, но и его производные $\frac{d}{dx} \{y\}_i = \frac{1}{2\Delta} \{y\}_{i+1} - \frac{1}{2\Delta} \{y\}_{i-1}$. С помощью этих величин и соотношений теории оболочек находят все компоненты усилий и перемещений оболочки для определенного числа m .

На рис. 9.4 приведены результаты расчета цилиндрической оболочки, нагруженной на двух торцах крайевыми моментами $M_0 = M_n = \bar{M} \cos m\varphi$ для $m = 0$ (а) и $m = 5$ (б) при нулевых перемещениях $u_0 = u_n = 0$; $w_0 = w_n = 0$. Вычисления проводились для $h/R = 1/50$, коэффициента Пуассона $\mu = 0,3$; $l/R = 1$.

Рассмотренная последовательность решения задачи для цилиндрической оболочки может быть распространена на оболочку вращения произвольной гео-

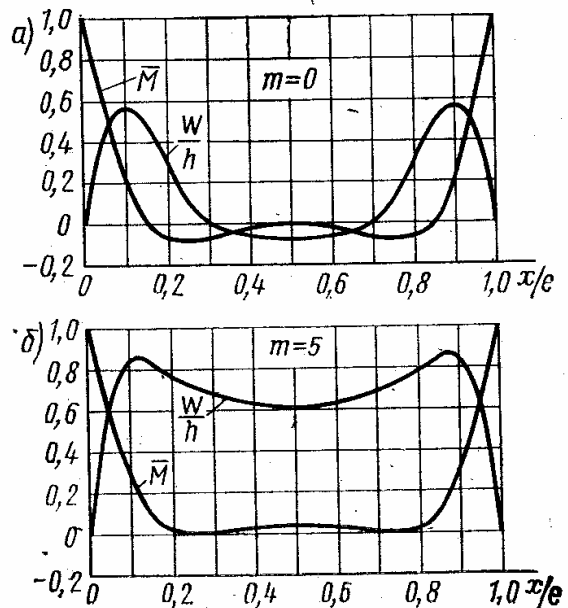


Рис. 9.4

метрии меридиана. В этом случае несколько сложнее подсчитать коэффициенты уравнений (9.25). Они не будут постоянными для всех точек интервала интегрирования. Но общий алгоритм расчета остается тем же.

§ 9.3. Расчет методом конечных элементов

Воспользуемся соотношениями МКЭ, приведенными в § 3.5. Условие равновесия для оболочки вращения примет вид

$$\iiint \{\delta \varepsilon_z\}^T \{\sigma_z\} r d\varphi ds dz = \iint \{\delta u\}^T \{p\} r d\varphi ds. \quad (9.35)$$

Индекс z у векторов деформаций и напряжений показывает, что они соответствуют слою оболочки, находящемуся на расстоянии z от срединной поверхности:

$$\{\varepsilon_z\} = \{\varepsilon_{1z} \varepsilon_{2z} \gamma_z\}^T; \quad \{\sigma_z\} = \{\sigma_{1z} \sigma_{2z} \tau_z\}^T.$$

Так как оболочка тонкая, все объемные силы приводятся к срединной поверхности и входят в общий вектор поверхностной нагрузки $\{p\} = \{p_\theta, p_\varphi, p_n\}^T$. Вектор перемещений $\{u\} = \{u, v, w\}^T$.

Согласно гипотезе прямых нормалей

$$\{\varepsilon_z\} = \{\varepsilon\} + z \{\kappa\}, \quad (9.36)$$

где векторы деформаций срединного слоя и изменения кривизн равны

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \gamma\}^T; \quad \{\kappa\} = \{\kappa_1 \kappa_2 \kappa_{12}\}^T.$$

Для слоя на расстоянии z от срединного вектора напряжений определяется соотношением

$$\{\sigma_z\} = [D] \{\varepsilon\} + z [D] \{\kappa\}. \quad (9.37)$$

Матрица $[D]$ упругих констант для изотропной оболочки определяется зависимостью (3.105). После подстановки формул (9.36) и (9.37) в выражение (9.35) и интегрирования по z левой части уравнения получим условие равновесия тонкой оболочки вращения, соответствующее принципу возможных перемещений, в виде:

$$h \iint \{\delta \varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} r d\varphi ds + \frac{h^3}{12} \iint \{\delta \kappa\}^T [D] \{\kappa\} r d\varphi ds = \iint \{\delta u\}^T \{p\} r d\varphi ds. \quad (9.38)$$

Представим векторы деформаций и изменения кривизн срединного слоя через перемещения. Воспользуемся соотношениями (5.10), (5.12), (5.13). Тогда

$$\{\varepsilon\} = [C_1] \{u\}, \quad (9.39)$$

где

$$[C_1] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} & 0 & \frac{d\theta}{ds} \\ \frac{\cos \theta}{r} & \frac{\partial}{r \partial \varphi} & \frac{\sin \theta}{r} \\ \frac{\partial}{r \partial \varphi} & \left(\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\cos \theta}{r} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

Формулы (5.55), (5.56), (5.57) связывают изменения кривизны с углами поворота ϑ_1 и ϑ_2 , составляющими вектор $\{\vartheta\}$:

$$\{\kappa\} = [C_2] \{\vartheta\}, \quad (9.40)$$

где

$$[C_2] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} & 0 \\ \frac{\cos \theta}{r} & \frac{\partial}{r \partial \varphi} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{r \partial \varphi} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\cos \theta}{r} \right) \end{bmatrix}$$

В свою очередь, углы поворота выражаются через перемещения в соответствии с уравнениями (5.14), (5.15), откуда

$$\{\vartheta\} = [C_3] \{u\}, \quad (9.41)$$

где

$$[C_3] = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \theta}{\partial s} & 0 & \frac{\partial}{\partial s} \\ 0 & -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\partial}{r \partial \varphi} \end{bmatrix}$$

Подставив выражение (9.41) в формулу (9.40), получим

$$\{\kappa\} = [C_4] \{u\}, \quad (9.42)$$

где матрица $[C_4] = [C_2][C_3]$ имеет размер 3×3 .

В дальнейшем при решении задачи методом конечных элементов необходимо задаться полем перемещений в элементе и выразить перемещения в любой точке через вектор узловых перемещений. Положим, что матрица $[\Phi]$ определяет это соотношение:

$$\{a\} = [\Phi] \{u_n\}. \quad (9.43)$$

Тогда, имея в виду выражения (9.39) и (9.42), можно получить следующие соотношения:

$$\{\varepsilon\} = [B_1] \{u_n\}; \quad \{\kappa\} = [B_2] \{u_n\}. \quad (9.44)$$

Подставим их в уравнение (9.38) и введя обозначения

$$\begin{aligned} [K_1] &= h \iint [B_1]^T [D] [B_1] r d\varphi ds; \\ [K_2] &= \frac{h^3}{12} \iint [B_2]^T [D] [B_2] r d\varphi ds, \end{aligned} \quad (9.45)$$

получим матрицу жесткости элемента оболочки

$$[K] = [K_1] + [K_2],$$

составленную из слагаемых, соответствующих работе мембранных сил и изгибающих моментов. Вектор нагрузки элемента равен

$$\{F\} = \iint [\Phi]^T \{p\} r d\varphi ds. \quad (9.46)$$

Уравнение (9.38) равновесия элемента оболочки примет вид

$$[K] \{u_n\} = \{F\}. \quad (9.47)$$

Представленные зависимости позволяют составить последовательность решения задач методом конечных элементов:

1. Определяют размеры, геометрию и количество элементов в оболочке.

2. Задаются полем перемещений u, v, w в виде степенных функций в локальной системе координат в каждом элементе.

3. Коэффициенты в полиномиальных функциях выражают через узловые перемещения.

4. Определяют матрицу $[B_1]$, связывающую вектор деформации срединной поверхности с вектором узловых перемещений [соотношения (9.39), (9.43)].

5. Находят матрицу $[B_2]$, определяющую вектор изменений кривизн срединной поверхности [соотношения (9.42), (9.43)]. Эти зависимости позволяют, воспользовавшись уравнениями (9.45), (9.46), определить матрицу жесткости и вектор узловых сил элемента.

6. Составляют общую или глобальную матрицу жесткости всей системы.

7. Для узлов, совпадающих с граничным контуром, записывают условия на границе.

8. Решают полученные уравнения, определяющие узловые перемещения во всей системе.

9. Находят деформации и напряжения во всех узловых точках.

Для элемента цилиндрической оболочки, изображенного на рис. 9.5, построим матрицу жесткости при осесимметричной деформации. Вектор узловых перемещений элемента состоит из шести составляющих:

$$\{u_n\} = \{u_1 w_1 \vartheta_1 u_2 w_2 \vartheta_2\}^T.$$

Положим, что поле перемещений внутри элемента аппроксимируется полиномами

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 s;$$

$$w = \alpha_3 + \alpha_4 s + \alpha_5 s^2 + \alpha_6 s^3,$$

$$(9.48)$$

где $\alpha_1 \dots \alpha_6$ — коэффициенты аппроксимации; s — осевая координата.

Угол поворота нормали для цилиндрической оболочки

$$\vartheta = \frac{dw}{ds} = \alpha_4 + 2\alpha_5 s + 3\alpha_6 s^2.$$

Поскольку

1) при $s = 0$ имеем $u = u_1; w = w_1; \vartheta = \vartheta_1;$

2) при $s = l$ имеем $u = u_2; w = w_2; \vartheta = \vartheta_2,$

выразим коэффициенты $\alpha_1 \dots \alpha_6$ через узловые перемещения $u_1, u_2, w_1, w_2, \vartheta_1, \vartheta_2$. Матрица, связывающая вектор перемещений $\{u\} =$

$= \{u \omega\}^T$ с вектором узловых перемещений $\{u_n\}$ в уравнении (9.43), такая:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{s}{l}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - 3\frac{s^2}{l^2} + 2\frac{s^3}{l^3}\right) \left(s - 2\frac{s^2}{l} + \frac{s^3}{l^2}\right) \\ \left(\frac{s}{l}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(3\frac{s^2}{l^2} - 2\frac{s^3}{l^3}\right) \left(-\frac{s^2}{l} + \frac{s^3}{l^2}\right) \end{bmatrix} \quad (9.49)$$

С помощью соотношений (9.39), (9.42), (9.43) определяем матрицы $[B_1]$ и $[B_2]$:

$$[B_1] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \left(1 - 3\frac{s^2}{l^2} + 2\frac{s^3}{l^3}\right) & \frac{1}{r} \left(s - 2\frac{s^2}{l} + \frac{s^3}{l^2}\right) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \left(3\frac{s^2}{l^2} - 2\frac{s^3}{l^3}\right) & \frac{1}{r} \left(-\frac{s^2}{l} + \frac{s^3}{l^2}\right) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$[B_2] = \begin{bmatrix} 0 & \left(-6\frac{1}{l^2} + 12\frac{s}{l^3}\right) & \left(-4\frac{1}{l} + 6\frac{s}{l^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(6\frac{1}{l^2} - 12\frac{s}{l^3}\right) & \left(-2\frac{1}{l} + 6\frac{s}{l^2}\right) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Составляющие матрицы жесткости элемента $[K_1]$ и $[K_2]$ находят из соотношений (9.45), где интегралы взяты по цилиндрической поверхности элемента длиной l и радиусом r :

$$[K_1] = \frac{2\pi r E h}{1 - \mu^2} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{1}{l} & -\mu \frac{1}{2l} & -\mu \frac{l}{12r} & -\frac{1}{l} & -\mu \frac{1}{2r} & \mu \frac{1}{12} & \frac{l}{r} \\ & \frac{13}{35} \frac{l}{r^2} & \frac{11}{210} \frac{l}{r^2} & \mu \frac{1}{2r} & \frac{9}{70} \frac{l}{r^2} & -\frac{13}{420} \frac{l^2}{r^2} & \\ & & \frac{1}{105} \frac{l^3}{r^2} & \mu \frac{1}{12} \frac{l}{r} & \frac{13}{420} \frac{l^2}{r^2} & -\frac{1}{140} \frac{l^3}{r^2} & \\ & & & \frac{1}{l} & \mu \frac{1}{2} \frac{1}{r} & -\mu \frac{1}{12} \frac{l}{r} & \\ & & & & \frac{13}{35} \frac{l}{r^2} & -\frac{11}{210} \frac{l^2}{r^2} & \\ & & & & & & \frac{5}{84} \frac{l^3}{r^2} \end{bmatrix}; \quad (9.50)$$

Симм.

$$[K_2] = \frac{2\pi r E h^3}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & 0 & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ & & \frac{4}{l} & 0 & -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ & & & & & \frac{4}{l} \end{bmatrix}. \quad (9.51)$$

Симм.

Сумма этих матриц дает матрицу жесткости элемента $[K]$. Для построения общей матрицы жесткости всей системы необходимо воспользоваться последовательностью, приведенной в § 3.5. Нужно отметить, что при решении задач часто приходится стыковать элементы разных размеров. На участках оболочки, где ожидается быстрое изменение перемещений, например вблизи краевой зоны, длина элементов должна быть небольшой по сравнению с длиной элементов в остальных зонах оболочки. Стыковка элементов разной длины в МКЭ мало усложняет расчет, что является большим достоинством метода. Для заданной нагрузки из соотношения (9.46) и матрицы (9.49) находят вектор узловых сил, который соответствует правой части линейной системы уравнений. Решение этой системы, при учете условий на границе оболочки, определяет все узловые перемещения.

Соотношения (9.45) и (9.46) справедливы также для произвольной оболочки вращения как при осесимметричной, так и при несимметричной деформации. Асимметрия вносит некоторые осложнения в расчет. Прежде всего появляется еще одна составляющая вектора перемещения v . И кроме того, каждый из компонентов вектора — функция двух переменных s и φ . Решение задачи отличается тем, что необходимо разделить переменные по координатам s и φ , представив составляющие по φ в виде периодических тригонометрических функций.

При рассмотрении оболочек вращения с криволинейной образующей хорошие результаты получаются для конических элементов и при аппроксимации поля перемещений вида (9.48). Составление общей матрицы жесткости при этом имеет некоторые особенности. Необходимо для каждого элемента перейти от локальной к общей координатной системе, прежде чем проводить стыковку элементов. В остальном последовательность определения узловых перемещений и усилий остается той же.

§ 9.4. Численное решение задач устойчивости оболочек

Анализ устойчивости оболочек может быть проведен различными методами и, в частности, рассмотренными в § 9.1 ... 9.3. Ниже, применительно к задаче устойчивости цилиндрической оболочки, приводится алгоритм численного расчета, основанный на методе конечных разностей.

Для получения уравнений устойчивости используется прием, изложенный в § 8.2. Усилия докритического состояния при потере устойчивости оболочки дают составляющие на нормаль к поверхности (8.10):

$$p_{n\phi} = -pR\kappa_2 + T_{10}\kappa_1 + 2S_0\kappa_{12}.$$

Приближенно считаем, что фиктивная нагрузка $p_{n\phi}$ соответствует составляющей правой части третьего уравнения системы (9.16) моментной оболочки. При осесимметричном докритическом состоянии уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial s} + \frac{\partial S}{R\partial\varphi} &= 0; \\ \frac{\partial T_2}{R\partial\varphi} + \frac{\partial S}{\partial s} - \frac{\partial M_1}{R^2\partial\varphi} - \frac{\partial M_{12}}{R\partial s} &= 0; \\ \frac{T_2}{R} + \frac{\partial^2 M_1}{\partial s^2} + 2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial s R \partial\varphi} + \frac{\partial^2 M_2}{R^2\partial\varphi^2} &= -pR\kappa_2 - T_{10}\kappa_1. \end{aligned} \quad (9.52)$$

Остальные соотношения получаются из зависимостей (9.17), (9.18). Как и в § 9.2, приведем общую систему к четырем уравнениям второго порядка. Затем представим ее в безразмерной форме, имея в виду формулы (9.19) и полагая далее, что форма потери устойчивости периодическая по окружной координате и возможны разложения (9.20), получим систему уравнений относительно амплитудных значений u_m ; v_m ; w_m ; M_{1m}

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_m}{dx^2} - \frac{1-\mu}{2} m^2 u_m + \frac{1+\mu}{2} m \frac{dv_m}{dx} + \mu \frac{dw_m}{dx} &= 0; \\ -\frac{1+\mu}{2} m \frac{du_m}{dx} + \frac{1-\mu}{2} \frac{d^2 v_m}{dx^2} - m^2 v_m - m\omega_m + \\ + k \left(\frac{1-\mu}{2} \frac{d^2 v_m}{dx^2} - m^2 v_m + m \frac{d^2 w_m}{dx^2} - m^3 w_m \right) &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu \frac{du_m}{dx} + mv_m + \omega_m + (1 - \mu^2) \frac{d^2 M_{1m}}{dx^2} + k \left[-(1 - \mu) m \times \right. & (9.53) \\
\left. \times \frac{d^2 v_m}{dx^2} + m^3 v_m - (2 - \mu) m^2 \frac{d^2 \omega_m}{dx^2} + m^4 \omega_m \right] = \\
= \frac{pR}{Eh} (1 - \mu^2) [mv_m + m^2 \omega_m] + \frac{T_1^0}{Eh} (1 - \mu^2) \frac{d^2 \omega_m}{dx^2}; \\
-k \mu m v_m + k \frac{d^2 \omega_m}{dx^2} - k \mu m^2 \omega_m - M_{1m} = 0.
\end{aligned}$$

Теперь приведем систему уравнений к векторно-матричному виду. При том же векторе $\{y\} = \{u_m v_m \omega_m M_{1m}\}^T$ уравнения можно представить так:

$$[A1] \frac{d^2}{dx^2} \{y\} + [B1] \frac{d}{dx} \{y\} + [C1] \{y\} = 0. \quad (9.54)$$

Матрицы $[A1]$, $[B1]$, $[C1]$ имеют те же составляющие, что и матрицы $[A]$, $[B]$, $[C]$ в формулах (9.28), но в отличие от них содержат слагаемые, определяемые равномерным давлением p и осевым усилием T_{10} докритического состояния. Это касается только членов a_{12} , a_{13} , a_{14} ; остальные члены матриц в формулах (9.28) те же:

$$\begin{aligned}
a_1 = 1; \quad a_2 = -\frac{1 - \mu}{2} m^2; \quad a_3 = \frac{1 + \mu}{2} m; \quad a_4 = \mu; \\
a_5 = -\frac{1 + \mu}{2} m; \quad a_6 = \frac{1 - \mu}{2} (1 + k); \quad a_7 = -m^2 (1 + k); \\
a_8 = km; \quad a_9 = -m (1 + km^2); \quad a_{10} = \mu; \quad a_{11} = -(1 - \mu) km; \\
a_{12} = m (1 + km^2) - \frac{pR}{Eh} (1 - \mu^2) m; \quad a_{13} = -(2 - \mu) km^2 - \frac{T_{10}}{Eh} (1 - \mu^2); \\
a_{14} = 1 + km^4 - \frac{pR}{Eh} (1 - \mu^2) m^2; \quad a_{15} = 1 - \mu^2; \quad a_{16} = -\mu km; \\
a_{17} = k; \quad a_{18} = -\mu km^2; \quad a_{19} = -1. \quad (9.55)
\end{aligned}$$

Уравнение (9.54) — однородное. Для решения задачи устойчивости необходимо найти собственные значения уравнения (9.54) при определенных граничных условиях. Общая форма граничных условий может быть представлена так:

$$\begin{aligned}
[E]_0 \frac{d}{dx} \{y\}_0 + [F]_0 \{y\}_0 = 0; \\
[E]_n \frac{d}{dx} \{y\}_n + [F]_n \{y\}_n = 0. \quad (9.56)
\end{aligned}$$

Перепишем систему (9.54), (9.56) в разностном виде. Воспользовавшись аппроксимацией § 9.2, получим

$$\begin{aligned} [H]_0 \{y\}_0 + \frac{2}{\Delta} [E]_0 \{y\}_1 - \frac{1}{2\Delta} [E]_0 \{y\}_2 &= 0; \\ [N1]_i \{y\}_{i-1} + [M1]_i \{y\}_i + [L1]_i \{y\}_{i+1} &= 0; \\ \frac{1}{2\Delta} [E]_n \{y\}_{n-2} - \frac{2}{\Delta} [E]_n \{y\}_{n-1} + [H]_n \{y\}_n &= 0. \end{aligned} \quad (9.57)$$

Принимают $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Для исследования устойчивости упругой системы необходимо приравнять нулю определитель, составленный из матриц при искомым значениях векторов. Отсюда находят критические параметры оболочки. Развернутая форма определителя имеет вид

$$D = \begin{vmatrix} [H]_0 & \frac{2}{\Delta} [E]_0 & -\frac{1}{2\Delta} [E]_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ [N1]_1 & [M1]_1 & [L1]_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & [N1]_2 & [M1]_2 & [L1]_2 & 0 & \dots & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & [N1]_{n-2} & [M1]_{n-2} & [L1]_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & [N1]_{n-1} & [M1]_{n-1} & [L1]_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \frac{1}{2\Delta} [E]_n & -\frac{2}{\Delta} [E]_n & [H]_n \end{vmatrix}. \quad (9.58)$$

Первая и последняя строки здесь соответствуют граничным условиям. Каждая матрица имеет размер 4×4 . Число строк и столбцов определителя равно $(n + 1)$.

Последовательность расчета удобно организовать следующим образом. При известных параметрах оболочки $k = h^2/(12R^2)$ и μ задаем значения: m — число волн в окружном направлении; $T_{10}/(Eh)$ — безразмерное осевое усилие; $pR/(Eh)$ — безразмерное внешнее давление. Положим, что требуется найти критическое значение внешнего давления, соответствующее заданному числу волн m и осевого усилия $T_{10}/(Eh)$. Из формул (9.55) находим все составляющие матриц $[A1]$; $[B1]$; $[C1]$ [см. формулы (9.28)], а следовательно, и матрицы $[L1]$; $[M1]$; $[N1]$ (см. § 9.2). Для цилиндрической оболочки при однородном докритическом состоянии компоненты этих матриц не зависят от координаты x и, следовательно, от номера i . В определителе (9.58) $[N1]_1 = [N1]_2 = \dots = [N1]_n$; $[M1]_1 = [M1]_2 = \dots = [M1]_n$; $[L1]_1 = [L1]_2 = \dots = [L1]_n$. Но при более сложном виде нагружения оболочки матрицы одной диагонали определителя не равны друг другу.

Определитель при заданных параметрах усилий и геометрии оболочки подсчитывают методом прогонки. Положим, что векторы $\{y\}$ в соседних точках связаны соотношением

$$\{y\}_i = [\Phi]_{i+1} \{y\}_{i+1}. \quad (9.59)$$

Матрица прогонки $[\Phi]_{i+1}$ находится из второго уравнения системы (9.57), куда подставляется формула, аналогичная соотношению (9.59):

$$\{y\}_{i-1} = [\Phi]_i \{y\}_i.$$

В результате получаем

$$([N1]_i [\Phi]_i + [M1]_i) \{y\}_i + [L1]_i \{y\}_{i+1} = 0.$$

Сопоставив его с выражением (9.59), можно найти рекуррентное соотношение для матриц прогонки:

$$[\Phi]_{i+1} = - ([N1]_i [\Phi]_i + [M1]_i)^{-1} [L1]_i. \quad (9.60)$$

При прямом ходе прогонки отсюда могут быть определены все матрицы $[\Phi]_i$, но для того чтобы начать расчет, нужно знать матрицу $[\Phi]_2$. Для этого из первого и второго уравнений (9.58) при $i = 1$ исключается вектор $\{y\}_0$:

$$([N1] \frac{2}{\Delta} [E]_0 - [H]_0 [M1]_1) \{y\}_1 = ([N1]_1 \frac{1}{2\Delta} [E]_0 + [H]_0 [L1]_1) \{y\}_2.$$

Отсюда, имея в виду соотношение (9.59) при $i = 1$, находят

$$[\Phi]_2 = ([N1]_1 \frac{2}{\Delta} [E]_0 - [H]_0 [M1]_1)^{-1} ([N1]_1 \frac{1}{2\Delta} [E]_0 + [H]_0 [L1]_1).$$

Это соотношение и рекуррентная зависимость (9.60) позволяют найти матрицы $[\Phi]_i$ вплоть до $[\Phi]_{n-1}$. Получается уравнение

$$\{y\}_{n-2} - [\Phi]_{n-1} \{y\}_{n-1} = 0, \quad (9.61)$$

которое необходимо дополнить системой из второго уравнения (9.57) при $i = n - 1$ и третьего уравнения (9.57). Исключив отсюда $\{y\}_n$, получим

$$[Q] \{y\}_{n-2} + [R] \{y\}_{n-1} = 0, \quad (9.62)$$

где

$$[Q] = [H]_n [N1]_{n-1} - [L1]_{n-1} \frac{1}{2\Delta} [E]_n;$$

$$[R] = [H]_n [M1]_{n-1} + [L1]_{n-1} \frac{2}{\Delta} [E]_n.$$

Уравнения (9.61) и (9.62) образуют определитель, который равен

$$D = |[I] [R] + [Q] [\Phi]_{n-1}|.$$

При произвольных значениях параметров оболочки $D \neq 0$. Необходимо повторить расчеты, варьируя давление, и добиться того, чтобы выполнялось условие $D = 0$. Это значение нагрузки определяет собственное число системы для заданного m , но может не соответствовать критическому состоянию оболочки, так как, вообще говоря, не минимально. Перебирая числа m , нужно найти ряд значений давления p , наименьшее из которых будет критическим.

Формы потери устойчивости оболочки находятся с помощью обратного хода прогонки. Для этого используется соотношение (9.59).

Часть III

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Глава 10

ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ РАКЕТ НА ПРОЧНОСТЬ

Работоспособность конструкции и ее весовые характеристики определяются прежде всего принимаемыми при расчете требованиями к прочности. В течение десятилетий проектировщики самолетов и ракет основываются на нормативных методах расчета на прочность. На основе обширных теоретических и экспериментальных исследований, большого опыта эксплуатации конструкций для различных расчетных случаев устанавливаются нормированные значения коэффициентов безопасности. Близкие к единице значения коэффициентов безопасности свидетельствуют, кроме всего прочего, о высоких требованиях к методам расчета. Предварительные проектировочные и текущие поверочные расчеты проводят с использованием современных теорий, численных и аналитических методов анализа. Окончательное суждение о прочности конструкции выносят после проведения цикла статических испытаний. В этой главе освещаются перечисленные вопросы, а также особенности нагружения ракеты в полете. Более подробные расчеты отдельных отсеков и агрегатов рассматриваются в следующих главах.

§ 10.1. Основные принципы расчета

Задача расчета на прочность элементов конструкции ракеты состоит в том, чтобы *обеспечить надежную работу конструкции при минимальной ее массе*. Формулировка условий надежности зависит от принимаемых критериев при оценке прочности, а также от методов определения расчетных предельных состояний конструкций.

В самолетостроении и ракетной технике чаще всего принимается метод расчета по *разрушающим нагрузкам*, при котором размеры элементов конструкции выбирают таким образом, чтобы конструкция выдерживала без разрушения определенную нормированную нагрузку. Эта нагрузка называется *расчетной разрушающей нагрузкой*. Расчетная разрушающая нагрузка равна эксплуатационной нагрузке, умноженной на коэффициент безопасности f . *Эксплуатационными нагрузками* являются все внешние силы, действующие на ракету, перегрузки, внутренние силы,

возникающие в корпусе при рабочих режимах полета, транспортировке или старте. Их определяют по результатам баллистических и аэродинамических расчетов, продувок, полетных испытаний и пр.

Эксплуатационные нагрузки связаны с расчетными соотношениями

$$X_p = fX_b; Y_p = fY_b; F_p = fF_b; N_p = fN_b; M_p = fM_b;$$

где X , Y — аэродинамические силы; F — тяга двигателя; N — нормальная сила; M — изгибающий момент в сечении корпуса. Соответственно расчетная перегрузка $n_p = fn_b$.

Степень надежности, с одной стороны, и весовая эффективность конструкции, с другой, зависят от значения коэффициента безопасности f . Невыгодно создавать конструкции с большими значениями коэффициента безопасности — они будут иметь неоправданно большой вес. При сильно заниженных значениях коэффициента безопасности возможно разрушение элементов конструкции в реальных условиях эксплуатации. При назначении коэффициента безопасности нужно учитывать, как точно определены эксплуатационные нагрузки (т. е. погрешности аэродинамических, баллистических, тепловых и других расчетов, допуски на давление в баках и пр.); кроме того, играет роль известная условность в расчетах на прочность: неполное соответствие силовой схемы реальной конструкции, отклонения от номинальных значений размеров, механических характеристик материала и т. д.

Для самолетов $f = 1,5 \dots 2,0$. В Англии в требованиях к расчету *управляемых снарядов* указывается, что расчет конструкции на прочность должен проводиться с коэффициентом безопасности $f = 1,33$. В США согласно требованиям к прочности *беспилотных летательных аппаратов* в полете коэффициент безопасности принят равным $f = 1,25$; в случаях обслуживания ракеты на земле коэффициент безопасности повышается до $f = 1,5$. В большинстве случаев вводить одинаковый коэффициент безопасности для всех ракет и всех условий эксплуатации нерационально. Учитывая недостаточную достоверность определения отдельных составляющих нагрузки, к этим составляющим иногда применяют разные коэффициенты безопасности. Например, коэффициент безопасности на давление в баках при расчете на устойчивость может быть взят минимальным, в то время как соответствующее значение коэффициента на внешние силы несколько больше.

Сравнительно небольшое значение коэффициента безопасности для ракет обусловлено одноразовым их применением. Некоторые элементы конструкции ракеты рассчитывают, принимая повышенные коэффициенты безопасности. Например, для баллонов высокого давления при их заправке в присутствии людей обычно коэффициент безопасности $f > 2$.

Для большинства элементов, работающих на растяжение, расчетной разрушающей нагрузке должны соответствовать напряжения, равные пределу прочности материала. Для отсеков, подверженных сжатию, этой нагрузке должны соответствовать критические напряжения потери устойчивости: для гладких отсеков — напряжения хлопка,

для стрингерных и других подкрепленных отсеков — критические напряжения потери общей устойчивости.

Для определения разрушающих нагрузок реальных конструкций ракет используют статические испытания. По результатам испытаний определяют фактическую разрушающую нагрузку в расчетных случаях загрузки. Отношение ее к расчетной разрушающей нагрузке

$$F_{\text{ф.разр}}/F_{\text{р.разр}}$$

служит оценкой точности расчета, причем для правильно спроектированных и рассчитанных конструкций эта величина должна быть близкой к единице.

Необходимо отметить, что такие элементы конструкции ракеты, как двигатели ЖРД или РДТТ, находящиеся в условиях интенсивного нагружения и нагрева, рассчитывают не только по разрушающим нагрузкам, а и по допускаемым напряжениям или по допускаемым перемещениям [26]. Запас прочности при расчете по допускаемым напряжениям определяют как отношение

$$n_{\text{в}} = \sigma_{\text{в}}/\sigma_{\text{э}},$$

где $\sigma_{\text{в}}$ — предел прочности материала; $\sigma_{\text{э}}$ — максимальное значение эксплуатационного напряжения. Подробнее особенности расчета двигателей по допускаемым напряжениям рассмотрены ниже в гл. 14.

В связи с тем что баллистическая ракета имеет программные траектории полета, нагрузки в каждой точке трассы полета определяются на основе баллистических и динамических расчетов. В некоторые моменты времени полета напряжения в сечениях ракеты достигают наибольших значений. Эти моменты соответствуют случаям наиболее опасных комбинаций нагрузок и называются расчетными случаями. Расчет элементов конструкции ракеты на прочность проводится в расчетных случаях по соответствующим внешним нагрузкам.

Определить расчетные случаи часто бывает довольно сложно. Однако для ряда отсеков и агрегатов ракет некоторые из таких случаев можно указать заранее. Например, узлы крепления двигателя рассчитывают на случай запуска при действии максимальной динамической перегрузки, узлы крепления агрегатов внутри корпуса — на случай действия максимальных перегрузок $n_{x \text{ max}}$ и $n_{y \text{ max}}$, хвостовой отсек — на случай стоянки ракеты на стартовом столе при действии максимальной ветровой нагрузки и т. д.

Понятно, что даже для этих элементов ракеты расчетные случаи не исчерпываются только приведенными выше. Детальные расчеты часто выявляют новые и иногда более опасные расчетные случаи.

Для основных элементов ракеты, расположенных в средней части (баки, переходные отсеки и т. д.), приходится определять расчетные случаи на основе подробных расчетов на прочность. В различные моменты полета и наземной эксплуатации каждый отсек корпуса ракеты бывает нагружен различными силами (сжимающими, изгибающими, сдвигающими; силами давления). Для упрощения анализа расчетных

случаев и комбинаций нагрузок удобно ввести понятие определяющей нагрузки. Это — сила, от значения которой в первую очередь зависит силовая схема и конструктивные особенности отсека. Так, для стабилизатора отделяющейся головной части ракеты определяющей нагрузкой является внешнее аэродинамическое давление. Сухой отсек ракеты нагружен осевой сжимающей силой N , изгибающим моментом M и перерезывающей силой Q . Сдвигающие силы обычно незначительны и являются второстепенным фактором. Сжатие и изгиб определяют в основном конструкцию такого отсека. Для него определяющей нагрузкой будет сжимающая эквивалентная сила

$$N_{\text{экв}} = N + 2M/R. \quad (10.1)$$

Она характерна тем, что напряжения сжатия в сечениях корпуса от этой силы равны суммарным напряжениям сжатия от действия осевой силы N и изгибающего момента M .

Для некоторых отсеков приходится рассматривать несколько определяющих нагрузок. Например, для конического переходного отсека определяющая нагрузка — внешнее аэродинамическое давление и осевая сила $N_{\text{экв}}$; для баков ракет в качестве определяющей нагрузки принимают силу $N_{\text{экв}}$ и давление наддува.

Расчетные случаи для сухих отсеков средней части корпуса выбирают по максимальному значению величин $N_{\text{экв}}$, вычисленных для различных точек траектории полета.

Зависимость величины $N_{\text{экв}}$ от времени строят для различных сечений с помощью уравнения (10.1). Исходными данными для расчета являются внешние программные нагрузки и нагрузки от возмущенного движения ракеты по траектории, а также распределение масс по длине корпуса ракеты и закон их изменения по времени полета. По этим данным находят перегрузки n_x и n_y в каждой точке траектории. Осевая перегрузка n_x , определяемая в основном программными нагрузками, увеличивается в полете. Например, для ракеты «Титан-II» на старте $n_x \approx 1,4$, а в конце работы двигательной установки первой ступени $n_x \approx 9$.

В сухом отсеке осевая сила N складывается из сил инерции и сил аэродинамического сопротивления. В сечениях передних и средних отсеков корпуса осевые силы обычно возрастают по мере выгорания горючего вследствие увеличения осевой перегрузки. Наиболее нагруженным сечением корпуса является, как правило, сечение, примыкающее к двигательной установке. На рис. 10.1 изображены кривые, отражающие изменение осевой силы для различных сечений в функции безразмерного времени \bar{t} полета.

Поперечная перегрузка n_y , определяющая изгибающий момент в сечении корпуса, складывается из двух частей: программной поперечной перегрузки и перегрузки от возмущенного движения, зависящей в основном от ветровой нагрузки; она обычно значительно больше программной перегрузки. Поперечная перегрузка при полете в атмосфере достигает максимальных значений на участках траектории, где максимален скоростной напор q . При полете на участке траектории в

верхних слоях атмосферы поперечная перегрузка весьма мала; она определяется силами от управляющих органов. Случаи наибольшей поперечной перегрузки соответствуют обычно максимальным изгибающим моментам в сечениях корпуса ракеты.

Из уравнения (10.1) при известных силе N и моменте M легко найти эквивалентную осевую силу $N_{\text{ЭКВ}}$ в каждой точке траектории для различных сечений корпуса. На рис. 10.2 показана зависимость силы $N_{\text{ЭКВ}}$ от времени для двух сечений корпуса бакового отсека ракеты V-2. Для сечения II—II расчетным является случай, когда $N_{\text{ЭКВ}2} = 155$ кН. В сечении I—I эквивалентная сила достигает максимального значения $N_{\text{ЭКВ}1} = 128$ кН на 30-й секунде полета. Расчетные случаи для других сечений корпуса можно найти, построив подобные кривые.

Несущие баки ракет нагружены нормальной силой N , изгибающим моментом M и внутренним давлением p . Определяющими нагрузками для них являются эквивалентная сжимающая сила и внутреннее гидростатическое давление. Эквивалентная сжимающая сила для бака

$$N'_{\text{ЭКВ}} = N + 2M/R - p_0 \pi R^2, \quad (10.2)$$

где p_0 — давление наддува, R — радиус обечайки бака. Гидростатическое давление складывается из давления наддува и давления столба жидкости:

$$p = p_0 + n_x \gamma H, \quad (10.3)$$

где γ — удельный вес жидкости; n_x — осевая перегрузка; H — высота столба жидкости от зеркала до рассматриваемого сечения.

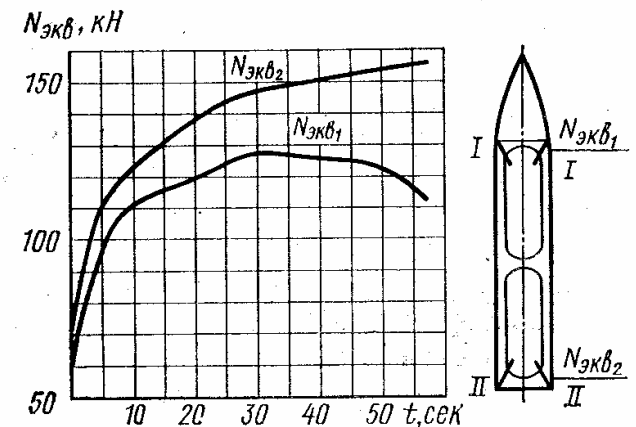


Рис. 10.2

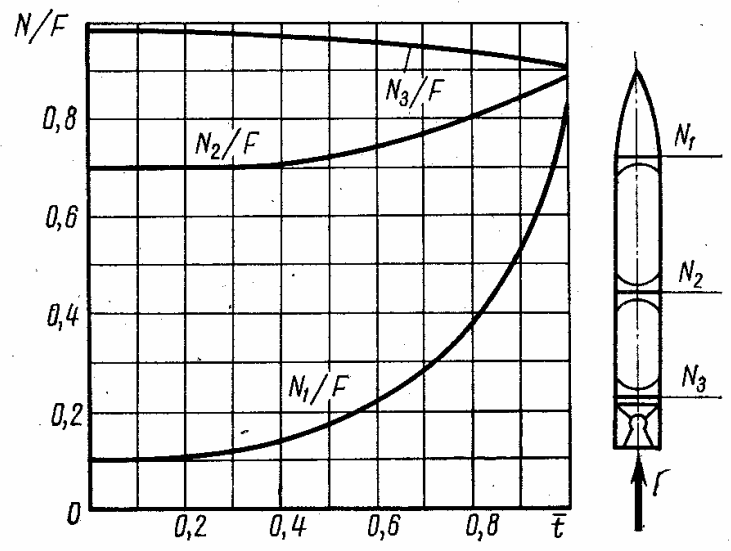


Рис. 10.1

Гидростатическое давление определяет окружные напряжения в обечайке, окружные и меридиональные напряжения в оболочках днищ и шпангоутах на стыке днищ с обечайкой.

Эквивалентная сила $N'_{\text{ЭКВ}}$ и гидростатическое давление p являются определяющими нагрузками и для расчета обечайки бака на устойчивость от сжатия. Критические

сжимающие напряжения в обечайке бака зависят от внутреннего давления. Расчет обечайки проводится в нескольких расчетных случаях для различных комбинаций нагрузок $N_{\text{экв}}$ и p .

Участки обечайки бака, находящиеся над зеркалом жидкости, испытывают интенсивный аэродинамический нагрев. Поскольку нагрев существенно снижает механические характеристики материала, необходимо проводить расчет на прочность и устойчивость с учетом влияния температуры.

Как уже было указано, процесс нахождения расчетных случаев для элементов корпуса ракеты весьма трудоемок. Чтобы упростить расчет, на стадии предварительного проектирования можно ориентироваться на моменты полета, соответствующие наибольшим значениям скоростного напора q_{max} , тяги двигательной установки F_{max} , температуры конструкции T_{max} , перегрузок $n_{x\text{max}}$ и $n_{y\text{max}}$, а также величины $(n_x \gamma H)_{\text{max}}$. Эти моменты полета в предварительных проекционных расчетах могут рассматриваться как расчетные случаи. Необходимо отметить, что последующие расчеты позволяют уточнить расчетные случаи по $N_{\text{эквmax}}$, p_{max} и т. д. Кроме полетных случаев при расчетах рассматривают случаи транспортировки ракеты и ее отсеков в горизонтальном положении, случаи действия ветровых и сейсмических нагрузок.

Во всех этих расчетных случаях необходимо построить эпюры моментов M , нормальных N и перерезывающих Q сил и эпюры гидростатического и аэродинамического давлений. Эти данные являются исходными для проведения последующих расчетов на прочность.

§ 10.2. Внешние нагрузки

На ракету действуют поверхностные и объемные нагрузки. К поверхностным нагрузкам относятся аэродинамическое давление, давление газов в камере сгорания и сопле двигателя, реакции различных опорных устройств и т. д. Объемные нагрузки являются следствием действия поля тяготения и инерции. В каждый момент времени система всех сил, приложенных к ракете, находится в равновесии. Это означает, что вектор равнодействующей объемных сил равен по значению и противоположен по знаку вектору равнодействующей всех поверхностных сил. Это следствие принципа Даламбера позволяет просто решать задачи, связанные с особенностями нагружения конструкций ракет. Силу тяги можно рассматривать как поверхностную силу, направленную по оси двигателя. При полете вне атмосферы эта сила является единственной поверхностной силой, приложенной к ракете. Следовательно, в этом случае равнодействующая объемных сил должна быть равна по значению и противоположна по знаку силе тяги. Из этого следует, что ракету в полете можно рассматривать как тело, находящееся в некотором поле тяготения, направление и интенсивность которого определяются силой тяги двигателей. Перегрузка этого поля $n_x = F/(mg)$, где F — сила тяги; m — масса ракеты; g — ускорение свободного падения. То же будет и при полете в атмосфере при отсутствии поперечных сил. Только в этом случае

перегрузка соответствует осевой перегрузке условного поля тяготения:

$$n_x = (F - X)/(mg), \quad (10.4)$$

где X — сила аэродинамического сопротивления.

Поверхностные нагрузки, действующие на ракету в различных условиях эксплуатации, могут быть программными и случайными. Основной программной нагрузкой на активном участке полета является сила тяги двигателей, отклонение которой от номинального режима весьма незначительно. Аэродинамические нагрузки зависят не только от программных величин (скорости и угла атаки),

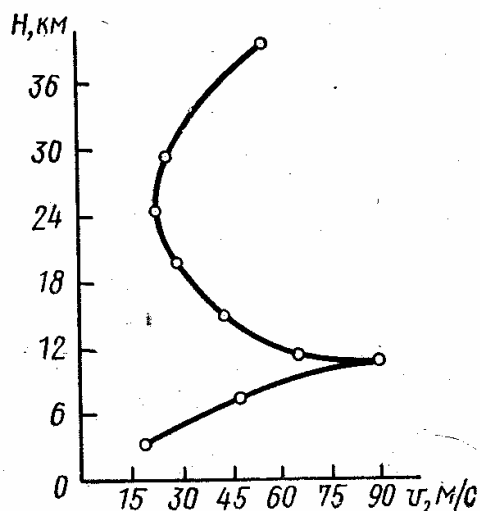


Рис. 10.3

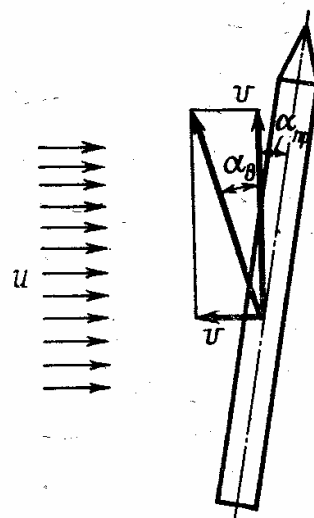


Рис. 10.4

но и от случайных возмущений в движении ракеты и случайных отклонений свойств атмосферы от принятых в качестве стандартных (ГОСТ 4401—81).

В расчетах на прочность наиболее существенными случайными нагрузками являются поперечные нагрузки от действия ветра. В качестве примера на рис. 10.3 представлена одна из зависимостей скорости ветра v от высоты H [17]. Кроме того, приходится также учитывать струйные течения, существующие в атмосфере над некоторыми районами земного шара.

Рассмотрим способы определения внешних нагрузок в различных случаях эксплуатации баллистической ракеты.

Аэродинамические нагрузки на активном участке полета. Исходными данными для расчетов нагрузок служат результаты баллистических и аэродинамических расчетов. В каждый момент времени полета ракеты по траектории должны быть известны: высота полета H , плотность воздуха ρ , скорость ракеты v , число $Ma = v/a$, где a — скорость звука на данной высоте, программный угол атаки $\alpha_{пр}$, тяга двигателей F , аэродинамические коэффициенты C_x , C_y , масса m и геометрические параметры ракеты. К программному углу атаки добавляется дополнительный угол атаки $\alpha_{в}$ от действия ветра. В первые моменты времени полета, когда изменения параметров движения ра-

кеты (угла тангажа, вектора скорости) еще очень малы, дополнительный угол атаки от действия ветра (рис. 10.4) можно определять по формуле

$$\alpha_{\text{в}} = u/v,$$

где u — скорость ветра; v — скорость полета.

В момент воздействия ветра суммарный угол атаки $\alpha = \alpha_{\text{пр}} + \alpha_{\text{в}}$. В последующие моменты времени, когда изменение параметров движения ракеты существенно, суммарный угол атаки

$$\alpha = \alpha_{\text{пр}} + \alpha_{\text{в}} + \Delta\alpha, \quad (10.5)$$

где $\Delta\alpha$ — изменение угла атаки при возмущенном движении ракеты. Полные аэродинамические силы в скоростных осях x, y равны

$$X = C_x q S_M; \quad Y = C_y q S_M, \quad (10.6)$$

где $q = \rho v^2/2$ — скоростной напор на данной высоте полета; S_M — площадь миделя ракеты. В осях x_1, y_1 , связанных с корпусом ракеты,

$$X_1 = C_{x_1} q S_M; \quad Y_1 = C_{y_1} q S_M. \quad (10.7)$$

При малых углах атаки α имеем $C_{x_1} = C_x - \alpha C_y$; $C_{y_1} = C_y + \alpha C_x$.

Коэффициенты C_x и C_y и соответственно C_{x_1} и C_{y_1} зависят от угла атаки α и числа Ma полета. Максимальные значения этих коэффициентов соответствуют числам $Ma = 1,0 \dots 1,5$. При малых углах атаки α можно считать, что C_x не зависит от α , а C_y и C_{y_1} пропорциональны α . Тогда

$$C_y = C_y^\alpha \alpha; \quad C_{y_1} = C_{y_1}^\alpha \alpha, \quad (10.8)$$

где C_y^α и $C_{y_1}^\alpha = C_y^\alpha + C_x$ — производные от C_y и C_{y_1} по α при $\alpha = 0$. Для ракеты V-2 зависимости коэффициентов C_x и C_y от угла атаки α и числа Ma приведены в книге [27].

Коэффициенты C_y, C_x, C_y^α определяют экспериментально путем продувок моделей ракеты в аэродинамических трубах и уточняют при полетных испытаниях.

Для расчетов на прочность ракеты силы X_1 и Y_1 необходимо распределить по длине корпуса. Наиболее точно это можно сделать на основе результатов продувок моделей. Однако в начальной стадии проектирования приходится пользоваться приближенными теоретическими методами.

Максимальное значение аэродинамических нагрузок соответствует участку траектории полета со значением скоростного напора $q = q_{\text{max}}$ при сверхзвуковой скорости полета ($Ma > 1$). Для очень больших чисел Ma справедлива теория Ньютона, согласно которой *аэродинамическое давление на поверхность тела определяется только нормальной составляющей скорости потока*. Этой теорией можно воспользоваться и для приближенного определения нагрузок при относительно небольших числах Ma полета. Аэродинамическое давление p от

действия скоростного напора q по теории Ньютона можно представить так:

$$p = 2q (v_n/v)^2, \quad (10.9)$$

где v_n — нормальная составляющая скорости потока v .

При осесимметричном обтекании (рис. 10.5, а)

$$v_n = v \sin \beta,$$

где β — угол касательной к поверхности тела с осью вращения.

Тогда аэродинамическое давление

$$p = 2q \sin^2 \beta. \quad (10.10)$$

Для малых углов β можно принять $p = 2q\beta^2$.

При обтекании тела потоком под углом атаки α составляющие скорости v_n будут переменными по окружности поперечного сечения (рис. 10.5, б):

$$v_n = v \sin (\beta + \alpha \cos \varphi).$$

При малых углах β и α можно записать $v_n \approx v (\beta + \alpha \cos \varphi)$, и давление определяется формулой

$$p = 2q (\beta + \alpha \cos \varphi)^2. \quad (10.11)$$

Осевая сила X_1 и поперечная сила Y_1 определяются интегралами

$$X_1 = \int_0^s \int_0^{2\pi} p \sin \beta r d\varphi ds; \quad (10.12)$$

$$Y_1 = \int_0^s \int_0^{2\pi} p \cos \beta \cdot \cos \varphi r d\varphi ds,$$

где s — длина дуги вдоль образующей.

Для конуса при малом угле β , когда $\sin \beta \approx \beta$ и $\cos \beta \approx 1$, получаем

$$X_1 = 2 (\beta^2 + \alpha^2/2) q S_M; \quad Y_1 = 2\alpha q S_M, \quad (10.13)$$

где $S_M = \pi R^2$ — площадь основания конуса.

Таким образом, по теории Ньютона

$$C_{x_1} = 2 (\beta^2 + \alpha^2/2), \quad C_{y_1} = 2\alpha. \quad (10.14)$$

При уменьшении числа Ма коэффициент поперечной силы C_{y_1} возрастает. Поэтому при числе Ма ≈ 2 , соответствующем скоростным напорам, близким к q_{\max} , вместо $C_{y_1} = 2\alpha$ в расчетах принимают [17]

$$C_{y_1} = 3\alpha. \quad (10.15)$$

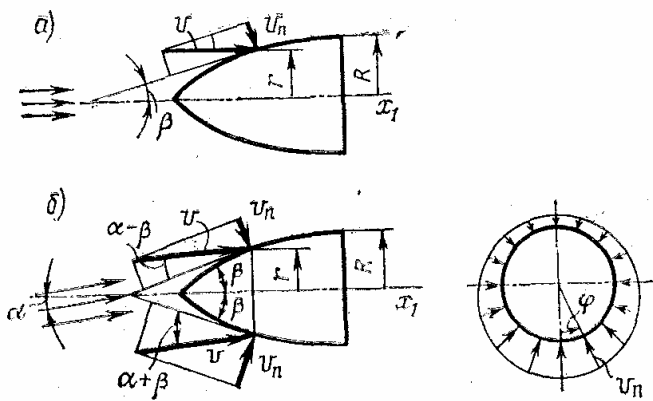


Рис. 10.5

Цилиндрические участки корпуса ракеты при сверхзвуковых скоростях полета имеют по сравнению с коническими участками относительно меньший коэффициент C_{y1} . В приближенных расчетах можно принять $C_{y1} = 1,5\alpha^2\lambda$, где $\lambda = l/d$ — удлинение цилиндра (отношение длины цилиндра к его диаметру). Соответственно поперечная сила, действующая на цилиндрическую часть корпуса,

$$Y_1 = 1,5\alpha^2\lambda q S_M. \quad (10.16)$$

Распределение этой силы по длине цилиндра принимается равномерным.

В приближенных расчетах аэродинамических нагрузок можно не учитывать взаимного влияния различных отсеков. Тогда поперечная

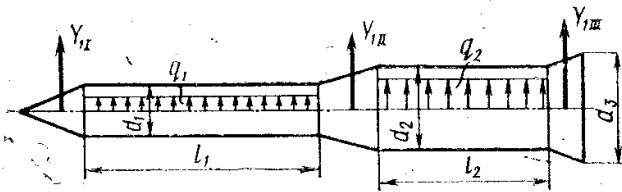


Рис. 10.6

сила i -го конического отсека определяется формулой $Y_{1i} = 3\alpha q S_i$, где S_i — площадь проекции конической поверхности на плоскость, перпендикулярную оси ракеты, а поперечная сила i -го цилиндрического отсека — формулой $Y_{1i} = 1,5\alpha^2 q \lambda_i S_{Mi}$. Так как

сумма площадей проекций конических поверхностей на плоскость, перпендикулярную оси ракеты, равна S_M — площади мидаля ракеты, полная поперечная аэродинамическая сила для корпуса ракеты

$$Y_1 = 3\alpha q S_M + 1,5\alpha^2 q \sum_i \lambda_i S_{Mi}.$$

Для двухступенчатой ракеты (рис. 10.6)

$$Y_{1I} = \frac{3\pi}{4} \alpha q d_1^2; \quad Y_{1II} = \frac{3\pi}{4} \alpha q (d_2^2 - d_1^2); \quad Y_{1III} = \frac{3\pi}{4} \alpha q (d_3^2 - d_2^2).$$

Погонные нагрузки на цилиндрических участках корпуса ракеты

$$q_1 = \frac{3\pi}{8} \alpha^2 q d_1; \quad q_2 = \frac{3\pi}{8} \alpha^2 q d_2.$$

Силы Y_{1i} к коническим отсекам прикладываются в точках, соответствующих центрам тяжести проекций поверхностей этих отсеков на плоскость, проходящую через продольную ось корпуса.

По теории Ньютона значение лобового сопротивления получается заниженным. Более точная формула для конуса имеет вид [17]

$$C_x = (1,56 + 1,96/Ma^2) \beta^{1,7}. \quad (10.17)$$

Соответственно лобовое сопротивление каждого конического отсека корпуса можно определить по формуле

$$X_i = (1,56 + 1,96/Ma^2) \beta_i^{1,7} \cdot q S_{Mi}, \quad (10.18)$$

где S_{Mi} , как и раньше, — площадь проекции поверхности конического отсека на плоскость, перпендикулярную оси ракеты.

Полное лобовое сопротивление конических поверхностей корпуса ракеты от давления определяется суммированием составляющих X_i , найденных по формуле (10.18).

Лобовое сопротивление корпуса $X_{тр}$, вызванное аэродинамическими силами трения, можно приближенно оценить, приняв его в размере 20 ... 40% от всего лобового сопротивления.

Хотя полученные формулы для аэродинамических нагрузок и являются приближенными, однако это не вызывает значительных погрешностей при определении напряжений в корпусе ракеты. Как уже отмечалось в предыдущем параграфе, основной нагрузкой, определяющей прочность ракеты, является сила тяги. Максимальные сжимающие силы в данном сечении корпуса в основном определяются осевыми силами инерции масс, лежащих впереди этого сечения, и внутренним давлением наддува (для баков). Изгибающие моменты, вызванные поперечными аэродинамическими силами, относительно невелики. Максимальные напряжения от этих моментов, как правило, меньше напряжений от осевого сжатия. Поэтому вполне допустимо уточненные расчеты аэродинамических нагрузок отнести к проверочным расчетам, когда уже бывают известны результаты продувок моделей.

Уравновешивание ракеты при полете на активном участке. Для расчета необходимо знать значения поперечных управляющих сил и сил инерции от поступательного и вращательного движения. Поперечная управляющая сила обычно определяется работой автомата стабилизации. Ее значение складывается из программной силы, заданной траектории полета, и дополнительной управляющей силы при стабилизации возмущенного движения. Для прочности ракеты наиболее важно значение управляющей силы при действии на корпус ракеты ветра. Программная управляющая сила обычно невелика и в ориентировочных расчетах на прочность ее можно не учитывать. Рассмотрим качественную сторону явлений, происходящих при воздействии ветра на ракету.

Для простоты будем считать, что начальное невозмущенное движение ракеты соответствует вертикальному полету с нулевым углом атаки. Составим приближенные уравнения возмущенного движения ракеты как твердого тела при действии ветра. Пусть в момент времени t поперечная скорость центра масс ракеты равна v_y и угол поворота равен ϑ . Если считать эти величины малыми, угол атаки получим в виде (рис. 10.7, а):

$$\alpha = \frac{u - v_y}{v} - \vartheta. \quad (10.19)$$

Аэродинамические силы в осях x_1, y_1 , связанных с корпусом,

$$X_1 = C_{x_1} q S_M; \quad Y_1 = C_{y_1}^\alpha \alpha q S_M. \quad (10.20)$$

Сила Y_1 приложена на расстоянии x_d от передней точки ракеты. Управляющая сила Y_p приложена на расстоянии x_p от той же точки (рис. 10.7, б). Тяга двигателей F направлена по оси ракеты. Из урав-

нений проекций всех сил, на ось y , если считать $\cos \vartheta \approx 1$, $\sin \vartheta \approx \vartheta$, получаем (рис. 10.7, в):

$$m \frac{dv_y}{dt} = Y_1 + X_1 \vartheta - F \vartheta - Y_p. \quad (10.21)$$

Составляя уравнение моментов относительно центра масс O и пренебрегая демпфирующим моментом, находим

$$J \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = Y_1 (x_D - x_T) - Y_p (x_p - x_T). \quad (10.22)$$

В уравнениях (10.21) и (10.22) m — масса и J — массовый момент инерции ракеты как твердого тела; x_T — координата центра тяжести. К этим уравнениям следует добавить уравнение автомата стабилизации, в простейшем случае имеющим, например, следующий вид:

$$\delta + k_1 \delta' = k_2 \vartheta, \quad (10.23)$$

где δ — угол отклонения газового руля или поворотного двигателя; δ' — его производная по времени; k_1 , k_2 — характеристики автомата стабилизации (коэффициент k_1 характеризует запаздывание автомата).

Управляющая сила Y_p связана с углом δ зависимостью

$$Y_p = A \delta, \quad (10.24)$$

где A — коэффициент, учитывающий эффективность органа управления.

Система уравнений (10.19) ... (10.24) позволяет найти все характеристики возмущенного движения, если задана скорость u бокового ветра. Чтобы строго определить управляющую силу и расчетный угол атаки, необходимо исследовать весь переходный процесс, когда величины v_y , ϑ , δ изменяются по времени. Для статически устойчивой ракеты максимальное значение силы Y_1 соответствует начальному мо-

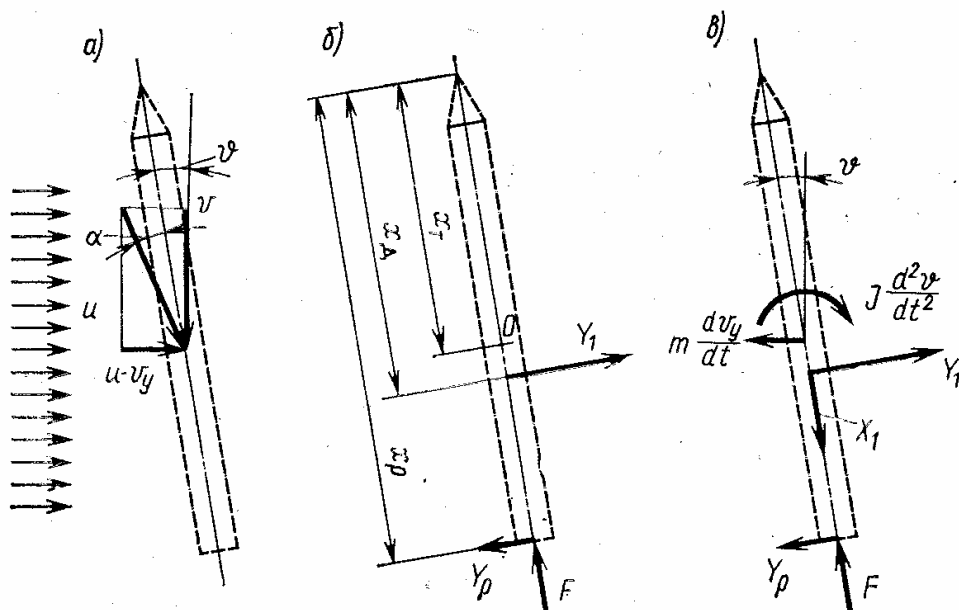


Рис. 10.7

менту действия бокового ветра, когда $\alpha = \alpha_B = u/v$. При дальнейшем движении ракеты угол атаки будет уменьшаться, так как ракета будет поворачиваться в направлении уменьшения угла атаки. Это заключение верно, только если скорость ветра не увеличивается в процессе движения ракеты. Для *статически неустойчивой ракеты* углы атаки в переходном процессе могут оказаться больше, чем α_B . Поэтому при проектировании ракеты желательно избегать значительной статической неустойчивости, особенно при режимах полета, когда скоростной напор близок к максимальному.

Достаточно точно значение управляющей силы Y_p можно определить, только решив уравнения возмущенного движения с учетом работы автомата стабилизации. В начальной стадии проектирования такие расчеты не всегда можно выполнить. В этих случаях можно воспользоваться приближенным приемом, основанным на рассмотрении двух крайних случаев работы автомата стабилизации. В первом случае принимают запаздывание автомата настолько большим, что угол отклонения управляющего органа $\delta = 0$ и соответственно $Y_p = 0$. Тогда из уравнения (10.22) определяем угловое ускорение

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{Y_1}{J} (x_d - x_T). \quad (10.25)$$

Во втором случае считают автомат стабилизации обрабатывающим управляющую силу Y_p так, что угловое ускорение ракеты $d^2\theta/dt^2 = 0$. Тогда из уравнения (10.22)

$$Y_p = Y_1 (x_d - x_T)/(x_p - x_T). \quad (10.26)$$

В обоих случаях силу Y_1 определяют при угле атаки $\alpha_B = u/v$. Зная значения поперечной силы Y_1 и управляющей силы Y_p , можно определить поперечные перегрузки в каждом сечении корпуса. В первом случае, когда $Y_p = 0$, и аэродинамический момент уравновешивается силами инерции, поперечная перегрузка в сечении x_1

$$n_{y_1} = \frac{Y_1}{mg} + \frac{Y_1(x_d - x_T)}{gJ} (x_1 - x_T), \quad (10.27)$$

где m — масса ракеты; J — массовый момент инерции ракеты; g — ускорение свободного падения у поверхности земли.

Во втором случае, когда угловое ускорение равно нулю, перегрузка во всех сечениях одинакова:

$$n_{y_1} = \frac{Y_1 - Y_p}{mg} = \frac{Y_1}{mg} \left(1 - \frac{x_d - x_T}{x_p - x_T} \right). \quad (10.28)$$

Последними уравнениями определяются перегрузки для ракеты как для недеформируемого твердого тела. В динамических расчетах с учетом упругости корпуса ракеты эти перегрузки соответствуют двум первым формам собственных колебаний с нулевой частотой

§ 10.3. Внутренние силы в корпусе ракеты

Корпус ракеты представляет собой тонкостенную оболочку вращения, силы в каждом ее поперечном сечении могут быть сведены к нормальной (осевой) силе N , перерезывающей силе Q и изгибающему моменту M (рис. 10.8). Для выбора

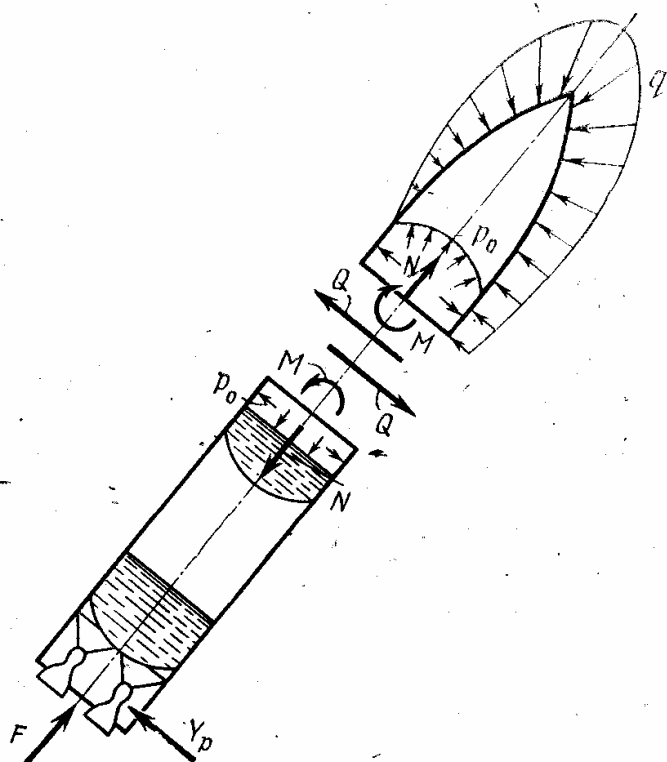


Рис. 10.8

расчетных случаев и проведения расчетов на прочность необходимо построить эпюры нормальных, перерезывающих сил и изгибающих моментов по длине корпуса ракеты.

Нормальные силы. Исходными данными для построения эпюры нормальных сил являются: тяга двигательной установки F , аэродинамическая осевая сила X и ее распределение $q_x(x)$ по длине, масса ракеты m и ее распределение $m_x(x)$ по длине, давление наддува p_0 в баках (рис. 10.8). Все эти силы и масса меняются при движении ракеты. В дальнейшем при построении эпюр их считают неизменными и относят к определенно-

му, фиксированному моменту времени. Погонная масса $m_x(x)$ и аэродинамическая нагрузка $q_x(x)$ связаны с суммарными значениями m и X соотношениями

$$m = \int_0^l m_x(x) dx; \quad X = \int_0^l q_x(x) dx, \quad (10.29)$$

где l — длина ракеты. (Аэродинамические силы X и Y в настоящем параграфе соответствуют силам в связанной системе координат.) Индексы, принятые для этих сил в § 10.2, здесь опущены.

При действии внешних сил F и X каждый элемент массы испытывает перегрузку n_x в осевом направлении, которую определяют по формуле (10.4). Нормальная сила в сечениях корпуса состоит из сжимающей силы N_1 от внешних и инерционных нагрузок и растягивающей силы N_p от наддува баков. В сечении с координатой x

$$N_1 = -gn_x \int_0^x m_x(x) dx - \int_0^x q_x(x) dx. \quad (10.30)$$

(Координату x отсчитывают от условной точки пересечения теоретического контура обвода головной части с осью x .) Если тяга F двигательной установки приложена к корпусу в сечении x_0 , то при $x > x_0$ нормальная сила

$$N_1 = -gn_x \int_0^x m_x(x) dx - \int_0^x q_x(x) dx + F, \quad (10.31)$$

т. е. в сечении $x = x_0$ осевая сила изменяется скачком на значение F ; при $0 < x < x_0$ сила N_1 , определяемая выражением (10.30), — сжимающая, при $x > x_0$ в соответствии с выражением (10.31) сила N_1 — растягивающая. Проведя интегрирование уравнения (10.31) по всей длине ракеты и воспользовавшись уравнениями (10.29), получим зависимость (10.4) для перегрузки n_x .

Зависимости $m_x(x)$, $q_x(x)$, стоящие под интегралами в уравнениях (10.30), (10.31), обычно задают в виде графиков или таблиц, поэтому получить аналитические выражения для силы $N(x)$ не удастся. Приходится прибегать к численному интегрированию. В начале расчета корпус разбивают по длине на определенное количество участков $n = 20 \dots 50$. Соответствующим сечениям присваиваются номера $0, 1, 2, \dots, n$. К этим сечениям приводят аэродинамические и массовые силы так, чтобы сохранилось положение центра тяжести и центра давления для всей ракеты. При этом следует учитывать конкретный способ приложения внешних и массовых сил к корпусу.

Тяга двигательной установки воспринимается корпусом в сечении ее крепления к двигательному отсеку. Аэродинамические силы представляют собой распределенную по длине корпуса нагрузку; управляющие силы приложены к оси вращения руля. Инерционные силы пропорциональны массам оболочки корпуса, агрегатов и жидкого наполнения. Масса оболочки считается распределенной по длине. Силы инерции от массы агрегатов приложены в точках крепления этих агрегатов к корпусу. Силы инерции масс топлива воспринимаются днищами баков и переходят на корпус в местах крепления днищ.

Давление наддува создает разгружающую осевую силу N_p , действующую на участке обечайки бака между передним и задним днищами. Для цилиндрического бака $N_p = p_0 \pi R^2$, для конического несущего участка $N_p = p_0 \pi r^2$, где R — радиус цилиндра; r — текущий радиус окружности сечения конуса.

Распределенные и сосредоточенные внешние и массовые силы приводят к выбранным сечениям корпуса ракеты. Для этого сосредоточенные нагрузки распределяют на два соседних сечения обратно пропорционально плечам:

$$F_{pj} = Fa_{j-1}/\Delta; \quad F_{p,j-1} = Fa_j/\Delta,$$

где F — сосредоточенная сила на j -м участке; Δ — длина участка; a_{j-1} и a_j — расстояния от точки приложения силы до сечений $j-1$ и j . Распределенную нагрузку q на j -м участке заменяют двумя сосредоточенными силами

$$F_{qj} = \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} qxdx; \quad F_{q,j-1} = \int_0^{\Delta} qdx - F_{qj}.$$

Эти соотношения справедливы и для продольных, и для поперечных сил.

Распределив для каждого j -го участка отдельно аэродинамические, массовые и управляющие силы, сложив j -е значения сил соседних участков, приходящиеся на одно сечение, получают последовательности сосредоточенных массовых сил $F_{m0}, F_{m1}, F_{m2}, \dots, F_{mj}, \dots, \dots, F_{mn}$ и аэродинамических осевых сил: $F_{x0}, F_{x1}, F_{x2}, \dots, F_{xj}, \dots, \dots, F_{xn}$. Чтобы соблюдались последние уравнения, силы F_{mj} должны в сумме давать вес ракеты. Соответственно силы F_{xj} в сумме должны быть равны аэродинамической осевой силе X .

Далее нужно просуммировать полученные силы для каждого i -го сечения корпуса. Нормальные силы в соответствии с формулой (10.30) определяются зависимостью

$$N_{1i} = - \sum_{j=0}^i F_{mj} - \sum_{j=0}^i F_{xj}. \quad (10.32)$$

На участке бакового отсека из этих сил следует вычесть силу N_p от давления наддува.

В сечениях $j \geq r$, где приложена сила тяги F , нормальная сила определяется по формуле (10.31):

$$N_{1i} = - \sum_{j=0}^i F_{mj} - \sum_{j=0}^i F_{xj} + F. \quad (10.33)$$

Построение эпюр осевых сил для корпуса ракеты по зависимостям (10.32), (10.33) обычно ведут численно.

Перерезывающие силы и изгибающие моменты. Для построения этих эпюр кроме закона распределения масс $m_x(x)$ по длине ракеты необходимо знать поперечную силу Y и ее распределение $q_y(x)$, управляющую силу Y_p и значение поперечной перегрузки n_y (рис. 10.8).

Перерезывающую силу в любом сечении x корпуса при $n_y = \text{const}$ можно найти по зависимости

$$Q = -gn_y \int_0^x m_x(x) dx + \int_0^x q_y(x) dx. \quad (10.34)$$

В тех случаях, когда следует учитывать вращательную перегрузку, суммарное значение n_y должно стоять под знаком интеграла.

Соотношение (10.34) справедливо во всех сечениях от 0 до x_0 , где приложена управляющая сила. При $x > x_0$ перерезывающая сила определяется уравнением

$$Q = -g \int_0^x n_y m_x(x) dx + \int_0^x q_y(x) dx - Y_p. \quad (10.35)$$

В полете на торце корпуса при $x = l$ сила $Q = 0$.

Изгибающий момент по длине корпуса для сечений $x < x_0$ определяется из соотношения

$$M = \int_0^x Q dx. \quad (10.36)$$

Если в сечении с координатой $x = x_0$ приложен сосредоточенный изгибающий момент M_0 , то для $x > x_0$

$$M = \int_{x_0}^x Q dx + M_0. \quad (10.37)$$

Если в последующих сечениях корпуса $x_1; x_2, \dots$ приложены сосредоточенные моменты, то их следует добавить в правую часть последнего уравнения для участков $x_1 < x < x_2$ и т. д. Эпюры изгибающих моментов и перерезывающих сил, так же как и рассмотренные ранее эпюры осевой силы N , строят по данным численных расчетов. Численному интегрированию уравнений (10.34) и (10.36) должно предшествовать распределение сил инерции и аэродинамических сил по участкам интегрирования. При расчете поперечных сил инерции от жидкости считается, что зеркало жидкости нормально к оси ракеты, так как осевая перегрузка существенно больше поперечной на всем участке активного полета. Силы инерции жидкости по длине от зеркала до днища считаются распределенными равномерно. Поперечные силы инерции от агрегатов воспринимаются корпусом в узлах их крепления. Для консолюльно закрепленных элементов, например, таких, как ЖРД, при действии поперечной перегрузки необходимо учитывать в местах крепления не только силу, но и сосредоточенный момент. Сосредоточенный момент M_0 распределяется в соседних j -м и $j - 1$ -м сечениях согласно зависимостям

$$M_j = M_0 a_{j-1} / \Delta; \quad M_{j-1} = M_0 a_j / \Delta.$$

Суммируя j -е силы соседних участков, получаем последовательности F_{mj} сосредоточенных массовых сил, F_{yj} составляющих поперечной нагрузки, F_{rj} сил от управляющих органов. Сумма всех элементарных массовых сил должна равняться весу ракеты, а точка приложения равнодействующей должна совпадать с центром тяжести x_T изделия.

Соответственно силы F_{yj} в сумме должны быть равны поперечной нагрузке Y , а точка приложения их равнодействующей должна совпадать с центром давления ракеты. Чтобы найти значения перерезывающей силы и изгибающего момента, нужно теперь просуммировать полученные j -е усилия. Перерезывающая сила в i -м сечении

$$Q_i = - \sum_{j=0}^i n_{yj} F_{mj} + \sum_{j=0}^i F_{yj} - \sum_{j=0}^i F_{rj},$$

а изгибающий момент

$$M_i = \Delta \sum_{j=0}^i Q_j + \sum_{j=0}^i M_{rj}.$$

На рис. 10.9 приведены типичные эпюры N, M для двухступенчатой ракеты.

Выше рассмотрены особенности определения внутренних усилий в корпусе ракеты схемы «тандем». Прежде чем строить эпюру $N(x)$,

$Q(x)$, $M(x)$ для ракеты схемы «пакет», надо провести расчеты по определению реакций в связях ступеней. При статически определенном креплении ступеней реакции связей определить нетрудно, каждую ступень при этом считают абсолютно жестким телом.

Например, соединения ступеней ракеты «Титан-3С» статически определимы. Осевая сила ускорителя первой ступени на корпусе второй ступени воспринимается продольными лонжеронами. Эксцентриситет

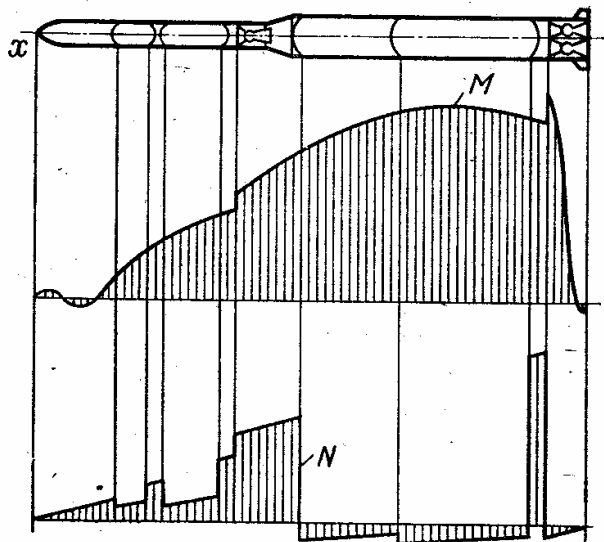


Рис. 10.9

тяги и лобовой силы дает радиальные составляющие на корпус, воспринимаемые в двух сечениях.

Если по длине ракеты осевая сила воспринимается в двух и более сечениях или число радиальных связей больше двух, то такая система статически неопределима. Трудности вычисления реакций существенно возрастают. В этом случае корпус рассматривают как оболочку, подкрепленную реальными усиливающими элементами (шпангоутами, лонжеронами). Необходимо учитывать дефор-

мации как всего корпуса, так и отдельных его элементов, соединяющих ускорители с ракетой.

После определения реакций связей расчет внутренних усилий проводят отдельно для каждого элемента пакета. Реакции связей при этом считают внешними силами, и эпюры строят в той же последовательности, что и для схемы «тандем».

§ 10.4. Испытания конструкций

При создании конструкций сухих отсеков, баков и отдельных узлов ракеты наряду с теоретическими расчетами проводят механические испытания. Они включают в себя широкий круг статических и динамических лабораторных экспериментов над элементами конструкций, агрегатами, отсеками и блоками отсеков.

На первых стадиях проектирования проводят статические и динамические испытания моделей конструкции и ее отдельных элементов. При этом уточняют методику расчета, обосновывают выбор наиболее рационального варианта и схемы конструкции, например, уточняют коэффициенты местной потери устойчивости панели обшивки сухого подкрепленного отсека, критические напряжения оболочки бака, нагруженного осевой сжимающей силой и внутренним давлением, определяют разрушающие силы в стыковых соединениях и других элементах, плохо поддающихся расчету.

Следует иметь в виду, что к испытаниям конструкции на моделях нужно относиться осторожно. До сих пор еще не удалось добиться подобия конструкции модели при анализе устойчивости тонких оболочек, поэтому значения разрушающих сил при этом обычно определяют на натуральных образцах.

Этот этап разработки конструкции весьма трудоемок, и вместе с тем имеет определенную исследовательскую направленность. Сочетание теоретического анализа с экспериментом позволяет обоснованно подойти к выбору рациональной схемы и материала конструкции.

Первый опытный образец новой конструкции обязательно должен пройти статические испытания. Статические испытания отдельных отсеков и всей силовой конструкции являются проверкой расчета на прочность. С их помощью устанавливают соответствие расчетной и фактической разрушающей нагрузок, т. е. коэффициент, определяющий точность расчета $n = F_{ф.разр}/F_{р.разр}$. Как уже отмечалось в § 10.1, для правильно спроектированной конструкции этот коэффициент должен быть близок к единице.

При статических испытаниях конструкцию нагружают наибольшими силами каждого расчетного случая. Добиться полного воспроизведения в лабораторных условиях полетной нагрузки не всегда удается. Дело в том, что распределенные составляющие внешних сил от аэродинамического давления и сил инерции при испытаниях прикладывают в виде локальных сил, передаваемых через лямки из ткани приклеиваемые к поверхности. Чтобы при испытаниях получить такие же внешние силы, что и при расчете, необходимо лямки ставить очень часто, что значительно затрудняет эксперимент. Сложная рычажная система, объединяющая лямки, передает нагрузку от гидравлических или электрических силовозбудителей на корпус.

Нагружение корпуса ракеты осевой сжимающей силой соответствует обычно наиболее важным расчетным случаям. При переменной вдоль оси силе к верхнему торцу отсека прикладывается сила с помощью пресса, а ряды лямок создают дополнительную нагрузку. Обычно удается получить эпюры в виде ломанной линии, приближенно реализующей нагрузку. При испытании необходимо следить за поведением обшивки и подкрепляющих элементов. Наклеенные лямки существенно затрудняют наблюдения. Поэтому иногда, особенно для коротких отсеков, переменную вдоль оси силу заменяют постоянной. Испытания при этом можно проводить на мощных прессах или с помощью специальных приспособлений.

Имитация поперечной распределенной нагрузки осуществляется также с помощью лямок. Отдельные отсеки при испытаниях, как правило, закрепляют консольно на силовой колонне. Нагрузку прикладывают в нескольких сечениях. Испытания всей конструкции на изгиб проводят, нагружая корпус самоуравновешенной системой внешних сил, имитирующей эпюру изгибающих моментов определенного расчетного случая.

Если необходимо нагрузить отсек или его часть внешним давлением, удобно применять мягкие торообразные емкости, опоясывающие отсеки. Подачей давления в емкости создают распределенную нагруз-

ку на отсек. Чтобы имитировать небольшие внешние распределенные силы (давление) на отдельных участках, используется нагружение с помощью мешочков с дробью.

При статических испытаниях нагружение проводят до эксплуатационного и разрушающего значений нагрузки. Прежде всего испытывают отсеки и всю натурную конструкцию при эксплуатационной нагрузке во всех расчетных случаях. Увеличение нагрузки после «обтяжки», составляющей 30...40 % от расчетного значения, ведут через каждые 10 %. При большом числе силовозбудителей применяют автоматические программные устройства. По достижении эксплуатационного значения нагрузку снимают. После этого отмечают наличие остаточных деформаций, разрушение крепежных элементов, местную потерю устойчивости обшивки.

Таким же образом проводят испытания по определению разрушающей нагрузки. Это наиболее сложный этап эксперимента. Он сопровождается вначале местными разрушениями, а затем полным исчерпанием несущей способности конструкции. На каждом этапе нагружения определяют напряжения и форму деформирования конструкции. Напряженное состояние в наиболее ответственных элементах определяют с помощью тензодатчиков. Измерение геометрии при нагружении регистрируют обычно оптическими устройствами.

В связи с тем что на различных участках полета и наземной эксплуатации на ракету действуют силы, меняющиеся во времени, испытания опытных образцов включают в себя эксперименты при динамической нагрузке. Это касается прежде всего случаев старта, разделения ступеней, транспортировки на земле отдельных агрегатов и блоков. Проводят испытания как натуральных конструкций, так и динамически подобных моделей. Проверяют не только работу механических систем (замков, разъемных соединений и др.), но и прочность отдельных элементов конструкции при динамическом нагружении.

Важной частью динамических испытаний являются эксперименты по определению частот и форм свободных колебаний, а также коэффициентов демпфирования. Результаты этих испытаний позволяют более обоснованно подходить к расчету конструкции при динамических нагрузках. С помощью оптических или электрических датчиков в ряде сечений фиксируются амплитуды, которые позволяют построить формы колебаний при этой частоте. Эксперименты многократно повторяют при широком спектре частот возбуждения.

Отдельные элементы конструкции в полете испытывают не только механическое, но и тепловое воздействие. Испытания конструкции при совместном нагружении внешними силами и нагреве — наиболее сложная часть экспериментальных работ. Для этого строят специальные приспособления и стенды, имитирующие нагружение конструкции. Результаты экспериментов позволяют уточнить расчетные методики.

Глава 11

РАСЧЕТ БАКОВ

При расчете баков ракет широко используются результаты экспериментальных исследований. Это касается прежде всего расчетов на устойчивость. Критические напряжения потери устойчивости тонкостенных элементов определяют преимущественно опытным путем. В этой главе рассмотрена приближенная методика расчета на устойчивость основного силового элемента конструкции — цилиндрических обечаек несущих баков. Учитывается влияние внутреннего давления, неравномерности распределения напряжений по сечению. Используются данные экспериментов, служащие для уточнения теоретических формул. Приведена последовательность определения численных значений критических нагрузок для различных подкрепленных и неподкрепленных конструкций баков. Рассмотрены расчеты на прочность цилиндрических обечаек и днищ разной формы, а также сфероидальных и торообразных баков.

§ 11.1. Конструктивные схемы и нагрузки

Исходными данными для расчетов на прочность баков являются внешние нагрузки и температурное состояние конструкции.

Баки в различных расчетных случаях нагружены: 1) давлением наддува p_0 ; 2) давлением столба жидкости $n_x \gamma H$, где n_x — осевая перегрузка; H и γ — соответственно высота столба и удельный вес жидкости; 3) силами реакции соседних отсеков.

В поперечном сечении бака действуют изгибающий момент M , осевая сжимающая сила N и перерезывающая сила Q .

От внутреннего давления

$$p = p_0 + n_x \gamma H, \quad (11.1)$$

момента M и сил N и Q в обечайке бака возникают меридиональные T_1 , окружные T_2 и сдвигающие S погонные силы. Их наибольшие значения равны

$$T_1 = - [N / (2\pi R) \pm M / (\pi R^2) - p_0 R / 2]; \quad (11.2)$$

$$T_2 = (p_0 + n_x \gamma H) R; \quad (11.3)$$

$$S = Q / (\pi R). \quad (11.4)$$

Положительные значения сил T_1 и T_2 соответствуют растягивающим напряжениям.

Сдвигающая сила S в расчетах на прочность баков является менее важным фактором. Значения сил T_1 и T_2 в первую очередь определяет выбор того или иного конструктивного варианта бака и, как показывают соотношения (11.2) и (11.3), зависят от давления наддува p_0 .

При малых значениях давления наддува меридиональная сила T_1 , возникающая в обечайке корпуса бака, оказывается сжимающей. Сжатая в осевом направлении обечайка может потерять устойчивость. Напряжения, при которых происходит потеря устойчивости обечайки

гладкого бака, весьма невелики. Для повышения устойчивости обечайки можно применить панели стрингерной или вафельной конструкции. Другой путь — увеличение давления наддува p_0 в баке. Большие давления p_0 приводят к растяжению обечайки вдоль образующей. При этом окружные силы T_2 по формуле (11.3) оказываются большими. При больших окружных растягивающих усилиях баки целесообразно выполнять из высокопрочных материалов. Отсутствие осевого сжатия позволяет делать обечайки неподкрепленными. Давление наддува в них обычно выбирают так, чтобы в осевом направлении не возникали сжимающие напряжения от силы N и момента M :

$$\frac{p_0 R}{2} \geq \left| \frac{N}{2\pi R} \right| + \left| \frac{M}{\pi R^2} \right|.$$

Суммарные осевые напряжения при этом сравнительно невелики. Однако внутреннее давление создает большие окружные напряжения

$$\sigma_2 = (p_0 + n_x \gamma H) \frac{R}{h},$$

которые оказываются расчетными (R — радиус обечайки бака; h — толщина стенки).

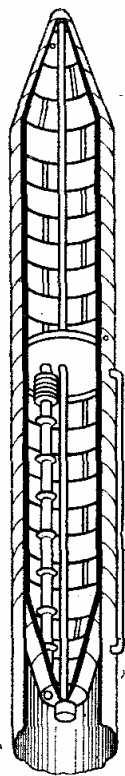


Рис. 11.1

Примером баков гладкой конструкции могут служить баки ракеты «Атлас» (рис. 11.1). Баки горючего (керосин) и окислителя (жидкий кислород) представляют собой единый блок длиной около 18 м и диаметром 3 м. В середине блока имеется полусферическая перегородка — днище, разделяющая емкости для горючего и окислителя. Обечайка бака изготовлена из 23 отдельных секций. Материал обечайки — нержавеющая холоднокатаная сталь с пределом прочности $\sigma_B = 1400$ МПа и пределом текучести $\sigma_T = 1120$ МПа. Толщина стенок переменная: в передней части $h = 0,25$ мм; у заднего днища $h = 1,1$ мм. Во время всего периода эксплуатации, начиная с изготовления, в баках поддерживается избыточное давление $p_0 = 0,07$ МПа для предотвращения потери устойчивости тонкостенной обечайки. Во время полета ракеты давление наддува в баке горючего $p_0 = 0,42$ МПа, в баке окислителя $p_0 = 0,18$ МПа.

Днища бака изготовлены сваркой секций из листов той же нержавеющей стали. Нижнее днище заднего бака и верхнее днище переднего имеют конусообразную форму.

Диаметр (3 м) и толщины стенок (0,25 мм) обечаек баков этого типа таковы, что конструкция практически не может работать на сжатие. Секции бака не способны воспринимать сжимающее напряжение выше 20 МПа, что соответствует осевой силе $N_1 = 48$ кН. Давление наддува $p_0 = 0,18$ МПа создает осевую растягивающую силу $N_p = 1300$ кН.

Гладкие баки из высокопрочных материалов рассчитывают только на внутреннее давление, значение которого может существенно меняться по длине бака. Поэтому толщина обечайки у переднего днища отличается от толщины у заднего днища в несколько раз.

При относительно небольших значениях внутреннего давления бак может быть выполнен из листового алюминиевого сплава. Окружные напряжения здесь существенно меньше. Обечайка сжата в осевом на-

правлении. Расчет ведут в основном на устойчивость как сжатых цилиндрических оболочек с учетом внутреннего давления. Потеря устойчивости может происходить как в упругой, так и в пластической области работы материала.

На участке активного полета ракеты в атмосфере часть бака над зеркалом жидкости испытывает интенсивный аэродинамический нагрев. Механические характеристики материала обечайки при этом значительно снижаются. Расчет на прочность должен проводиться с учетом влияния температуры.

Гладкие баки из листового алюминиевого сплава применяются на ракетах «Юпитер», «Редстоун» и др. Цилиндрические участки баков состоят из нескольких секций. Днища представляют собой сегменты сферы и соединены с цилиндрической обечайкой через переходное кольцо.

Для повышения напряжений, вызывающих потерю устойчивости бака от осевого сжатия, обечайку подкрепляют продольными и поперечными элементами. Такие баки называют **стрингерными**. Обечайки стрингерных баков сжаты вдоль образующей. Давление наддува здесь сравнительно невелико. Осевая сжимающая сила по длине бака практически не меняется. При работе на сжатие все сечения равноопасны с точки зрения потери устойчивости. Поэтому такие баки часто выполняют из панелей со слабо изменяющимся сечением.

Примером стрингерной конструкции служит бак жидкого водорода сбрасываемой топливной ступени транспортного корабля «Спейс Шаттл» (рис. 11.2). Цилиндрический отсек диаметром 8,4 м и длиной 23,5 м собран из четырех цилиндрических секций, каждая из которых сварена из восьми алюминиевых панелей. Каждая секция имеет 96 монолитных продольных стрингеров. Поперечными элементами жесткости являются тринадцать промежуточных шпангоутов Z-образного сечения.

Для цилиндрических баков ракет больших диаметров, работающих при небольшом давлении наддува, целесообразно применять так называемую **вафельную** конструкцию. Обечайки бака можно изготавливать из плит алюминиевого сплава. В процессе химического фрезерования ячеек прямоугольной или ромбовидной формы часть материала удаляется. Остающиеся часто расположенные ребра делают оболочку анизотропной. Обечайку рассчитывают на устойчивость как цилиндрическую конструктивно-анизотропную оболочку, нагруженную осевым сжимающим усилием и внутренним давлением. Значение

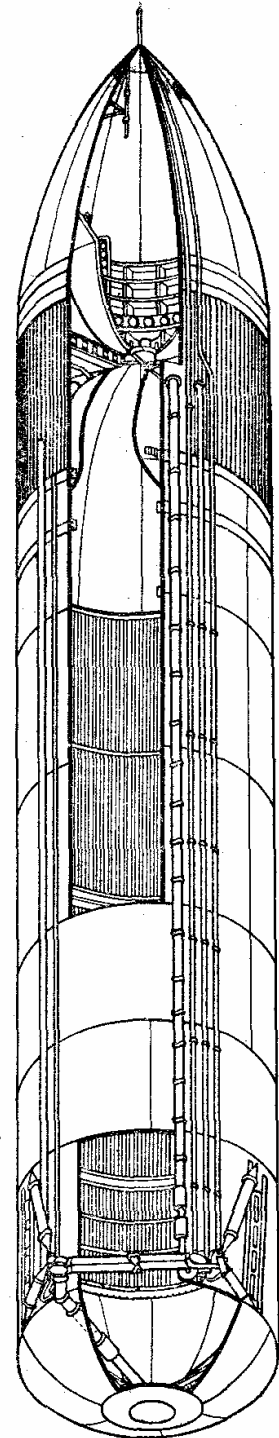


Рис. 11.2

критического напряжения в оболочке зависит, в первую очередь, от изгибной жесткости продольных ребер и жесткости на растяжение окружных ребер.

Баки вафельной конструкции применены в ракетах «Сатурн», «Тор» и др. В ракете «Сатурн» самые большие баки — баки ускорителя первой ступени S-1С. Диаметр баков составляет 10 м. Изготовлены они из свариваемого, обладающего высокой удельной прочностью при низких температурах и не имеющего склонности к хрупкому разрушению алюминиевого сплава. Передний бак состоит из двух кольцевых секций, каждая секция — из четырех листов. Обечайка другого варианта бака состоит из листов вафельной конструкции с усиливающими ребрами в продольном и поперечном направлениях. Ребра высотой 50 мм образуют квадратные клетки при толщине оболочки 4,6 мм. Полусферические днища баков высотой 3700 мм изготовлены из того же материала.

Передний бак горючего третьей ступени ракеты «Сатурн-5» — вафельной конструкции, с ячейками ромбовидной формы. Бак окислителя — чечевицеобразной формы, собранный из двух полусферических днищ. Соединение днищ друг с другом и с обечайкой осуществляется через прессованный шпангоут таврового сечения. Верхнее днище — трехслойное: внешние слои, в виде тонколистовых полусфер, соединены через промежуточный сотовый слой из стеклопластика, играющий также роль теплоизолятора.

Рассмотренные баки выполнены по так называемой несущей схеме. Их особенность состоит в том, что обечайка бака является одновременно и корпусом ракеты, воспринимающим осевое сжатие и изгиб.

Баки, расположенные внутри корпуса, воспринимающего внешние нагрузки, называют *подвесными*. На бак действуют лишь внутреннее давление и местные силы, передаваемые узлами крепления. При известном давлении наддува, осевой силе и изгибающем моменте погонные силы T_1 и T_2 в обечайке подвесного бака определяются по зависимостям (11.2), (11.3).

В некоторых новых конструкциях ракет встречаются баки сложной конфигурации: сфероидальные, торообразные. Расчет подобных баков на прочность проводится в основном на расчетный случай максимального внутреннего давления.

Например, в изображенном на рис. 11.2 топливном отсеке транспортного корабля «Спейс Шаттл» передний бак окислителя имеет сфероидальную форму. Оживальная головная часть соединяется с небольшой цилиндрической секцией и нижним эллипсоидальным днищем. Максимальный диаметр бака 8,4 м, толщина листов из алюминиевого сплава переменная вдоль образующей, достигающая в самой тонкой части 3,7 мм.

§ 11.2. Гладкие баки

Основные элементы баков гладкой конструкции — цилиндрические и слабokonические обечайки — состоят из листов или панелей, имеющих постоянную или переменную толщину вдоль образующей. Расчет обечайки бака ведут на *прочность* от действия внутреннего давления и на *устойчивость* от осевых сжимающих сил с учетом внутреннего давления.

Расчет на прочность. Погонные силы в обечайке бака находят по формулам (11.2) ... (11.4). При расчете определяющей является окружная сила T_2 , зависящая от внутреннего давления p .

Перед расчетом на прочность бака определяют расчетные случаи для различных его сечений. В связи с тем что в процессе полета ракеты осевая перегрузка n_x возрастает, а высота столба жидкости H падает, для различных сечений бака следует найти зависимость давления от времени и определить максимальное значение p по формуле (11.1). Так, при постоянном давлении наддува p_0 величина p_{max} будет приходиться на момент, когда произведение $n_x H$ достигнет максимального значения. Этот момент времени и будет соответствовать расчетному случаю для каждого сечения обечайки. По зависимостям (11.2) и (11.3) в расчетных случаях определяют меридиональные T_1 и окружные T_2 силы.

Возможны два вида напряженного состояния обечайки бака: 1) окружная T_2 и меридиональная T_1 силы — растягивающие (этот случай характерен для такого нагружения баков, когда абсолютные значения первых двух слагаемых правой части формулы (11.2) меньше третьего слагаемого); 2) окружная сила T_2 растягивающая, а меридиональная сила T_1 — сжимающая. В обоих случаях меридиональная сила, как правило, по модулю существенно меньше окружной.

При $T_2 > 0$ и $T_1 > 0$ расчет баков на прочность ведут только от окружных усилий. В проектировочном расчете из условия прочности обечайки в окружном направлении определяют ее толщину, в проверочном — при известной толщине определяют расчетные напряжения σ_p . Эти напряжения должны быть меньше предела прочности материала

$$\sigma_p = \frac{T_2}{h} f \leq \sigma_B. \quad (11.5)$$

Если баки сжаты в осевом направлении ($T_2 > 0$; $T_1 < 0$), то для каждой комбинации сил T_2 и T_1 в различных сечениях определяют эквивалентные напряжения:

$$\sigma_s = (T_2 - T_1) / h, \quad (11.6)$$

а расчетные напряжения находят по формуле $\sigma_p = f \sigma_s$. С учетом знака суммарные напряжения здесь будут больше, чем соответствующие окружные. Полученные напряжения при этом должны удовлетворять условию прочности $\sigma_p \leq \sigma_B$.

Пример. Требуется определить толщину обечайки бака диаметром $D = 2500$ мм, при давлении наддува $p_0 = 0,25$ МПа, удельном весе жидкости $\gamma = 1430$ Н/м³. Материал бака — алюминиевый сплав ($\sigma_B = 250$ МПа). Закон изменения осевой перегрузки $n_x(t)$ по траектории принят таким же, как для ракеты V-2 (рис. 11.3). Рассмотрим два сечения бака, отстоящие от уровня жидкости в начале полета на 2,5 (H_1) и 5,0 м (H_2). Расход топлива постоянный.

На рис. 11.3 изображены также графики зависимостей $H_1(t)$, $H_2(t)$ и произведений $n_x H_1(t)$ и $n_x H_2(t)$. Кривые показывают, что при постоянном давле-

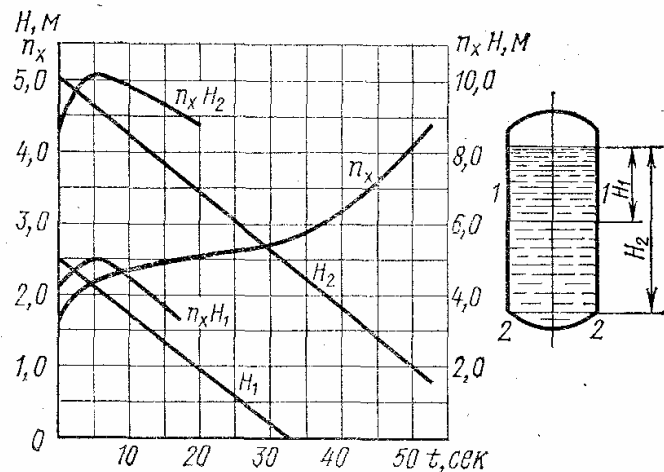


Рис. 11.3

нии наддува p_0 расчетными случаями для обоих сечений будет 6-я секунда полета. При этом $H_1 = 2,1$ м, $H_2 = 4,6$ м и $n_x = 2,15$.

Вычислим внутренние давления для принятых сечений:

$$p_1 = p_0 + n_x \gamma H_1 = (0,25 + 2,15 \cdot 1430 \cdot 2,1 \cdot 10^{-5}) \text{ МПа} = 0,315 \text{ МПа};$$

$$p_2 = p_0 + n_x \gamma H_2 = (0,25 + 2,15 \cdot 1430 \cdot 4,6 \cdot 10^{-5}) \text{ МПа} = 0,391 \text{ МПа}.$$

Соответствующие погонные окружные силы

$$T_{21} = p_1 R = 0,315 \cdot 1250 = 394 \text{ кН/м};$$

$$T_{22} = p_2 R = 0,391 \cdot 1250 = 488 \text{ кН/м}.$$

Если меридиональная сила $T_1 > 0$ и коэффициент безопасности $f = 1,5$, то толщины обечайки в сечениях 1—1 и 2—2 (рис. 11.3) равны

$$h_1 = T_{21} f / \sigma_B = [394 \cdot 1,5 / (25 \cdot 10^4)] \text{ м} = 2,36 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$h_2 = T_{22} f / \sigma_B = [488 \cdot 1,5 / (25 \cdot 10^4)] \text{ м} = 2,93 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Ниже рассмотрим случай, когда меридиональное усилие $T_1 < 0$, например $T_1 = -100$ кН/м. Окружные напряжения в сечениях 1—1 и 2—2 примем теми же. В соответствии с зависимостью (11.6) толщины обечайки в этих сечениях равны

$$h_1 = (T_{21} - T_1) f / \sigma_B = [(394 + 100) \cdot 1,5 / (25 \cdot 10^4)] \text{ м} = 2,96 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$h_2 = (T_{22} - T_1) f / \sigma_B = [(488 + 100) \cdot 1,5 / (25 \cdot 10^4)] \text{ м} = 3,53 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Расчет на прочность обечайки является основным для баков гладкой конструкции, когда в осевом направлении напряжения растягивающие. Если в осевом направлении в обечайке возникают сжимающие напряжения, необходимо дополнительно проводить расчет на устойчивость.

Расчет на устойчивость. Обечайку бака рассматривают как изотропную оболочку, нагруженную сжимающей силой, изгибающим моментом и внутренним давлением. Напряжения, соответствующие потере устойчивости такой оболочки,

$$\sigma_{xл} = k_{xл} E h / R, \quad (11.7)$$

где E — модуль упругости материала оболочки; h — толщина оболочки; R — ее радиус; $k_{xл}$ — коэффициент устойчивости. В практических расчетах коэффициент $k_{xл}$ можно представить в форме

$$k_{xл} = k k_p k_M k_i. \quad (11.8)$$

Каждый из коэффициентов в этой формуле отражает влияние определенного фактора: k — влияние начальных несовершенств оболочки; k_p — влияние внутреннего давления; k_M — неравномерность распределения сжимающих напряжений по сечению, возникающих от осевого сжатия и изгиба; k_i — влияние пластических деформаций. Рассмотрим вкратце влияние каждого фактора в отдельности на устойчивость оболочки.

Влияние начальных несовершенств. Напряжения, соответствующие потере устойчивости оболочки, существенно зависят от начальных несовершенств (начальных неправильностей формы): чем больше отклонения от идеальной формы, тем ниже критическое напряжение. Практически влияние начальных несовершенств возрастает с уменьшением относительной толщины оболочки h/R . Поэтому коэффициент,

учитывающий влияние начальных несовершенств, можно представить как функцию $k = k(h/R)$. Для тщательно изготовленных обечаек баков можно принять

$$k = 0,605 - 0,545 \left[1 - \exp \left(-\frac{1}{16} \sqrt{\frac{R}{h}} \right) \right]. \quad (11.9)$$

Так, например, для оболочки, имеющей параметр $h/R = 1/500$, $k = 0,2$ при $h/R = 1/1800$, $k = 0,1$. На рис. 11.4 изображена зависимость (11.9) и результаты ряда экспериментов [17].

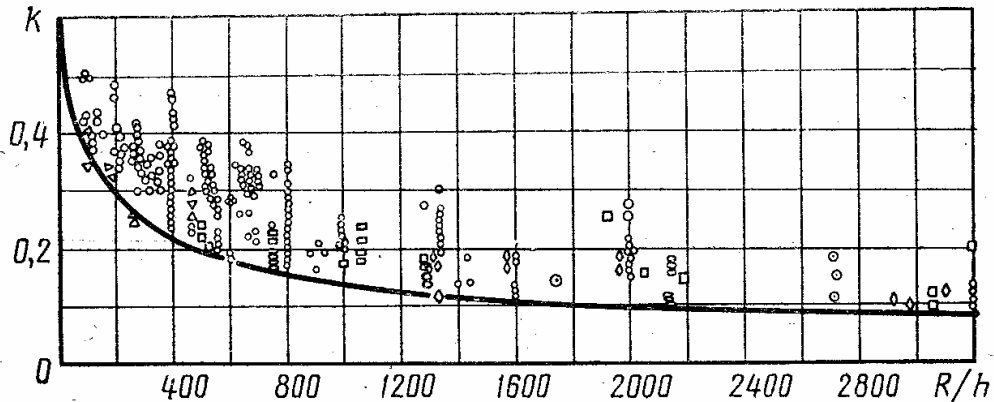


Рис. 11.4

Влияние внутреннего давления. Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что внутреннее давление существенно влияет на устойчивость цилиндрической оболочки, нагруженной осевыми силами. Зависимость коэффициента устойчивости от внутреннего давления может быть отражена соотношением

$$k_p = \frac{1 + 0,21\alpha (R/h)^{0,6}}{1 + 3\alpha}, \quad (11.10)$$

где $\alpha = pR^2/(Eh^2)$.

На рис. 11.5 представлены кривые $k_p(\alpha)$ для разных отношений R/h . Существенное увеличение коэффициента устойчивости особенно характерно для очень тонких оболочек.

Влияние неравномерности распределения сжимающих напряжений. Сравнение коэффициентов устойчивости для цилиндрической оболочки, нагруженной осевой силой и нагруженной изгибающим моментом, показывает, что при одинаковых сжимающих напряжениях устойчивость оболочки при изгибе примерно на 25 % выше, чем при осевом сжатии. Совместное действие изгибающего момента и осевой силы можно учесть коэффициентом

$$k_M = \frac{1 + 1,25 \cdot 2M/(NR)}{1 + 2M/(NR)}, \quad (11.11)$$

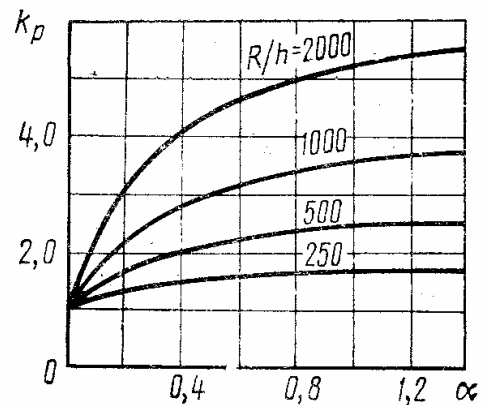


Рис. 11.5

где N и M — соответственно осевая сила с учетом разгрузки от давления и изгибающий момент в сечении; R — радиус обечайки.

Влияние пластических деформаций. Потеря устойчивости большинства сжатых и нагруженных внутренним давлением тонкостенных гладких оболочек происходит в упругой области при сравнительно низком уровне сжимающих напряжений. Однако в некоторых случаях, при определенном соотношении осевых и окружных напряжений, в оболочке могут возникать пластические деформации. Напряжение потери устойчивости оболочки при этом снизится. Потеря устойчивости будет происходить с образованием осесимметричных волн. Критические напряжения, полученные по деформационной теории пластичности для цилиндрической оболочки, теряющей устойчивость за пределом упругости,

$$\sigma_{кр} = \frac{2}{3} \sqrt{E_k E_c} \frac{h}{R}, \quad (11.12)$$

где E_k и E_c — соответственно касательный и секущий модули диаграммы растяжения материала оболочки; числовой коэффициент $2/3$ получен при условии образования осесимметричной волны, когда коэффициент Пуассона $\mu = 0,5$. Для упругой области деформирования $E_k = E_c = E$ и уравнение (11.12) имеет вид

$$\sigma_{кр} = \frac{2}{3} E \frac{h}{R}.$$

Коэффициент, показывающий, во сколько раз напряжения потери устойчивости в пластической области меньше, чем в упругой, при одной и той же деформации, равен

$$k_i = \sqrt{E_k E_c} / E. \quad (11.13)$$

Для оболочки, находящейся в двухосном напряженном состоянии, значение коэффициента k_i можно найти после определения интенсивности напряжений

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2}. \quad (11.14)$$

Предварительно рассмотрим, как определить коэффициент k_i при заданных значениях σ_1 и σ_2 . По известной диаграмме растяжения $\sigma_i - \varepsilon_i$ материала оболочки можно построить зависимости $E_k(\varepsilon)$ и $E_c(\varepsilon)$. Для известных напряжений σ_1 и σ_2 по уравнению (11.14) находим значение σ_i и затем ε_i , по которому определяем модули E_k и E_c , и из уравнения (11.13) вычисляем коэффициент k_i . Необходимо иметь в виду, что при осевом сжатии члены под корнем в выражении (11.14) суммируются и $\sigma_{хл} = -\sigma_1$.

На рис. 11.6 построена диаграмма растяжения алюминиевого сплава. Здесь же приведены зависимости $E_k(\varepsilon)$ и $E_c(\varepsilon)$. Из этих кривых и соотношений (11.13) и (11.14) видно, что растяжение в окружном направлении сжатой по оси цилиндрической оболочки вызывает уменьшение критических напряжений в том случае, когда интенсивность напряжений в оболочке выше предела упругости.

Итак, учитывая основные факторы, влияющие на устойчивость цилиндрической обечайки бака, с помощью уравнений (11.9), (11.10), (11.11) и (11.13) можно получить значение коэффициента устойчивости $k_{хл}$.

Однако критические напряжения по коэффициенту устойчивости найти сразу не удастся, если в оболочке возникают пластические деформации. Обратим внимание на то, что значение самого коэффициента $k_{хл}$ зависит от уровня напряжений. Чтобы определить напряжения, соответствующие потере устойчивости оболочки, можно воспользоваться методом последовательных приближений. В первом приближении можно брать коэффициент $k_i = 1$, т. е. считать, что оболочка работает в упругой области. Затем по зависимостям (11.7) и (11.8) можно определить критические напряжения $\sigma_{хл} = -\sigma_1$. Далее при известном давлении находят $\sigma_2 = pR/h$ и по уравнению (11.14) — интенсивность напряжений σ_i . По рис. 11.6 определяют модули E_K и E_C , а по уравнению (11.13) — новый коэффициент k_i . Умножив его на величину k , $k_p k_M$, получают значение коэффициента $k_{хл}$ второго приближения. Далее находят критические напряжения второго приближения и т. д. Иногда в качестве первого приближения лучше взять $k_i = 0,6 \dots 0,8$. В ряде случаев это существенно ускоряет расчет. Отметим, что теоретической верхней границей коэффициента устойчивости $k_{хл}$ является величина 0,605. Однако практически не удастся получить $k_{хл} > 0,45$.

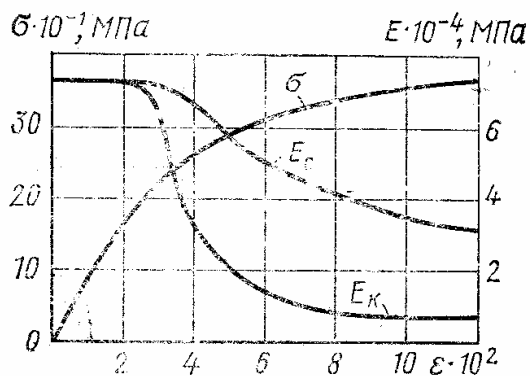


Рис. 11.6

Изложенный метод расчета позволяет приближенно установить зависимости критических напряжений хлопка от различных факторов. Для уточнения расчетов нужно пользоваться результатами экспериментов с баками или их моделями.

Пример. Обечайка бака гладкой конструкции толщиной $h = 3$ мм и радиусом $R = 1500$ мм из алюминиевого сплава ($E = 72\,000$ МПа) нагружена осевой силой N и изгибающим моментом M , причем $2M/(NR) = 0,2$. Требуется определить напряжения, соответствующие потере устойчивости оболочки при $p = 0$.

Из соотношений (11.9), (11.10), (11.11) для $R/h = 500$ определяем коэффициенты $k = 0,2$; $k_p = 1$; $k_M = 1,04$ и берем $k_i = 1$. Коэффициент

$$k_{хл} = k k_p k_M k_i = 0,2 \cdot 1 \cdot 1,04 \cdot 1 = 0,208.$$

Критическое напряжение хлопка согласно формуле (11.7)

$$\sigma_{хл} = k_{хл} E h / R = (0,208 \cdot 7,2 \cdot 10^4 / 500) \text{ МПа} = 30 \text{ МПа}.$$

Далее находим критические напряжения хлопка обечайки бака под давлением p и строим зависимость $\sigma_{хл} = f(p)$. (Диаграмма растяжения материала бака изображена на рис. 11.6.) По зависимостям (11.9) ... (11.11) для $h/R = 1/500$ при различных давлениях $p = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5$ МПа определяем коэффициенты k_p, k_M, k_i . Затем определяем $\sigma_2 = pR/h$. По зависимости (11.7) находим напряжение $\sigma_{хл}$, полагая вначале $k_i = 1$. Затем проверяем, чему равен коэф-

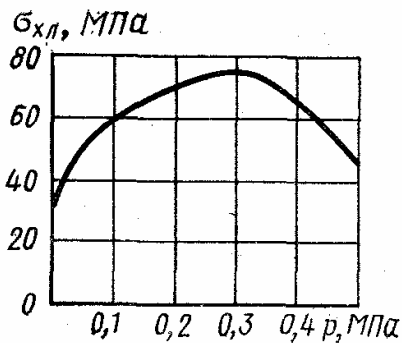


Рис. 11.7

коэффициент k_i . Для этого вначале находим по формуле (11.14) значение σ_i и значения E_k, E_c по рис. 11.6, а по формуле (11.13)—коэффициент k_i . Из приведенной таблицы видно, что до значения давления $p=0,3$ МПа оболочка теряет устойчивость в упругой области ($k_i = 1,0$). Для больших давлений коэффициент k_i определяют методом последовательных приближений. Полученная зависимость $\sigma_{кл} = f(p)$ приведена на рис. 11.7. Из нее видно, что внутреннее давление вначале существенно повышает критические напряжения хлопка. Наибольшие критические напряжения в оболочке соответствуют давлению $p=0,3$ МПа. При дальнейшем увеличении давления критические напряжения хлопка падают.

Пользуясь полученным соотношением $\sigma_{кл} = \sigma_{кл}(p)$, можно получить значение осевой силы, которую может выдержать бак, находящийся под давлением p :

$$N = p\pi R^2 + \sigma_{кл}(p) 2\pi R h. \quad (11.15)$$

Расчеты на устойчивость, так же как и расчеты на прочность, проводят для нескольких сечений бака.

p , МПа	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$k k_p k_M$	0,416	0,479	0,517	0,535	0,552
σ_2 , МПа	50	100	150	200	250
$\sigma_{кл}^1$, МПа	60	69	74,5	77	79,5
k_i^2	1,0	1,0	1,0	0,75	0,425
$k_{кл}^2$				0,4	0,235
$\sigma_{кл}^2$, МПа				57,6	33,8
k_i^3				0,86	0,6
$k_{кл}^3$				0,46	0,331
$\sigma_{кл}^3$, МПа				66,2	47,7
k_i^4				0,8	0,56
$k_{кл}^4$				0,428	0,309
$\sigma_{кл}^4$, МПа				61,7	44,5
k_i^5				0,81	0,565
$k_{кл}^5$				0,432	0,308
$\sigma_{кл}^5$, МПа				62,2	44,4

§ 11.3. Баки вафельной конструкции

Расчет обечайки бака вафельной конструкции (рис. 11.8, а) состоит в определении напряжений, соответствующих потере устойчивости при действии осевых сил и внутреннего давления. Кроме того, необходимо выполнить расчет на прочность различных сечений обечайки.

Расчет на устойчивость. Для проведения расчета на устойчивость и определения напряженного состояния воспользуемся схемой конструктивно-анизотропной оболочки. При расчете по этой схеме считается, что оболочка при растяжении и изгибе в продольном и поперечном направлениях имеет один и тот же модуль

упругости, но разную толщину. На рис. 11.8, б изображены элементы сечений оболочки. Площади сечений поперечных и продольных подкрепляющих элементов обозначим через

$$S_{\text{ш}} = b_{\text{ш}}a_{\text{ш}} \text{ и } S_{\text{с}} = b_{\text{с}}a_{\text{с}}. \quad (11.16)$$

Здесь и далее индекс «ш» соответствует поперечным подкреплениям (шпангоутам), а «с» — продольным (стрингерам). Приведенные толщины оболочки при растяжении в кольцевом и меридиональном направлениях будут соответственно

$$h_{\text{ш}} = h_0 + S_{\text{ш}}/t_{\text{ш}}, \quad h_{\text{с}} = h_0 + S_{\text{с}}/t_{\text{с}}, \quad (11.17)$$

где h_0 — толщина обшивки; $t_{\text{с}}$ и $t_{\text{ш}}$ — шаг подкреплений. Подсчитав момент инерции элементов относительно центра тяжести сечений, можно найти приведенные толщины при изгибе

$$\delta_{\text{ш}} = \sqrt[3]{12J_{\text{ш}}/t_{\text{ш}}}; \quad \delta_{\text{с}} = \sqrt[3]{12J_{\text{с}}/t_{\text{с}}}. \quad (11.18)$$

При подсчете момента инерции $J_{\text{с}}$ обычно пренебрегают кривизной оболочки.

Эквивалентную толщину h гладкой оболочки, равной по массе оболочке вафельной конструкции, определяют из равенства

$$ht_{\text{с}}t_{\text{ш}} = h_0t_{\text{с}}t_{\text{ш}} + S_{\text{с}}t_{\text{ш}} + S_{\text{ш}}t_{\text{с}}, \quad (11.19)$$

откуда

$$h = h_{\text{ш}} + h_{\text{с}} - h_0. \quad (11.20)$$

Для гладкой оболочки площади подкреплений равны нулю ($S_{\text{ш}} = S_{\text{с}} = 0$) и толщины $h_{\text{ш}} = h_0 = \delta_{\text{ш}} = \delta_{\text{с}} = h_0$. Для вафельной конструкции справедливы соотношения $\delta_{\text{ш}}/\delta_{\text{с}} \approx h_{\text{ш}}/h_{\text{с}} \approx 1$. Однако величины $\delta_{\text{ш}}$ и $\delta_{\text{с}}$, как правило, в несколько раз больше, чем $h_{\text{ш}}$ и $h_{\text{с}}$:

$$\delta_{\text{ш}}/h_{\text{ш}} \gg 1 \text{ и } \delta_{\text{с}}/h_{\text{с}} \gg 1. \quad (11.21)$$

Иначе говоря подкрепления в большей степени увеличивают изгибную жесткость, чем жесткость на растяжение.

Будем считать, что деформация и форма потери устойчивости оболочки под действием внешних нагрузок осесимметричны.

В § 8.2'' приведены уравнения устойчивости цилиндрической оболочки. Учитывая обозначения (11.17), (11.18) и полагая коэффициент

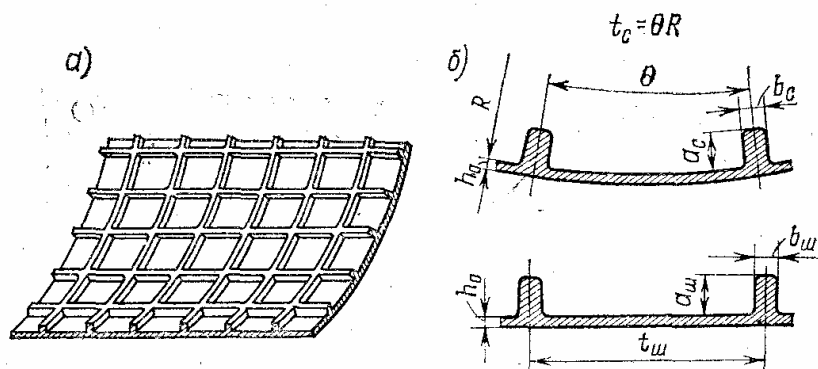


Рис. 11.8

Пуассона мало влияющим на деформацию оболочки и поэтому равным нулю, уравнение устойчивости конструктивно-анизотропной оболочки примет вид

$$E \frac{\delta_c^3}{12} \frac{d^4 w}{dx^4} + T_1 \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{E h_{III}}{R^2} w = 0. \quad (11.22)$$

Уравнение для изотропной оболочки имеет такую же форму (см. § 3.9), но коэффициенты $E\delta_c^3/12$ и Eh_{III}/R^2 заменяют величинами D и Eh/R^2 , соответствующими жесткости на изгиб и растяжение изотропной оболочки.

При потере устойчивости с формой волнообразования $w = \sin \lambda x$, где λ — параметр длины волны, из последнего уравнения можно получить выражение для осевой силы

$$T_1 = \frac{E\delta_c^3}{12} \lambda^2 + \frac{Eh_{III}}{R^2} \frac{1}{\lambda^2}.$$

Определим критическую силу при осесимметричной форме потери устойчивости оболочки, приравняв нулю производную от T_1 по λ^2 ,

$$T_{кр} = \frac{E}{R} \sqrt{\frac{\delta_c^3 h_{III}}{3}}. \quad (11.23)$$

При этом $\lambda = \sqrt[4]{12h_{III}/(R^2 \delta_c^3)}$ и длина полуволны оболочки $l = \pi/\lambda$, т. е.

$$l = \pi \sqrt[4]{\delta_c^3 R^2 / (12h_{III})}.$$

Критическая осевая сила равна

$$N_{кр} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} E \sqrt{\delta_c^3 h_{III}}. \quad (11.24)$$

Для изотропной оболочки эквивалентной толщины h при тех же условиях критическая сила равна

$$T_{1кр} = \sqrt{\frac{1}{3} \frac{E}{R}} h^2. \quad (11.25)$$

Эквивалентную по массе толщину h изотропной оболочки, выраженную через параметры h_0 , h_{III} и h_c , находят по формуле (11.20). Значение критической силы для этой оболочки можно представить в виде

$$T_{1кр} = \sqrt{\frac{1}{3} \frac{E}{R}} (h_{III} + h_c - h_0)^2. \quad (11.26)$$

Эффективность подкреплений может быть отражена коэффициентом $k_{в1}$, показывающим, во сколько раз критическая сила для вафельной конструкции больше силы для гладкой:

$$k_{в1} = \sqrt{\delta_c^3 h_{III}} / (h_{III} + h_c - h_0)^2. \quad (11.27)$$

У вафельной оболочки толщины h_c и $h_{ш}$ близки по значению друг другу: $h_{ш} \approx h_c \approx (1,2 \dots 1,5) h_0$. Изгибная толщина лежит в пределах $\delta_c = (2,0 \dots 5,0) h_0$. При этом коэффициент $k_{в1} = 2 \dots 3$.

Чтобы оценить, во сколько раз критические напряжения подкрепленной конструкции больше, чем гладкой, нужно соотношения (11.23) и (11.25), отнесенные соответственно к h_c и h , поделить друг на друга:

$$k_B = \frac{1}{h_{ш} + h_c - h_0} \sqrt{h_{ш} \delta_c^3 / h_c^2}. \quad (11.28)$$

Расчетное критическое напряжение для вафельной обечайки бака можно представить в форме

$$\sigma_{хл} = k_{в.хл} E h / R, \quad (11.29)$$

где h — эквивалентная толщина оболочки, определяемая соотношением (11.20):

$$k_{в.хл} = k k_p k_M k_i k_B. \quad (11.30)$$

Коэффициенты k , k_p , k_M , k_i отражают соответственно влияние начальных несовершенств оболочки, внутреннего давления, изгибающего момента и пластических деформаций. Значения этих коэффициентов и зависимость их от соответствующих факторов представлены в § 11.2. Коэффициент k_B устанавливает зависимость напряжения $\sigma_{хл}$ от конструктивных особенностей оболочки и определяется по формуле (11.28). Значение коэффициента $k_{в.хл}$ здесь может существенно превосходить величину 0,605.

При определении осевых напряжений в оболочке бака предполагалось, что на сжатие все сечение работает равномерно. Это возможно лишь при отсутствии местных вмятин панелей в ячейках.

В окончательных расчетах следует определять значения местных критических напряжений панели. Напряжения, соответствующие местной потере устойчивости панели между ребрами, определяют по уравнению

$$\sigma_{кр} = k_{хл} E \frac{h_0}{R} + k_{п} E \left(\frac{h_0}{t_c} \right)^2. \quad (11.31)$$

Коэффициент $k_{хл}$ определяется уравнением (11.8). Для вычисления приближенного значения коэффициента $k_{хл}$ можно учитывать лишь коэффициенты k и k_p , определяемые по формулам (11.9) и (11.10). Для заделанной по краям квадратной панели ($t_c = t_{ш}$) коэффициент $k_{п} = 8,4$. При отношении $t_{ш}/t_c \neq 1$ можно использовать коэффициент для $k_{п}$ сжатой в одном направлении плоской пластины, заделанной со всех сторон.

Сжатые продольные ребра проверяют на устойчивость. Для прямоугольных ребер критические напряжения потери местной устойчивости

$$\sigma_{кр} = 0,9 \cdot 0,46 E (b_c/a_c)^2. \quad (11.32)$$

Расчет на прочность. Окружные напряжения для безмоментной конструктивно-анизотропной оболочки определяются соотношением

$$\sigma_2 = pR/h_{ш}. \quad (11.33)$$

Меридиональные напряжения в обечайке бака

$$\sigma_1 = T_1/h_c. \quad (11.34)$$

Это выражение справедливо до момента образования вмятин в ячейках, т. е. до потери местной устойчивости.

Расчет на прочность обечайки бака состоит в определении напряжений σ_2 и σ_1 для ряда сечений. По известным окружным и меридиональным напряжениям находят эквивалентные напряжения. Для этого можно воспользоваться условиями

$$\sigma_3 = \sigma_2 - \sigma_1 \quad (11.35)$$

или

$$\sigma_3 = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2}. \quad (11.36)$$

При расчете на прочность баков обычно пользуются уравнением (11.35), из которого находят расчетные напряжения

$$\sigma_p = f(\sigma_2 - \sigma_1), \quad (11.37)$$

где f — коэффициент безопасности. Это уравнение и зависимости (11.33) и (11.34) позволяют в проектировочных расчетах найти приведенную толщину оболочки, если принять $h_c \approx h_{ш}$.

Пример. Оболочка вафельной конструкции из алюминиевого сплава $E = 72\,000$ МПа, имеющая предел упругости $\sigma_y = 250$ МПа, нагружена осевым сжатием и внутренним давлением $p = 0,3$ МПа. Параметры оболочки: радиус $R = 1500$ мм, шаг подкреплений $t_{ш} = t_c = t = 1200$ мм, толщина обшивки $h_0 = 2,0$ мм, высота ребер $a_{ш} = a_c = a = 10$ мм, ширина ребер $b_{ш} = b_c = b = 6$ мм. Требуется определить расчетные напряжения хлопка оболочки и значение окружного напряжения.

Приведенная толщина оболочки согласно формуле (11.17)

$$h_{ш} = h_c = h_0 + \frac{ab}{t} = \left(2 + \frac{10 \cdot 6}{120} \right) \text{ мм} = 2,5 \text{ мм};$$

площадь подкреплений

$$S_{ш} = S_c = ab = 10 \cdot 6 \text{ мм}^2 = 60 \text{ мм}^2.$$

Для определения момента инерции нужно найти центр тяжести сечения. Относительно наружной поверхности оболочки координата центра тяжести

$$y_T = \frac{h_0 t h_0 / 2 + ab(h_0 + a/2)}{h_0 t + ab} = \frac{2 \cdot 120 \cdot 1,0 + 10 \cdot 6(2 + 5)}{2 \cdot 120 + 10 \cdot 6} \text{ мм} = 2,2 \text{ мм}.$$

Момент инерции сечения

$$J = \frac{t h_0^3}{12} + \frac{b a^3}{12} + h_0 t (y_T - h_0/2)^2 + ab (h_0 + a/2 - y_T)^2 =$$

$$= \left[\frac{120 \cdot 2^3}{12} + \frac{6 \cdot 10^3}{12} + 2 \cdot 120 (2,2 - 1)^2 + 10 \cdot 6 (2 + 5 - 2,2)^2 \right] \text{ мм}^4 = 2310 \text{ мм}^4.$$

Приведенные толщины на изгиб по формуле (11.18) равны

$$\delta_c = \delta_{ш} = \delta = \sqrt[3]{12J/t} = \sqrt[3]{12 \cdot 2310 / 120} \text{ мм} = 6,12 \text{ мм}.$$

Эквивалентную по массе толщину оболочки находим по формуле (11.20):

$$h = h_{ш} + h_c - h_0 = (2,5 + 2,5 - 2) \text{ мм} = 3 \text{ мм}.$$

Для оболочки гладкой конструкции с толщиной $h = 3$ мм в предыдущем параграфе было определено расчетное напряжение $\sigma_{хл} = 30$ МПа при давлении $p = 0$; при этом коэффициент $k_{хл} = 0,208$. Чтобы определить коэффициент устойчивости $k_{в. хл}$ для вафельной оболочки, нужно коэффициент $k_{хл} = 0,208$ умножить на значение $k_{в}$, найденное по формуле (11.28):

$$k_{в} = \frac{\sqrt{\delta_0^3 h}}{(h_{ш} + h_c - h_0) h_0} = \frac{\sqrt{6,12^3 \cdot 2,5}}{(2,5 + 2,5 - 2) 2,5} = 3,16,$$

откуда

$$k_{в. хл} = k_{хл} k_{в} = 0,208 \cdot 3,16 = 0,657.$$

Расчетные напряжения потери устойчивости вафельной обечайки бака

$$\sigma_{в. хл} = k_{в. хл} E h / R = (0,657 \cdot 7,2 \cdot 10^4 / 500) \text{ МПа} = 94,5 \text{ МПа},$$

или в 3,16 раза больше напряжений гладкой оболочки той же массы.

Для эквивалентной по массе гладкой обечайки бака, находящейся под давлением $p = 0,3$ МПа, коэффициент $k_{хл} = 0,517$ (см. § 11.2). Тогда расчетные напряжения потери устойчивости для вафельной обечайки будут

$$\sigma_{в. хл} = k_{хл} k_{в} E h / R = (0,517 \cdot 3,16 \cdot 7,2 \cdot 10^4 / 500) \text{ МПа} = 235 \text{ МПа}.$$

Окружные напряжения в обечайке бака при $p = 0,3$ МПа определим по зависимости (11.33):

$$\sigma_2 = p R / h_{ш} = (0,3 \cdot 1500 / 2,5) \text{ МПа} = 180 \text{ МПа}.$$

■ Схема конструктивно-анизотропной оболочки при расчете напряжений в вафельной обечайке бака является приближенной. Для построения уточненных полей напряжений в вафельных ячейках необходимо пользоваться такими более совершенными методами расчета, как МКР или МКЭ.

§ 11.4. Расчет днищ баков

При расчете на прочность днища рассматриваются как безмоментные оболочки вращения, нагруженные осесимметричной нагрузкой. Напряжения от изгиба в местах соединения днища бака с обечайкой и в зоне крепления фланцев, как правило, в расчет не принимаются. Изготавливают днища обычно из пластических материалов, для которых местный изгиб не является причиной разрушения. В зоне фланцевых соединений люков и трубопроводов происходит перераспределение мембранных напряжений. Расчеты показывают, что фланцы влияют на напряженное состояние лишь локально. Не учитывают также составляющие нагрузки от массы конструкции бака.

При расчете днищ прежде всего необходимо определить внутренние погонные меридиональные T_1 и окружные T_2 силы.

Определение внутренних сил. Напряженное состояние безмоментной оболочки вращения, нагруженной нормальным давлением p_n ($p_\theta = 0$), описывается уравнениями (см. § 5.3):

$$\frac{1}{R_1} \frac{dT_1}{d\theta} + (T_1 - T_2) \frac{\cos \theta}{r} = 0; \quad (11.38)$$

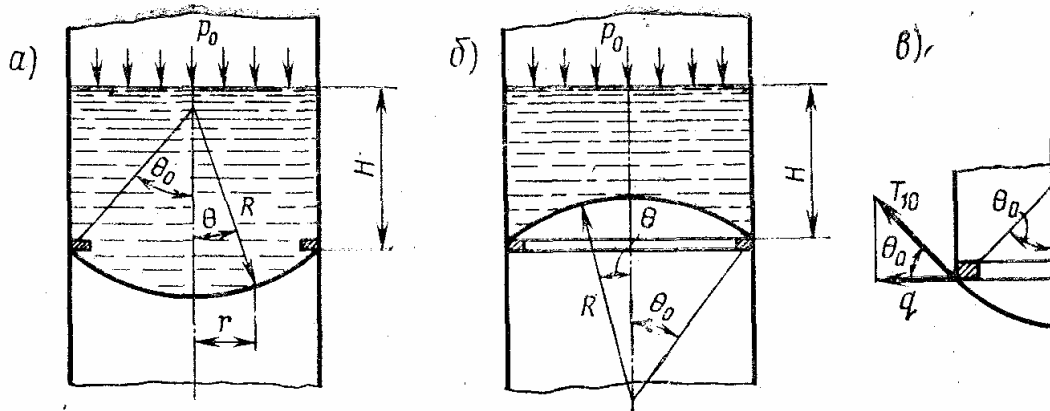


Рис. 11.9

$$T_1/R_1 + T_2/R_2 = p_n. \quad (11.39)$$

С помощью этих уравнений найдем окружные и меридиональные силы в днищах различной конфигурации.

1. У сферического днища (рис. 11.9, а) давление на поверхности днища

$$p_n = p = p_0 + n_x \gamma [H + R (\cos \theta - \cos \theta_0)]. \quad (11.40)$$

Воспользовавшись очевидными соотношениями для сферы

$$r = R \sin \theta, \quad dr = R \cos \theta \, d\theta, \quad R_1 = R_2 = R,$$

после интегрирования уравнения (11.38), учитывая соотношения (11.39) и (11.40), получим

$$T_1 = [p_0 + n_x \gamma (H - R \cos \theta_0)] \frac{R}{2} - n_x \gamma R^2 \frac{\cos^3 \theta}{3 \sin^2 \theta} + C.$$

Постоянная C определяется из условия конечного значения силы T_1 в полюсе оболочки при $\theta = 0$. Тогда выражение для меридиональной силы в сферическом днище будет следующим:

$$T_1 = \frac{p_0 R}{2} + n_x \gamma H \frac{R}{2} \left[1 + \frac{R}{H} \left(\frac{2}{3} \frac{1 - \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta} - \cos \theta_0 \right) \right]. \quad (11.41)$$

Окружная сила находится из уравнения (11.39)

$$T_2 = \frac{p_0 R}{2} + n_x \gamma H \frac{R}{2} \left[1 + \frac{R}{H} \left(2 \cos \theta - \cos \theta_0 - \frac{2}{3} \frac{1 - \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta} \right) \right]. \quad (11.42)$$

Окружные и меридиональные силы имеют максимальные значения в полюсе при $\theta = 0$; при этом член в круглых скобках выражения (11.41) стремится к единице:

$$T_{1\max} = T_{2\max} = \frac{p_0 R}{2} + n_x \gamma H \frac{R}{2} \left[1 + \frac{R}{H} (1 - \cos \theta_0) \right]. \quad (11.43)$$

В месте сопряжения днища с кольцом при $\theta = \theta_0$ меридиональная сила

$$T_{10} = \frac{p_0 R}{2} + n_x \gamma H \frac{R}{2} \left[1 + \frac{R}{H} \left(\frac{2}{3} \frac{1 - \cos^3 \theta_0}{\sin^2 \theta_0} - \cos \theta_0 \right) \right]. \quad (11.44)$$

а радиальная составляющая, сжимающая кольцо в его плоскости (рис. 11.9, в),

$$q = T_{10} \cos \theta_0. \quad (11.45)$$

В сферическом днище, изображенном на рис. 11.9, б, силы T_1 и T_2 определяют в той же последовательности, что и в предыдущем случае:

$$T_1 = -\frac{p_0 R}{2} - n_x \gamma H \frac{R}{2} \left[1 - \frac{R}{H} \left(\frac{2}{3} \frac{1 - \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta} - \cos \theta_0 \right) \right]; \quad (11.46)$$

$$T_2 = -\frac{p_0 R}{2} - n_x \gamma H \frac{R}{2} \left[1 - \frac{R}{H} \left(2 \cos \theta - \cos \theta_0 - \frac{2}{3} \frac{1 - \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta} \right) \right]. \quad (11.47)$$

Если днище выполняет роль перегородки между двумя баками, во всех соотношениях давление наддува p_0 следует заменить перепадом давлений Δp .

2. У конического днища (рис. 11.10) давление на оболочку распределено по закону

$$p = p_0 + n_x \gamma H \left(1 + \frac{R-r}{H} \operatorname{tg} \theta \right). \quad (11.48)$$

Из уравнений (11.38) и (11.39) определяют меридиональную и окружную силу:

$$T_1 = \frac{p_0 r}{2 \sin \theta} + \frac{n_x \gamma H}{2 \sin \theta} r \left[1 + \left(\frac{R}{H} - \frac{2}{3} \frac{r}{H} \right) \operatorname{tg} \theta \right]; \quad (11.49)$$

$$T_2 = \frac{p_0 r}{\sin \theta} + \frac{n_x \gamma H}{\sin \theta} r \left[1 + \left(\frac{R}{H} - \frac{r}{H} \right) \operatorname{tg} \theta \right]. \quad (11.50)$$

Сила, приложенная к кольцу крепления днища, определяется соотношениями (11.45) и (11.49), куда вместо угла θ нужно подставить θ_0 .

3. У торообразного днища различают меридиональный $R_1 = R$ и окружной $R_2 = R + r_0/\sin \theta$ радиусы кривизны. Закон распределения давления по углу θ определяется соотношением (11.40).

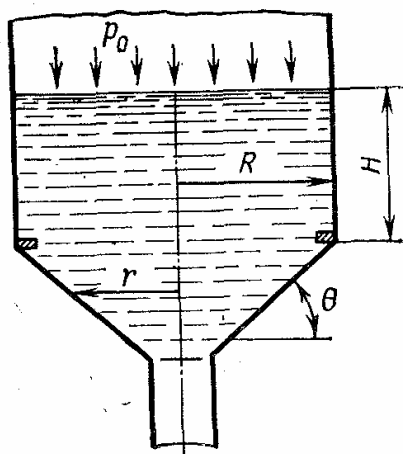


Рис. 11.10

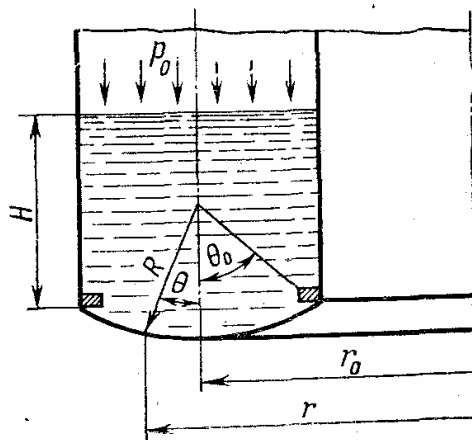


Рис. 11.11

Интегрируя уравнение (11.38) и используя условие ограниченности силы при $\theta = 0$, получаем выражение для меридиональной силы:

$$T_1 = p_0 R \frac{r_0 + (R/2) \sin \theta}{r_0 + R \sin \theta} + \frac{n_x \gamma H R^2}{r_0 + R \sin \theta} \left[\frac{r_0}{R} \left(1 - \frac{R}{H} \cos \theta_0 \right) + \right. \\ \left. + \frac{r_0}{2H} \frac{\theta}{\sin \theta} + \frac{r_0 \cos \theta}{2H} + \frac{1}{2} \sin \theta \left(1 - \frac{R}{H} \cos \theta_0 \right) + \right. \\ \left. + \frac{R}{3H} \frac{1 - \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta} \right]. \quad (11.51)$$

Окружную силу находят из уравнения (11.39):

$$T_2 = \frac{p_0 R}{2} + n_x \gamma H R \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{R}{H} \cos \theta_0 \right) + \frac{r_0}{H} \frac{1}{\sin^2 \theta} (\sin \theta \cos \theta - \theta) + \right. \\ \left. + \frac{2R}{H} \cos \theta - \frac{2R}{3H} \frac{1 - \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta} \right]. \quad (11.52)$$

Меридиональные силы на внутреннем контуре тора при $\theta = -\theta_0$ в торообразном днище — наибольшие. Нагрузки на внутреннее и наружное кольца определяются соотношениями (11.45) и (11.51), где для наружного кольца $\theta = \theta_0$, а для внутреннего $\theta = -\theta_0$.

Как видно, для определения сил в днищах баков любой конфигурации исходными данными являются: закон распределения нагрузки p , соотношения для главных радиусов кривизны и уравнения (11.38) и (11.39).

Получив закон распределения погонных сил по поверхности днища и зная его толщину, можно найти напряжения $\sigma = T/h$ в любой точке. Для конструкций днищ, используемых в ракетной технике, расчетные напряжения в основном растягивающие. В этом случае толщину днища выбирают из условия прочности, сравнивая расчетные напряжения с пределом прочности σ_v или пределом текучести σ_T материала днища. В связи с тем, что погонные силы по контуру днища непостоянны, иногда применяют днища переменной толщины. Так, в одном из баков ракеты «Сатурн-1» переменную толщину имеет полусферическое днище.

В ряде случаев днища могут быть нагружены внешним давлением. Тогда толщину нужно выбирать из расчета на устойчивость. Значения критических нагрузок для некоторых видов оболочек баков, нагруженных внешним давлением, определяются соотношениями, приведенными в литературе [9].

Критические нагрузки для однослойных тонких днищ весьма невелики. Поэтому в некоторых случаях для увеличения устойчивости оболочек используется трехслойная сотовая конструкция (см. § 11.1).

Рассмотрим особенности расчета сферического трехслойного днища (рис. 11.12, а). Будем считать, что нормальные напряжения σ_2 и σ_1 воспринимаются лишь внутренним и наружным слоями, толщины которых h_2 и h_1 . Промежуточный слой воспринимает только усилия по нормали к поверхности. Температура внутреннего и наружного слоев

соответственно t_2 и t_1 . Условия равновесия для каждого слоя имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= R (p_k - p_1) / (2h_1); \\ \sigma_2 &= R (p_2 - p_k) / (2h_2), \end{aligned} \quad (11.53)$$

где p_k — контактное давление на промежуточный слой со стороны внутреннего и наружного листов днища (рис. 11.12, б); R — радиус кривизны сферической оболочки.

Соотношения упругости наружного и внутреннего слоев таковы:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} (1 - \mu) + \alpha t_1; \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} (1 - \mu) + \alpha t_2, \quad (11.54)$$

где α — температурный коэффициент линейного расширения. Коэффициенты μ и α для внутреннего и наружного слоев считаем одинаковыми. По условию задачи должно выполняться условие равенства деформации внутренней и наружной оболочек:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2. \quad (11.55)$$

Решая уравнения (11.53) ... (11.55) относительно p_k , получаем соотношение

$$p_k = \frac{[p_1 R / (2E_1 h_1) + p_2 R / (2E_2 h_2)] (1 - \mu) + \alpha (t_2 - t_1)}{[R / (2E_1 h_1) + R / (2E_2 h_2)] (1 - \mu)}. \quad (11.56)$$

Для внутренней и наружной оболочек с одинаковыми толщиной и модулем упругости ($h_1 = h_2 = h$; $E_1 = E_2 = E$) получаем

$$p_k = \frac{p_1 + p_2}{2} + E \frac{h}{R} \frac{\alpha}{1 - \mu} (t_2 - t_1). \quad (11.57)$$

Напряжения в наружном и внутреннем слоях находят по уравнениям (11.53):

$$\sigma_1 = (p_2 - p_1) \frac{R}{4h} + \frac{E}{2} \frac{\alpha}{1 - \mu} (t_2 - t_1); \quad (11.58)$$

$$\sigma_2 = (p_2 - p_1) \frac{R}{4h} - \frac{E}{2} \frac{\alpha}{1 - \mu} (t_2 - t_1).$$

Соотношение (11.57) является исходным для определения шага и жесткости сот. Величине $p_k > 0$ соответствует сжатие, а $p_k < 0$ — отрыв сот от наружных оболочек. Предельные значения сил, при которых происходит потеря устойчивости элементов при сжатии и отрыв их от внешних слоев, определяют экспериментально.

Силовые и температурные напряжения по-разному влияют на прочность наружных оболочек. Температурные напряжения в слоях самоуравновешены и оказывают влияние лишь на местные критические напряжения оболочки между сотами. Разрушения оболочки, изго-

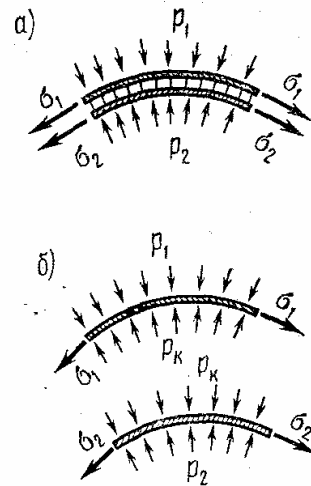


Рис. 11.12

товленной из пластического материала, от температурных напряжений обычно не происходит. На прочность наружных слоев влияет только силовая составляющая напряжений

$$\sigma_1 = \sigma_2 = (p_2 - p_1) \frac{R}{4h}. \quad (11.59)$$

Нагрузки в кольцевых элементах крепления днищ определяются соотношениями (11.44) и (11.45). В большинстве баков в кольцах возникают сжимающие напряжения. При определенном значении погонной нагрузки, действующей на кольцо ($q = q_{кр}$), оно, изгибаясь в окружном направлении, может потерять устойчивость. Значение $q_{кр}$ критической нагрузки для не связанного с обшивкой кольца определяется формулой

$$q_{кр} = \frac{n^2 - 1}{r^3} EJ, \quad (11.60)$$

где r — радиус кольца; EJ — жесткость на изгиб.

Зависимость (11.60) не может быть использована при расчете кольца бака, так как не учитывает поддерживающего влияния оболочек днища и обечайки, которое оказывается существенным для реальных конструкций. В литературе [17] приведены результаты исследования устойчивости кольцевых элементов, соединяющих цилиндрическую обечайку с сегментом сферической оболочки. Критическая нагрузка для системы кольцо — оболочка определяется соотношением

$$q_{кр} = \frac{n^2 - 1}{r^3} EJ + \frac{Eh \sin \theta_0}{1 + \mu} \frac{(1 + n \cos \theta_0)^2}{n [2n(n + \cos \theta_0) - \sin^2 \theta_0]} \times \\ \times \left[\frac{1}{\sin \theta_0} - \lambda \frac{\lambda \sin \theta_0 + 6n^2}{(\lambda \sin \theta_0 + 4n^2 + \beta^2)^2 - (2n^2 - \beta^2)^2} \right], \quad (11.61)$$

где

$$\beta = \frac{r}{l} \sqrt{24(1 + \mu)}; \quad \lambda = \frac{l}{R} \frac{1}{1 + \mu} \frac{n(n^2 - 1)(n^2 + \beta^2)}{2n(n + \cos \theta_0) - \sin^2 \theta_0};$$

l — длина цилиндрической обечайки; R — радиус сферического днища; h — толщина стенки обечайки и днища (принята одинаковой). Расчеты показывают, что для реальных размеров баков число волн n , по которым теряет устойчивость кольцо, равно 6... 8.

Формула для определения критической нагрузки для кольца сферического бака, нагруженного радиальным усилием q , имеет вид

$$q_{кр} = \frac{1}{r} \frac{n^2(EJ/r^2) + ES}{n[n + (rh/S)(1 + \mu)]} - \left(\frac{EJ}{r^2} n^2 + \frac{ES}{n^2} \right). \quad (11.62)$$

Здесь ES — жесткость кольца на растяжение. Соотношениями (11.60), и (11.62) при расчетах пользуются так же, как и при определении критического давления цилиндрической оболочки, т. е. задают различные числа волн $n = 2, 3, \dots$ и ведут расчет до тех пор, пока не будут получены минимальные значения $q_{кр}$. В ряде случаев критические нагрузки, получаемые по зависимостям (11.61) и (11.62), оказываются настолько

большими, что соответствующие им напряжения значительно превышают предел прочности σ_p . Тогда расчет колец приходится вести лишь на прочность при сжатии, используя зависимости (11.61) и (11.62) только для контроля.

§ 11.5. Сфероидальные и торообразные баки

Расчет на прочность баков сложной формы связан с необходимостью применять численные методы при определении напряжений в конструкции. Применительно к двум типам баков сфероидальным (рис. 11.13, а) и торообразным (рис. 11.13, б) рассмотрим последовательность определения меридиональных и окружных усилий. Геометрия оболочки может быть задана в виде таблиц координат меридиана (r_i, x_i) .

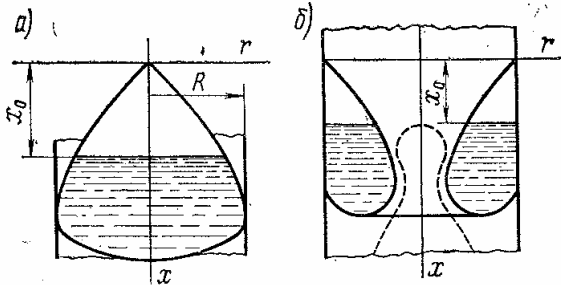


Рис. 11.13

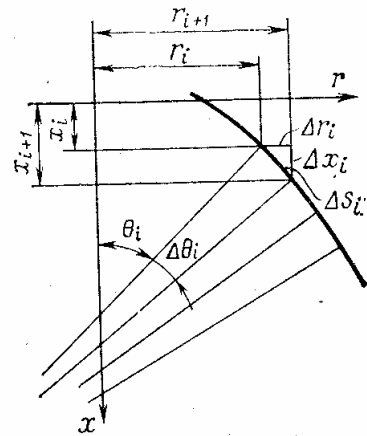


Рис. 11.14

Прежде всего необходимо найти радиусы кривизны оболочки, для чего в каждой точке меридиана определяют приращения величин r_i и x_i (рис. 11.14):

$$\Delta r_i = r_{i+1} - r_i, \quad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i. \quad (11.63)$$

Угловая координата i -й точки находится из соотношений (5.4)

$$\theta_i = \arctg (\Delta x_i / \Delta r_i). \quad (11.64)$$

Длина дуги между i -й и $i+1$ -й точками может быть определена по одной из двух зависимостей

$$\Delta s_i = \Delta x_i / \sin \theta_i; \quad \Delta s_i = \Delta r_i / \cos \theta_i. \quad (11.65)$$

Приращение угловой координаты равно

$$\Delta \theta_i = \theta_{i+1} - \theta_i.$$

Эти соотношения позволяют подсчитать меридиональный и окружной радиусы кривизны:

$$R_{1i} = \Delta \theta_i / \Delta s_i; \quad R_{2i} = r_i / \sin \theta_i. \quad (11.66)$$

Перейдем к определению сил T_1 и T_2 . Считая, что уровень жидкости для рассматриваемого расчетного случая характеризуется величиной x_0 , определим нормальную составляющую давления $p_n = p$:

$$\text{при } x \leq x_0 \quad p = p_0; \quad (11.67)$$

$$\text{при } x \geq x_0 \quad p = p_0 + n_x \gamma (x - x_0).$$

Индекс $i = 0$ присвоим точке, совпадающей с уровнем жидкости (рис. 11.15). Участку оболочки *I* (над уровнем жидкости) соответствуют индексы $i = -1, -2, \dots$, участку *II* (ниже уровня жидкости) индексы $i = 1, 2, \dots$.

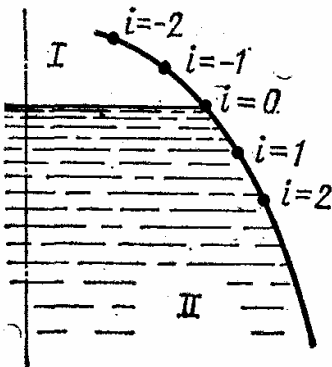


Рис. 11.15

Силы на участке *I* сфероидального бака (см. рис. 11.13, а) определяются (см. § 5.3) только давлением наддува p_0 и местными радиусами кривизны:

$$T_{1i} = \frac{p_0 R_{2i}}{2}; \quad T_{2i} = p_0 R_{2i} \left(1 - \frac{R_{2i}}{2R_{1i}}\right). \quad (11.68)$$

В точке $i = 0$,

$$T_{10} = \frac{p_0 R_{20}}{2}; \quad T_{20} = p_0 R_{20} \left(1 - \frac{R_{20}}{2R_{10}}\right). \quad (11.69)$$

Ниже уровня жидкости (участок *II*) силы находят с помощью уравнений (5.32), (5.33). Приращение меридиональной силы для точки i равно

$$\Delta T_{1i} = (T_{2i} - T_{1i}) \frac{\cos \theta_i}{r_i} \Delta s_i. \quad (11.70)$$

Подставив сюда при $i = 0$ T_{10} и T_{20} из формул (11.69), определим ΔT_{10} . Меридиональную силу в других точках находим из зависимости

$$T_{1i+1} = T_{1i} + \Delta T_{1i}. \quad (11.71)$$

Окружную силу T_2 подсчитывают по формуле

$$T_{2i+1} = R_{2i+1} \left[p_0 + n_x \gamma (x_{i+1} - x_0) - \frac{T_{1i+1}}{R_{1i+1}} \right]. \quad (11.72)$$

С помощью приведенных уравнений можно найти силы во всех точках участка *II* сфероидального бака до точки разветвления (рис. 11.16, а). Внутренние силы на участке *III* определяют в той же последовательности. Начинать расчет удобнее с оси симметрии (точка а), где давление

$$p_a = p_0 + n_x \gamma (x_a - x_0). \quad (11.73)$$

Меридиональная и окружная силы одинаковы и подсчитываются по формуле

$$T_{1a} = T_{2a} = p_a R_{2a} / 2.$$

Далее используют соотношения (11.70) ... (11.72). Составляющие сил на участках *II* и *III* в точке *b* (рис. 11.16, б) равны реакции, с которой отсек *IV* воздействует на бак в месте разветвления. Радиальная со-

ставляющая q_r реакции создает нормальную силу в соединительном шпангоуте, осевая q_x — соответствует массе топлива, содержащейся в баке.

Расчет торообразного бака (рис. 11.17) ведется в той же последовательности. Вначале определяются силы T_1 и T_2 в точке a , где касательная к меридиану нормальна к оси вращения. Полагая, что радиус

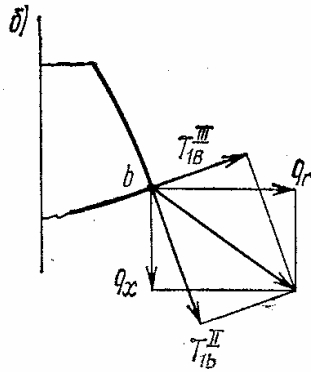
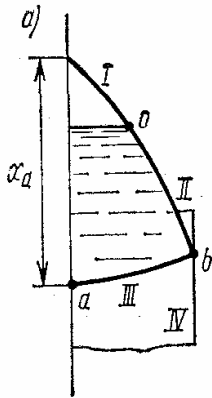


Рис. 11.16

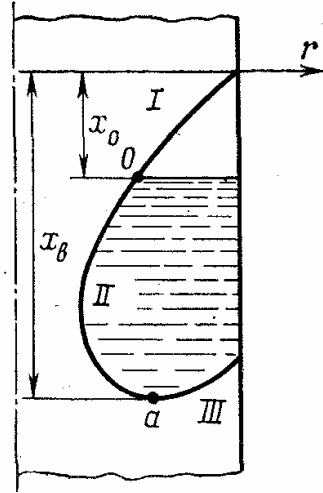


Рис. 11.17

кривизны меридиана здесь равен R_{1a} , силы в узкой зоне вблизи $\theta = 0$ определяем из соотношений (11.51) и (11.52). Для $\theta = 0$ и давления, определяемого формулой (11.73), силы равны

$$T_{1a} = p_0 R_{1a} + n_x \gamma (x_a - x_0) R_{1a};$$

$$T_{2a} = \frac{1}{2} p_0 R_{1a} + \frac{1}{2} n_x \gamma (x_a - x_0) R_{1a}. \quad (11.74)$$

Соотношения (11.70) ... (11.72) позволяют найти силы T_1 и T_2 во всех точках оболочки ниже уровня жидкости. При $x < x_0$ расчет ведется так же, но в уравнении (11.72) второе слагаемое в квадратных скобках приравнивается нулю.

Необходимо иметь в виду, что для участка III положительной кривизны (рис. 11.17) угол $\theta > 0$ и радиус кривизны $R_2 > 0$. Участкам II и I соответствует $\theta < 0$ и $R_2 < 0$. При этом возможно, что при больших значениях R_1 (на близких к прямолинейным участкам меридиана) могут возникнуть окружные сжимающие силы. Чтобы этого избежать, необходимо при проектировании бака выбирать в соотношении (11.72) величину R_{1i+1} такой, чтобы последнее слагаемое было больше первых двух.

Расчет сил по приведенной схеме проводится для нескольких случаев нагружения. При этом определяют расчетный случай (как в § 11.2) и из условия прочности подбирают толщину стенки обечайки.

Глава 12

РАСЧЕТ СУХИХ ОТСЕКОВ

К сухим отсекам относят двигательные отсеки ракет с ЖРД, межбаковые отсеки, обтекатели, переходные отсеки, корпус ракеты с подвесными баками. Расчет каждой из этих конструкций имеет свои особенности. Однако в них и много общего, что позволяет выделить типовые схемы расчета для различных вариантов конструкций. В этой главе излагаются основы проектировочных расчетов подкрепленных сухих отсеков. Дается последовательность выбора продольных и поперечных силовых элементов для нескольких расчетных схем. Рассматривается расчет переходных отсеков ферменной конструкции.

§ 12.1. Конструктивные схемы и нагрузки

Конструкция сухих отсеков определяется назначением и общей компоновкой ракеты. Наибольшее распространение получили цилиндрические и конические отсеки, выполненные в виде оболочек вращения, подкрепленных силовым набором. Некоторые конструкции переходных отсеков изготавливают из элементов ферм.

Сухие отсеки слабо герметизированы, работают без наддува и нагружены силами реакции соседних отсеков корпуса ракеты и местным аэродинамическим давлением. В сечениях отсеков действуют изгибающие моменты M , нормальные силы N и перерезывающие силы Q . В расчетах отсеков на прочность необходимо учитывать температурное состояние конструкции, определяемое, в первую очередь, аэродинамическим нагревом. Сухие отсеки ракет, приспособленных к подводному старту, нагружены большим внешним давлением. Внешним давлением на активном участке полета нагружены и конические элементы переходных отсеков.

Меридиональные силы T и силы сдвига S , возникающие в сечениях конического сухого отсека, определяются формулами

$$T_1 = - \left(\frac{N}{2\pi r} + \frac{M}{\pi r^2} \cos \varphi \right) \frac{1}{\cos \gamma}; \quad (12.1)$$

$$S = \left(\frac{Q}{\pi r} \pm \frac{M}{\pi r^2} \operatorname{tg} \gamma \right) \sin \varphi, \quad (12.2)$$

где φ — угловая координата в окружном направлении; γ — угол конусности; r — текущий радиус сечения конуса.

От внешнего давления p в сечении отсека возникают окружные силы

$$T_2 = -pr/\cos \gamma. \quad (12.3)$$

Для цилиндрического отсека $\gamma=0$ и $r=R=\text{const}$ и соотношения (12.1) ... (12.3) упрощаются:

$$T_1 = - \left(\frac{N}{2\pi R} + \frac{M}{\pi R^2} \cos \varphi \right); \quad (12.4)$$

$$S = \frac{Q}{\pi R} \sin \varphi; \quad (12.5)$$

$$T = -pR. \quad (12.6)$$

Силы T_1 , S и T_2 являются исходными для расчета отсеков.

Расчет цилиндрических сухих отсеков, находящихся в средней части корпуса, ведется на наибольшее значение эквивалентной сжимающей силы $N_{\text{экв}}$. При выборе расчетных случаев для конических участков переходных отсеков определяющими являются эквивалентная сжимающая сила $N_{\text{экв}}$ и внешнее давление p . Корпус двигательного отсека рассчитывают на случай стоянки на стартовом столе, когда отсек нагружен силой реакции от веса ракеты и изгибающим моментом от ветровой нагрузки. Стыковые соединения сухих отсеков рассчитывают, как правило, на случай наземной транспортировки.

Рассмотрим некоторые конструктивные варианты сухих отсеков, основной расчетной силой для которых является меридиональная сила T_1 , а силы T_2 и S хотя не равны нулю, но значительно меньше силы T_1 .

Примером наиболее простого варианта сухого отсека является *гладкий отсек* в виде неподкрепленной оболочки. Несущая способность конструкции, нагруженной осевой сжимающей силой, определяется ее устойчивостью. Критические напряжения для цилиндрической и слабо конической оболочки можно найти по зависимостям § 8.6. Для неподкрепленной оболочки, например из магниевого сплава, с параметром $R/h=300$, где R — радиус; h — толщина оболочки, критическое напряжение $\sigma_{\text{кр}} \approx 20$ МПа, т. е. очень мало. Если критические напряжения сжатия сравнить с пределом текучести материала, то отношение $\sigma_{\text{кр}}/\sigma_{\text{T}}=0,1 \dots 0,2$. По этому отношению можно судить о неэффективности в весовом отношении конструкции гладких неподкрепленных отсеков, нагруженных осевой сжимающей нагрузкой. Однако эти конструкции благодаря простой технологии изготовления все же применяют в виде коротких переходных цилиндрических участков, соединяющих баки с сухими отсеками. Неподкрепленные гладкие отсеки ставят в тех случаях, когда они составляют небольшую долю в весовом балансе конструкции. Примером гладкого сухого отсека может служить часть отсека ракеты «Аджена», примыкающая к баку.

Ракета «Аджена» применяется как последняя ступень носителей «Титан-2, -3» и «Атлас». Основной отсек корпуса представляет собой цилиндрическую оболочку диаметром $D=1500$ мм, состоящую из двух частей. Передняя часть выполнена из листов магниевого сплава толщиной $h=1,8$ мм и продольных подкрепляющих элементов — стрингеров. Задняя часть отсека изготовлена также из листов магниевого сплава, но не имеет подкреплений. Толщина оболочки здесь $h=2,5$ мм. На торцах неподкрепленного отсека имеются шпангоуты. К заднему шпангоуту по периметру прикреплен блок баков. Через этот шпангоут на корпус передается усилие от тяги ракетного двигателя. Расчетная нагрузка для отсека — сжимающая.

Наиболее широко не только в баллистических ракетах, но и в других летательных аппаратах применяются *стрингерные* и *лонжеронные* отсеки. Конструкции этих отсеков обычно состоят из обшивки, подкрепленной продольными элементами — стрингерами или лонжеронами (как правило, из прессованных профилей), а также поперечными кольцами — шпангоутами.

При конструировании отсека очень трудно обеспечить устойчивость обшивки между подкрепляющими элементами. Иногда приходится допускать потерю устойчивости обшивки при сравнительно малой нагрузке. Основными несущими элементами в этом случае являются продольные подкрепления. Конструкцию такого типа будем называть *лонжеронной*. Малый вес отсека достигается тем, что удается допустить высокие напряжения в лонжеронах.

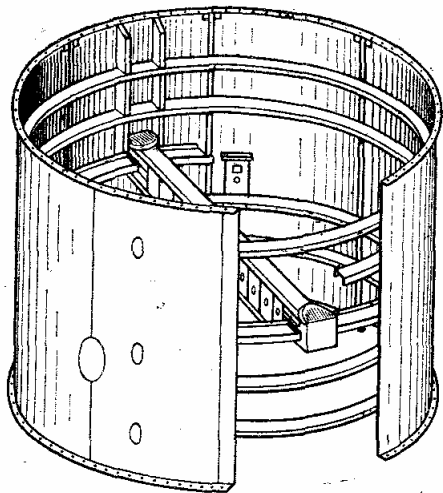


Рис. 12.1

Если в соответствии с требованиями эксплуатации потеря устойчивости обшивки недопустима, приходится идти по другому пути: применять более толстую обшивку с частыми продольными подкреплениями. Это увеличивает критические напряжения обшивки. Одновременно оказывается возможным уменьшить размеры сечений продольных элементов. Для увеличения общей устойчивости отсек разбивается на несколько участков шпангоутами. Конструкцию этого типа называют *стрингерной*.

Критические напряжения для стрингерной и лонжеронной конструкций значительно выше критических напряжений для такой же по весу гладкой оболочки. В этих конструкциях удается достичь относительного уровня критических напряжений $\sigma_{кр}/\sigma_T = 0,4 \dots 0,5$.

Стрингерные и лонжеронные конструкции отсеков уже много лет применяют в самолетостроении; теперь их используют при создании многих типов ракет.

Межбачковый отсек сбрасываемой топливной ступени транспортного корабля «Спейс Шаттл» имеет форму цилиндра длиной 6,87 м и диаметром 8,4 м (рис. 12.1). Он состоит из панелей обшивки, главного и четырех промежуточных шпангоутов, четырех лонжеронов и поперечной силовой балки. Все панели изготовлены из алюминиевого сплава, их соединяют сваркой с торцовыми шпангоутами, которыми отсек болтами стыкуется с баком окислителя и баком горючего. Толщина панелей переменная, в каждой из них имеется два внутренних лонжерона и 18 наружных стрингеров треугольного сечения.

Одним из вариантов подкрепленной конструкции является *панельная конструкция*. Для сухих отсеков применяют прессованные или механически и химически фрезерованные панели. Частые продольные подкрепления в стрингерно-панельной конструкции и продольные и поперечные в вафельной конструкции позволяют избежать потери устойчивости обшивки. При расчете на общую устойчивость такую конструкцию можно считать конструктивно-анизотропной оболочкой.

Выше мы отмечали, что при сжатии отсека, имеющего продольные и поперечные подкрепления, трудно обеспечить устойчивость тонкой обшивки между подкреплениями. При работе отсека на сжатие обшивка, потерявшая устойчивость, частично выключается из работы. Чтобы повысить местные критические напряжения этой обшивки, нужно существенно уменьшить расстояние между подкреплениями. Такая конструкция приближается к гофрированной.

Существует несколько вариантов сухих отсеков гофрированной конструкции. Оболочка (двух- или трехслойная) состоит из одного слоя гофра и одного или двух слоев гладкой обшивки. Листы соединены с помощью сварки или склеивания. Материал — алюминиевые сплавы или нержавеющая сталь. Применяют гофры различного сечения трапециевидные, синусоидальные, омегаобразные и др. Иногда используют конструкции в виде гофрированной обшивки, подкрепленной мощными лонжеронами.

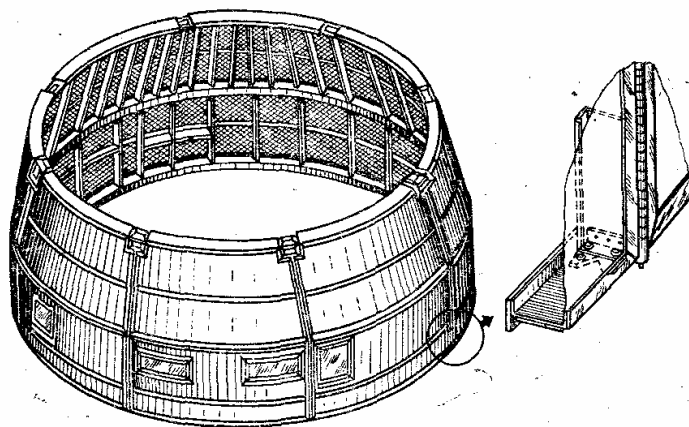


Рис. 12.2

При расчете на общую устойчивость замкнутые цилиндрические и конические гофрированные отсеки рассматривают как конструктивно-ортотропные оболочки. Задача выбора профиля гофра состоит в том, чтобы обеспечить высокие местные критические напряжения плоских и скругленных элементов гофра. Гофрированные панели, применяемые в качестве обшивки и имеющие по краям силовые элементы, рассчитывают как конструктивно-анизотропные пластины или пологие оболочки. При ориентировке гофров вдоль действия сжимающей нагрузки удается получить весьма высокие критические напряжения. Относительные критические напряжения можно повысить до значения $\sigma_{кр}/\sigma_T = 0,7 \dots 0,8$. Для отсеков, нагруженных преимущественно осевым сжатием, конструкция с продольным направлением гофров является одной из наиболее эффективных в весовом отношении.

На ракетах «Сатурн», «Центавр», «Атлас» широко применяют отсеки, целиком состоящие из гофров, а также конструкции в виде гофрированной обшивки, подкрепленной мощными лонжеронами.

Переходный отсек между второй и третьей ступенями ракеты-носителя «Сатурн» (рис.12.2) [17] состоит из двухсекционной цилиндрической оболочки длиной 1140 мм и диаметром 6630 мм и конической оболочки длиной 1140 мм и диаметром верхней части 5560 мм. Коническая часть спереди примыкает к баку окислителя третьей ступени, а цилиндрическая часть — к баку горючего второй ступени. В конической части переходного отсека имеется восемь лонжеронов, равномерно расположенных по периметру. Между ними поставлено по семь лонжеронов меньшего сечения. Цилиндрический отсек имеет вдвое меньше продольных элементов. В торцовых сечениях конической и цилиндрической частей отсека, а

также в месте перехода конуса в цилиндр поставлены замкнутые круговые шпангоуты. Примерно посредине длины каждого отсека установлены шпангоуты меньшей жесткости. Шпангоуты в местах пересечения с лонжеронами скреплены болтами через фитинги. Обшивка — трехслойная из стальных листов (рис. 12.3). Наружный и внутренний листы имеют толщину 0,2 мм, промежуточный гофрированный слой из листа толщиной 0,05 мм пилообразного сечения приварен к этим листам в вершинах гофра. Каждый элемент продольного гофра гофрирован еще в поперечном направлении. Трехслойный лист суммарной толщиной 4 мм равен по весу сплошному стальному листу толщиной 0,535 мм, но имеет жесткость на изгиб в продольном направлении в 140 раз больше. При испытаниях этого трехслойного материала на растяжение получено разрушающее напряжение 1000 МПа. При сжимающих нагрузках вдоль гофров напряжения, соответствующие потере устойчивости, достигали 560 МПа при нормальной температуре.

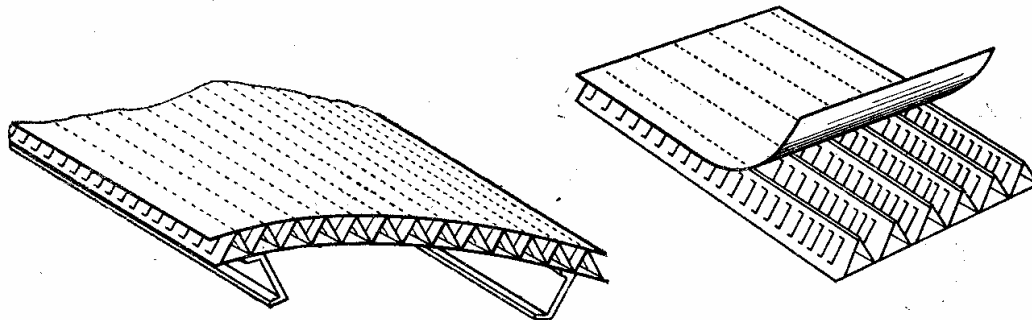


Рис. 12.3

Для отсеков, нагруженных осевыми силами и давлением, целесообразно применять *сотовые конструкции*. Они широко используются как в основных, так и во вспомогательных элементах корпуса носителей и космических аппаратов. Преимущество сотовых панелей, состоящих из листов, прикрепленных сваркой или склеиванием к двум сторонам заполнителя малого веса, заключается в большой жесткости и хорошей местной устойчивости таких панелей.

Обычно при проектировании рассчитывают сплошную или каркасную конструкцию, а затем преобразуют ее в эквивалентную конструкцию с сотовым заполнителем. В качестве заполнителя применяют металлы и пластмассы. Наиболее рациональная форма ячеек заполнителя для изотропно нагруженных отсеков — шестигранные соты и вафли. Обшивки и заполнитель в сотовых конструкциях, применяемых при высоких температурах, целесообразно делать из одного материала во избежание больших местных термических напряжений. Сотовые панели применяют для обтекателей, перегородок и других элементов, где требуется легкая, но жесткая конструкция.

Кабина космонавтов космического аппарата «Аполлон» состоит из панелей сотовой конструкции толщиной 12,7 мм, толщина наружных листов по 2,28 мм. Материал панели — нержавеющая сталь. Наружные листы соединены с сотами с помощью сварки. Корпус двигательного отсека также состоит из оболочки сотовой конструкции с толщиной панелей 51 мм. Толщина наружного и внутреннего листов по 1,27 мм. Материал сот и внешних листов — алюминиевый сплав.

В качестве переходных отсеков, расположенных у стыка ступеней ракеты, иногда применяют стержневые конструкции, являющиеся элементами фермы. Подобные отсеки способны передать все компоненты нагрузки с одной ступени на другую.

§ 12.2. Стрингерные, панельные и лонжеронные отсеки

Рациональной конструкцией сухого отсека, работающего в основном на осевое сжатие, является оболочка, подкрепленная продольными и поперечными элементами. Сжимающая сила воспринимается оболочкой и продольными элементами. Назначение поперечных элементов — повысить устойчивость обшивки и стрингеров. В зависимости от частоты установки подкрепляющих элементов и их жесткости возможны различные формы потери устойчивости. Форма потери устойчивости, при которой обшивка теряет устойчивость раньше подкрепляющих элементов, показана на рис. 12.4, а, форма потери устойчивости, со

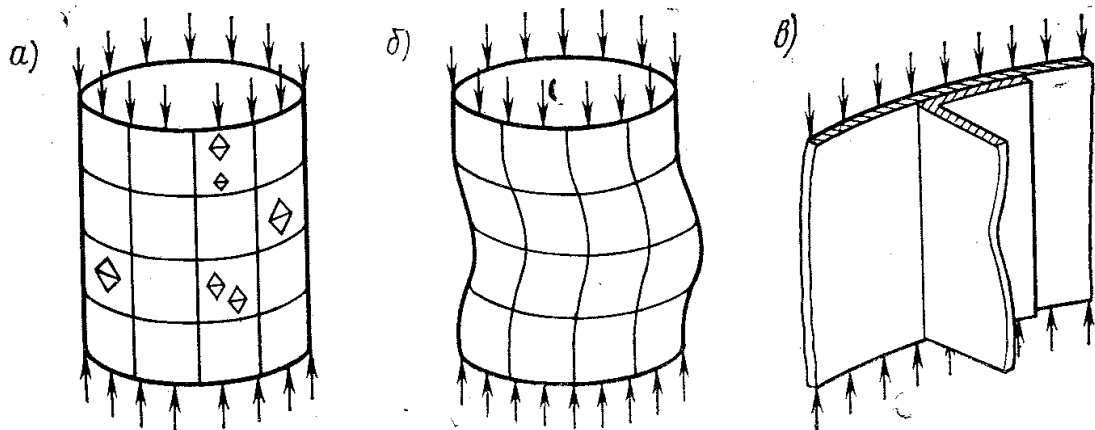


Рис. 12.4

проводящаяся изгибом стрингеров, — на рис. 12.4, б. При неправильной конструкции стрингера может происходить потеря местной устойчивости его элементов (рис. 12.4, в).

Расчетные формулы для элементов конструкции отсека. Обычно длина панели обшивки (между соседними шпангоутами) больше ее ширины (между стрингерами). Поэтому определить критическое сжимающее напряжение панели можно, пользуясь приближенной формулой для длинной пологой цилиндрической панели с радиусом кривизны R , толщиной h и шириной (расстоянием между стрингерами) t_c :

$$\sigma_{кр} = k_{хл} E \frac{h}{R} + k \frac{\pi^2}{12(1-\mu^2)} E \left(\frac{h}{t_c} \right)^2. \quad (12.7)$$

Первое слагаемое здесь соответствует критическому напряжению сжатой цилиндрической оболочки. Коэффициент $k_{хл}$ определяют по формуле (11.8). В предварительных проектировочных расчетах можно принять $k_{хл} = 0,1$. Второе слагаемое соответствует критическому напряжению длинной прямоугольной пластины. Коэффициент k зависит от условий закрепления пластины. Минимальное его значение $k = 4,0$ соответствует шарнирно опертой пластине. При $k = 4,0$; $k_{хл} = 0,1$; $\mu = 0,3$ формула (12.7) принимает вид

$$\sigma_{кр} = 0,1E \frac{h}{R} + 3,6E \left(\frac{h}{t_c} \right)^2. \quad (12.8)$$

Критическое напряжение потери устойчивости изолированного сжатого стержня в упругой области определяют по формуле

$$\sigma_{кр} = c\pi^2 E / \lambda^2, \quad (12.9)$$

где $\lambda = l/\rho$ — гибкость стержня; l — длина стержня; $\rho = \sqrt{J/S}$ — радиус инерции сечения; c — коэффициент, зависящий от характера закрепления концов стержня (для шарнирно опертого стержня $c = 1,0$, а для стержня с защемленными концами $c = 4,0$). В реальных конструкциях закрепление стержня, как правило, упругое, и значение коэффициента c лежит между 1,0 и 4,0. В предварительных проекторочных расчетах упругость заделки концов стержня учитывают, принимая коэффициент $c = 2,0$.

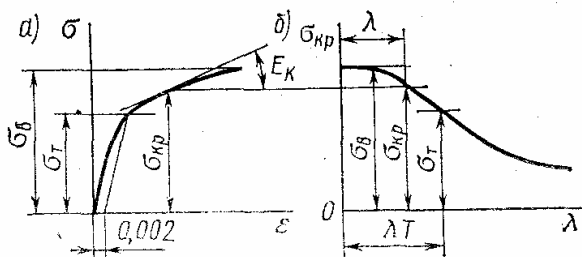


Рис. 12.5

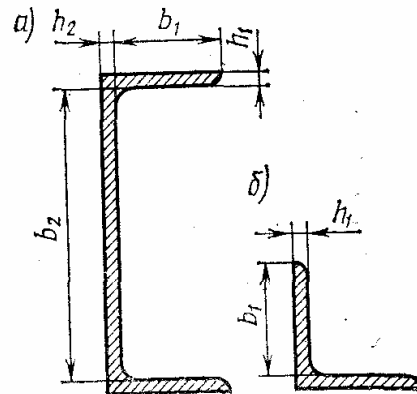


Рис. 12.6

Формула (12.9) справедлива только для значений гибкости λ , соответствующей $\sigma_{кр} \leq \sigma_{т.сж}$, где $\sigma_{т.сж}$ — предел текучести материала при сжатии. Предельное значение гибкости, когда еще справедлива формула (12.9),

$$\lambda_T = \pi \sqrt{cE / \sigma_{т.сж}}. \quad (12.10)$$

При $\sigma > \sigma_{т.сж}$ происходит потеря устойчивости в пластической области и вместо формулы (12.9) можно пользоваться уравнением

$$\sigma_{кр} = c\pi^2 E_k / \lambda^2, \quad (12.11)$$

где $E_k = d\sigma/d\varepsilon$ — касательный модуль (рис. 12.5, а). Уравнение (12.11) соответствует расчетам по касательному модулю в теории неупругой устойчивости стержней. Расчеты по этому уравнению ведут графически. Строят график зависимости $\lambda = \pi \sqrt{cE_k / \sigma_{кр}}$ (рис. 12.5, б). Если для данного материала нет диаграммы $\sigma - \varepsilon$ для приближенных расчетов, можно пользоваться эмпирической формулой

$$\sigma_{кр} = \sigma_B - (\sigma_B - \sigma_T) \frac{\lambda}{\lambda_T}, \quad (12.12)$$

где σ_B — предел прочности.

Сжатые плоские элементы стержня в упругой области рассчитывают на местную устойчивость по формуле для длинных пластин:

$$\sigma_{кр} = k \frac{\pi^2}{12(1-\mu^2)} E \left(\frac{h}{b} \right)^2, \quad (12.13)$$

где b — ширина элемента стержня; h — его толщина. Для плоского элемента, ограниченного по краям двумя другими элементами (рис. 12.6, а), можно принять коэффициент $k = 4,0$, как для шарнирно опертой пластины. Для плоского элемента с одним свободным краем полки (рис. 12.6, б) $k = 0,46$, как для длинной пластины, одна сторона которой свободна, другая — шарнирно оперта.

Расчет местной устойчивости элемента стержня за пределом упругости очень сложен и неточен. Надежные значения критических напря-

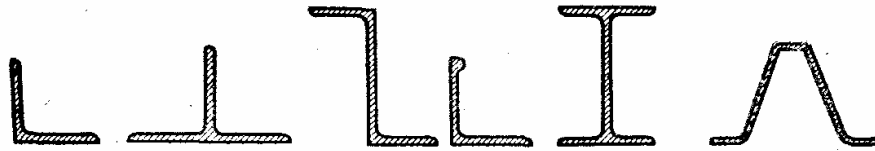


Рис. 12.7

жений обычно получают путем испытаний серии образцов. Приближенно критическое напряжение местной потери устойчивости можно подсчитать по соотношению

$$\sigma_{кр} = \sigma_B - (\sigma_B - \sigma_T) \frac{b/h}{(b/h)_T}, \quad (12.14)$$

где

$$(b/h)_T = \sqrt{k \frac{E}{\sigma_T} \frac{\pi^2}{12(1-\mu^2)}}.$$

При этом для всех элементов стержня выполняется условие

$$b/h < \sqrt{k \frac{E}{\sigma_T} \frac{\pi^2}{12(1-\mu^2)}} = 0,95 \sqrt{k \frac{E}{\sigma_T}}. \quad (12.15)$$

При $k = 4,0$ и $k = 0,46$ соответственно получаем

$$b/h < 1,9 \sqrt{E/\sigma_T} \text{ и } b/h < 0,64 \sqrt{E/\sigma_T}.$$

Эти условия соответствуют рациональной конфигурации сечения любого тонкостенного стержня, когда можно не опасаться преждевременной местной потери устойчивости. Примеры поперечных сечений продольных элементов показаны на рис. 12.7.

Расчет стрингерного отсека. К стрингерным конструкциям относится вариант, в котором толщина обшивки и расстояние между стрингерами выбраны так, что обшивка не теряет устойчивости до разрушения отсека. Расчетное разрушающее напряжение сжатия для отсека равно

$$\sigma = N_{p.э.кв.} / (\pi D h + S_c n), \quad (12.16)$$

где D — диаметр отсека; h — толщина обшивки; n — число стрингеров; S_c — площадь сечения стрингера; $N_{p.э.кв.}$ — расчетная эквивалентная сжимающая сила.

Оптимальная в весовом отношении конструкция отсека соответствует максимальному значению расчетного разрушающего напряжения при заданной величине $N_{p. экв}$. Оно определяется значением погонной сжимающей нагрузки

$$T_1 = N_{p. экв} / (\pi D).$$

Чем меньше сила T_1 , тем труднее достичь высоких критических сжимающих напряжений, так как при уменьшении толщины обшивки увеличивается число стрингеров, соответственно уменьшается площадь их сечения и критическое сжимающее напряжение. Частое подкрепление стрингеров шпангоутами приводит к увеличению веса конструкции. Кроме того, при уменьшении толщины обшивки резко повышается ее температура и соответственно снижаются механические характеристики материала. Только в конструкции отсека с обшивкой, подкрепленной частым гофром, удастся использовать тонкую обшивку без снижения устойчивости.

При выбранной толщине обшивки расстояние между стрингерами определяют из условия равенства критического напряжения потери устойчивости обшивки расчетному разрушающему напряжению σ для всего отсека. Из формулы (12.8) получаем расстояние между стрингерами

$$t_c = 1,9h \sqrt{\frac{E}{\sigma - 0,1Eh/R}}; \quad (12.17)$$

число стрингеров

$$n \geq \pi D / t_c; \quad (12.18)$$

сжимающую силу, действующую на стрингер,

$$F_c = (N_{p. экв} - \pi Dh\sigma) / n; \quad (12.19)$$

площадь сечения стрингера

$$S_c = F_c / \sigma. \quad (12.20)$$

В формулах (12.17) ... (12.20) основной неизвестной является величина σ . Напряжение определяют, исходя из требований минимального веса отсека. Для этого задаются несколькими значениями σ , определяют площади стрингеров S_c , подбирают форму сечения стрингера и подкрепляющих его шпангоутов, учитывая, что критические напряжения потери общей и местной устойчивости ограничены величиной σ .

Пример. Определим конструктивные размеры элементов стрингерного отсека диаметром $D = 3000$ мм, длиной $l = 900$ мм. Сжимающая сила $N_{p. экв} = 4000$ кН; материал — алюминиевый сплав: $E = 72\,000$ МПа, $\sigma_T = 280$ МПа, $\sigma_B = 400$ МПа.

При толщине обшивки $h = 2,5$ мм и расчетном разрушающем напряжении $\sigma = 100$ МПа из формулы (12.17) получаем:

$$t_c = 1,9h \sqrt{\frac{E}{\sigma - 0,1Eh/R}} = \\ = 1,9 \cdot 2,5 \sqrt{\frac{7,2 \cdot 10^4}{100 - 0,1 \cdot 7,2 \cdot 10^4 \cdot 2,5 / 1500}} \text{ мм} = 135 \text{ мм};$$

из формулы (12.18)

$$n = \pi D/t_c = \pi \cdot 3000/135 = 70.$$

Из формулы (12.19)

$$F_c = \frac{N_{p.э.кв} - \pi D h \sigma}{n} = \frac{4000 - \pi \cdot 3,0 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} \cdot 10}{70} \text{ кН} = 23,6 \text{ кН};$$

наконец, из формулы (12.20)

$$S_c = F_c/\sigma = (23\ 600/100) \text{ мм}^2 = 236 \text{ мм}^2.$$

Из сортамента пресованных профилей выбираем стрингер в форме равнобокого уголка $35 \times 35 \times 3,2$, площадь сечения которого $S_c = 236,2 \text{ мм}^2$. Сечение стрингера вместе с участком обшивки изображено на рис. 12.8. Критическое напряжение потери местной устойчивости для стрингера определяем по формуле (12.13) при $k = 0,46$. Получаем $\sigma_{кр} = 300 \text{ МПа}$, что значительно выше принятого значения σ . Таким образом, потеря местной устойчивости стрингера не лимитирует прочность отсека.

Для проверки стрингера на общую устойчивость вычисляем момент инерции стрингера с учетом площади обшивки между стрингерами относительно общего центра тяжести стрингера и обшивки; кривизну обшивки не учитываем:

$$\begin{aligned} y_T &= \frac{\sum_i S_i y_i}{\sum_i S_i} = \\ &= \frac{2,5 \cdot 135 \cdot 1,25 + 3,2 \cdot 35 \cdot 4,1 + 31,8 \cdot 3,2 \cdot 21,6}{2,5 \cdot 135 + 3,2 \cdot 35 + 31,8 \cdot 3,2} \text{ мм} = 5,6 \text{ мм}; \\ J_x &= \sum_i J_i + \sum_i S_i (y_i - y_T)^2 = \\ &= \left(\frac{3,2 \cdot 31,8^3}{12} + \frac{135 \cdot 2,5^3}{12} + \frac{35 \cdot 3,2^3}{12} + 338 \cdot 4,35^2 + 112 \cdot 1,5^2 + 102 \cdot 16^2 \right) \text{ мм}^4 = \\ &= 41,6 \cdot 10^3 \text{ мм}^4. \end{aligned}$$

Площадь стрингера с присоединенной обшивкой

$$S = S_c + t_c h = (236 + 135 \cdot 2,5) \text{ мм}^2 = 574 \text{ мм}^2.$$

Гибкость продольного элемента на длине всего отсека

$$\lambda = l \sqrt{\frac{S}{J_x}} = 900 \sqrt{\frac{5,74 \cdot 10^2}{4,16 \cdot 10^4}} = 106.$$

Критические напряжения для стрингера с обшивкой, как для стержня, определяются соотношением (12.9). При $c = 2,0$

$$\sigma_{кр} = c \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = 2,0 \frac{\pi^2 \cdot 7,2 \cdot 10^4}{106^2} \text{ МПа} = 127 \text{ МПа}.$$

Полученные напряжения выше тех, которыми мы задавались.

Если теперь повысить расчетное разрушающее напряжение σ , то, чтобы сохранить устойчивость обшивки между стрингерами, нужно увеличить число стрингеров и уменьшить площадь их сечений. Это приводит к тому, что уменьшается момент инерции сечения и гибкость продольных элементов на полной длине отсека. Условие общей устойчивости (12.9) удастся соблюсти, лишь разбив длину отсека на два или более участков шпангоутами. Под длиной l в соотношении для гибкости $\lambda = l/\rho$ подразумевается длина каждого участка.

Расчет панельного отсека. Сухие отсеки панельной конструкции изготавливают из панелей, получаемых пресованием или механической обработкой толстых листовых заготовок. Панели только с продольны-

ми ребрами (рис. 12.9) называются стрингерными, панели с продольными и поперечными ребрами — вафельными. В тех и других панелях расстояние между ребрами выбирают из условия, чтобы обшивка, или плотн о п а н е л и, не теряла устойчивости раньше общей потери устойчивости отсека.

Расчет панельных отсеков, работающих при осевом сжатии, производится на общую устойчивость (как конструктивно-анизотропной оболочки) и на местную устойчивость, определяемую устойчивостью элементов панелей. При расчете баков вафельной конструкции была получена формула для критической погонной сжимающей силы при

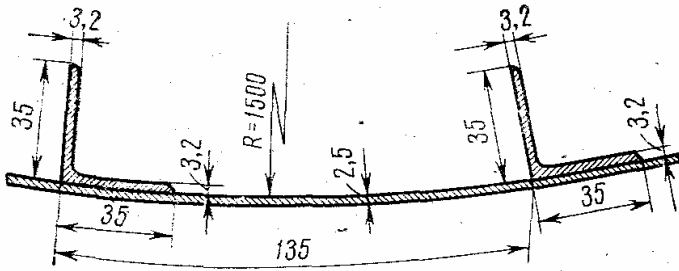


Рис. 12.8

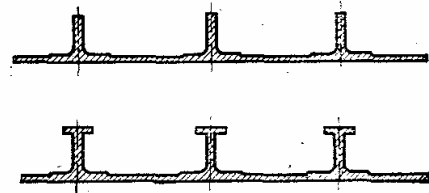


Рис. 12.9

осесимметричной форме потери устойчивости (см. § 11.3). Соответствующее критическое сжимающее напряжение можно определить по формуле

$$\sigma_{кр} = \frac{2E}{Rh_c} \sqrt{\frac{J_c h_{ш}}{t_c}}, \quad (12.21)$$

где

$$h_{ш} = h + S_{ш}/t_{ш}; \quad h_c = h + S_c/t_c; \quad (12.22)$$

h — толщина обшивки; $S_{ш}$ и S_c — площади поперечного и продольного подкреплений; $t_{ш}$ и t_c — шаг поперечного и продольного подкреплений; J_c — момент инерции поперечного сечения на длине t_c .

При расчете реальной конструкции нужно учитывать, что максимальные критические напряжения зависят от формы потери устойчивости и начальных несовершенств. С учетом этих факторов формулу для определения критических напряжений можно представить в виде

$$\sigma_{кр} = k \frac{2E}{Rh_c} \sqrt{\frac{J_c h_{ш}}{t_c}}, \quad (12.23)$$

где коэффициент k отражает влияние формы потери устойчивости и начальных несовершенств. Наиболее надежное значение коэффициента k можно получить, используя результаты испытаний опытных отсеков конструкций или их моделей.

Если такие испытания не проводятся, можно руководствоваться следующими соображениями. В панельных конструкциях, изготовляемых из толстых листов, роль начальных несовершенств существенно меньше, чем в гладкой обшивке из тонколистового материала. Если для гладких оболочек $k = 0,2 \dots 0,3$, то для панельных $k = 0,3 \dots$

... 0,5. Меньшее значение коэффициента k соответствует стрингерно-панельному отсеку, большее — вафельному, когда жесткости поперечных и продольных подкрепляющих элементов имеют один порядок. Таким образом, для расчета отсеков из стрингерных панелей можно пользоваться приближенной формулой (12.23), приняв $k = 0,3$, для вафельных отсеков в той же формуле принимают $k = 0,5$. Расчет на местную устойчивость сводится к проверке устойчивости сжатой обшивки в клетке между соседними стрингерами и ребер как пластинок по формулам (12.8) и (12.13).

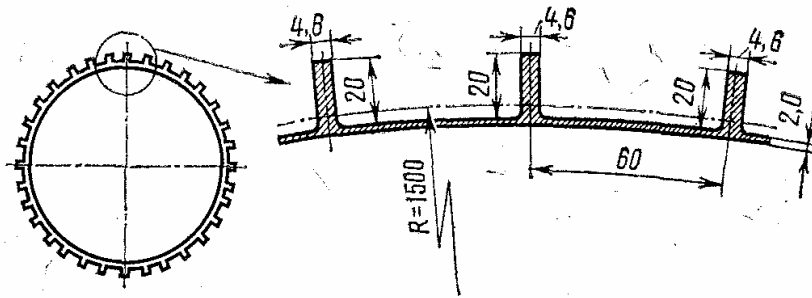


Рис. 12.10

Пример. Проведем расчет панельного отсека при тех же условиях, что и стрингерного отсека в предыдущем примере. Пусть толщина обшивки $h = 2$ мм, расчетное разрушающее напряжение $\sigma = 120$ МПа. Расстояние между продольными подкреплениями из условия местной устойчивости обшивки должно быть не более определяемого формулой (12.17)

$$t_c = 1,9h \sqrt{\frac{E}{\sigma - 0,1Eh/R}}$$

$$= 1,9 \cdot 2 \sqrt{\frac{7,2 \cdot 10^4}{120 - 0,1 \cdot 7,2 \cdot 10^4 \cdot 2 / 1500}} \text{ мм} = 97 \text{ мм.}$$

Выбираем $t_c = 60$ мм. Тогда сила, приходящаяся на один продольный элемент,

$$F = \frac{t_c}{\pi D} (N_{p. экв} - \pi D h \sigma) = \frac{60}{\pi 3000} (4000 - \pi \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 120) \text{ Н} = 11 \text{ кН,}$$

Площадь каждого элемента

$$S = \frac{F}{\sigma} = \frac{11}{12 \cdot 10^4} \text{ м}^2 = 92 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 = 92 \text{ мм}^2.$$

Если теперь принять высоту подкрепления $b = 20$ мм, то толщина его будет $h = S/b = 4,6$ мм (рис. 12.10).

Определим момент инерции сечения относительно центра тяжести

$$y_T = \frac{\sum S_i y_i}{\sum S_i} = \frac{60 \cdot 2 \cdot 1 + 20 \cdot 4,6 \cdot 12}{60 \cdot 2 + 20 \cdot 4,6} \text{ мм} = 5,8 \text{ мм;}$$

$$J_x = \sum J_i + \sum S_i (y_i - y_T)^2 =$$

$$= \left(\frac{60 \cdot 2^3}{12} + \frac{4,6 \cdot 20^3}{12} + 120 \cdot 4,8^2 + 92 \cdot 6,2^2 \right) \text{ мм}^4 = 9400 \text{ мм}^4.$$

Приведенная толщина обшивки отсека

$$h_c = h + \frac{S}{t_c} \approx \left(2 + \frac{92}{60} \right) \text{ мм} = 3,53 \text{ мм}.$$

Если в отсеке отсутствует поперечный набор, то $h_{\text{III}} = h$. Критические напряжения общей устойчивости отсека определим по уравнению (12.23) при коэффициенте $k = 0,3$;

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{кр}} &= k \frac{2E}{Rh_c} \sqrt{\frac{J_c h_{\text{III}}}{t_c}} = \\ &= \left(0,3 \frac{2 \cdot 7,2 \cdot 10^4}{1500 \cdot 3,53} \sqrt{\frac{9400 \cdot 2}{60}} \right) \text{ МПа} = 145 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Это напряжение выше по значению, чем заданное, поэтому отсек удовлетворяет условию общей устойчивости. Критические напряжения потери местной устойчивости ребра при $b/h = 20/4,6 = 4,35$ оказываются значительно выше предела текучести материала.

В § 12.1 рассматривались особенности конструкций сухих отсеков, имеющих панели из гофров. Расчет таких подкрепленных отсеков, по существу, мало отличается от расчета стрингерного панельного отсека. Общую устойчивость проверяют по формуле (12.23) с коэффициентом $k = 0,3$.

Особое внимание необходимо уделить местной устойчивости элементов гофрированной панели. Для этого всю конструкцию расчлениают на систему плоских пластин и цилиндрических оболочек. Критические напряжения местной потери устойчивости плоского элемента определяют по формуле (12.13), а цилиндрического — по формуле (12.7) при коэффициенте $k_{\text{хл}} = 0,1$.

Расчет лонжеронного отсека. Лонжеронный отсек — это конструкция, в которой допускается потеря устойчивости обшивки раньше потери устойчивости продольных элементов (лонжеронов). Расстояние между лонжеронами уже не лимитируется устойчивостью обшивки. Число лонжеронов выбирают из других соображений. Так, в двигательных отсеках число лонжеронов обычно бывает минимальным и определяется конструкцией двигательной установки. В переходных отсеках число лонжеронов должно удовлетворять требованиям равномерной передачи нагрузок. Толщина обшивки в лонжеронном отсеке может быть минимальной — она определяется температурными и технологическими условиями. Например, чересчур тонкая обшивка сильно нагревается на активном участке полета — максимальная температура обшивки не должна быть выше той, при которой происходит значительное снижение механических характеристик материала. После потери устойчивости обшивка почти не участвует в передаче сжимающих сил. Только узкая полоса обшивки, прилегающая к лонжерону, работает совместно с ним на сжатие. Эта часть обшивки называется *присоединенной обшивкой*. Ее ширину $b_{\text{пр}}$ обычно определяют по приближенной формуле

$$b_{\text{пр}} = 1,9h \sqrt{E/\sigma_{\text{л}}}, \quad (12.24)$$

где $\sigma_{л}$ — напряжение в лонжероне; h — толщина обшивки; E — модуль упругости материала. Формула (12.24) получена из условия равенства критического сжимающего напряжения длинной шарнирно опертой пластины шириной $b_{пр}$ напряжению $\sigma_{л}$.

Площадь присоединенной обшивки при различных вариантах крепления обшивки к лонжерону определяется следующим образом. Если обшивка прикреплена к лонжерону так, как показано на рис. 12.11, а, то участок шириной $b_{пр}$, определенный по формуле (12.24), должен располагаться симметрично относительно точки крепления обшивки к лонжерону. Общая ширина присоединенной обшивки $t = b_{пр}$. Если обшивка прикреплена к лонжерону так, как показано на рис. 12.11, б, в, и $b_{пр}$ меньше Δ (случай б), то ширина присоединенной обшивки $t = 2b_{пр}$. Если $\Delta < b_{пр}$ (случай в), ширина присоединенной обшивки $t = \Delta + b_{пр}$. Суммарная площадь лонжерона и присоединенной обшивки $S_{л} + th$. Если n — число лонжеронов, то разрушающее сжимающее напряжение

$$\sigma_{л} = N_{р.экрв} / [n (S_{л} + th)]. \quad (12.25)$$

Это напряжение не должно превышать критическое сжимающее напряжение лонжерона как стержня. Из условия $\sigma_{л} = \sigma_{кр}$ путем проб можно определить площадь и момент инерции сечения лонжерона.

Так как обшивка не позволяет изгибаться лонжерону в плоскости, касательной к поверхности отсека, то $\sigma_{кр}$ определяют по формулам (12.9) или (12.12) и момент инерции сечения нужно брать относительно оси, параллельной этой плоскости. При небольших критических напряжениях потери общей устойчивости лонжерона отсек можно подкрепить шпангоутами, разбив длину лонжерона на два или более участков. Форму сечения лонжерона выбирают по результатам расчетов его элементов на местную устойчивость.

Пример. Пусть лонжеронный отсек имеет размеры $D = 3000$ мм, $l = 1000$ мм и нагружен сжимающей силой $N_{р.экрв} = 4000$ кН. Материал отсека — алюминиевый сплав с механическими характеристиками $E = 72\,000$ МПа, $\sigma_{в} = 400$ МПа, $\sigma_{т} = 280$ МПа. Определим основные конструктивные размеры отсека.

При выборе толщины обшивки должны учитываться возможный аэродинамический нагрев и технологические требования. Примем толщину обшивки $h = 1$ мм. Для определения геометрии лонжерона нужно задаться числом лонжеронов n . Примем $n = 24$. Тогда усилие, воспринимаемое одним лонжероном,

$$F_{л} = N_{р.экрв} / n = (4 \cdot 10^3 / 24) \text{ кН} = 167 \text{ кН}.$$

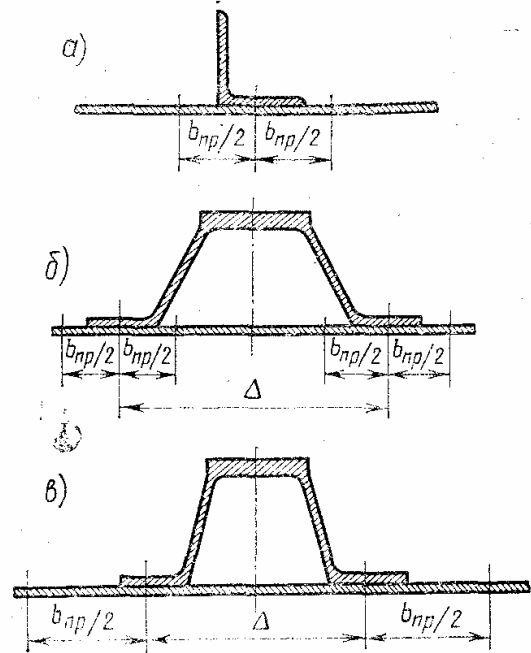


Рис. 12.11

По формуле (12.9) находим критические напряжения общей устойчивости, считая $c = 2$:

$$\sigma_{кр} = 2\pi^2 E / \lambda^2 = 2 \cdot 9,87 \cdot 7,2 \cdot 10^4 / 23,3^2 > \sigma_T.$$

Полученные значения критических напряжений местной и общей устойчивости выше, чем напряжения, принятые в качестве первого приближения. Лонжеронный отсек в этом случае не теряет несущую способность.

§ 12.3. Ферменные переходные отсеки и узлы крепления двигателей

На рис. 12.13 изображена схема переходного отсека. Отсек состоит из двух кольцевых шпангоутов, соединенных с обшивкой каждой ступени ракеты, и симметрично расположенных стержневых элементов фермы. От ступеней ракеты на отсек действуют нагрузки, значения которых определяют из эпюр моментов M , нормальных N и перерезывающих Q сил для соответствующего расчетного случая.

Фермы неподвижно закрепленных двигателей часто выполняют по такой схеме, что и переходные отсеки. Нагрузки на ферму крепления двигателя определяются осевой силой N , перерезывающей силой Q и изгибающим моментом M .

Осевая сила

$$N = (F - G_d n_x) \eta_d, \quad (12.26)$$

где F — тяга двигательной установки; G_d — вес камеры двигателя и агрегатов, прикрепленных к ферме; n_x — осевая перегрузка; η_d — коэффициент динамичности. Наибольшие значения коэффициента динамичности соответствуют старту, переходному режиму, отсечке двигателя. Приблизительно коэффициент динамичности для старта можно определить, зная отношение времени t_1 выхода двигателя на режим к периоду T собственных колебаний системы двигатель — ферма. Для $t_1/T > 0,5$ величину η_d определяют по формуле

$$\eta_d = 1 + T / (\pi t_1). \quad (12.27)$$

Перерезывающая сила и изгибающий момент для фермы двигателя равны:

$$Q = G_d n_y; \quad (12.28)$$

$$M = G_d n_y l, \quad (12.29)$$

где n_y — поперечная перегрузка, l — расстояние от центра тяжести камеры и агрегатов до узлов крепления камеры к ферме. Зависимости (12.26) ... (12.29) показывают, что ферму надо рассчитывать в основном в двух расчетных случаях: в случае максимального осевого усилия (обычно соответствует запуску) и в случае максимальной поперечной перегрузки.

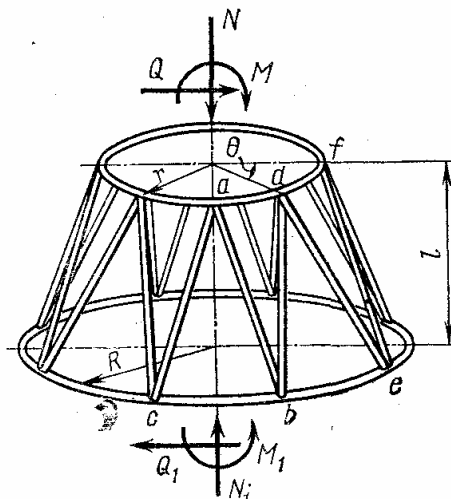


Рис. 12.13

Основную роль в напряженном состоянии стержней ферм играют продольные силы. Моменты и перерезывающие силы в стержнях являются второстепенными факторами. При расчете считают, что стержни фермы соединены идеальными шаровыми шарнирами. Торцовые сечения фермы при деформации принимают плоскими, т. е. считают, что узлы фермы, соединяющие ее со шпангоутом, прикреплены к твердому телу и лежат в одной плоскости. Благодаря жесткости обшивки изгибающие напряжения шпангоутов «из плоскости», как правило, невелики. Основную роль в напряженном состоянии шпангоута играет изгиб его в своей плоскости. Таким образом, при расчете переходной отсек рассматривают как ферму, шарнирно прикрепленную к твердому телу в сечениях соединения со шпангоутами. Шпангоуты рассчитывают как плоские рамы, нагруженные в узлах крепления стержней.

Расчет сил в элементах фермы. Для определения сил, действующих на узел элемента фермы, воспользуемся соотношениями для погонных осевых T_1 и касательных S сил в сечении корпуса радиусом r :

$$T_1 = \frac{N}{2\pi r} + \frac{M}{\pi r^2} \cos \theta; \quad (12.30)$$

$$S = \frac{Q}{\pi r} \sin \theta \mp \frac{M}{\pi r^2} \frac{R-r}{l} \sin \theta. \quad (12.31)$$

Здесь N , Q , M — соответственно осевая и перерезывающая силы и изгибающий момент; θ — угловая координата, отсчитываемая от плоскости действия момента (рис. 12.13). При числе n узлов фермы на торце отсека расстояние между ними у шпангоута меньшего диаметра равно $t = 2\pi r/n$. Обозначим номер узла через i (узел, совпадающий с плоскостью действия момента, имеет номер $i = 0$, остальные $i = 1, 2, \dots, n-1$), получим угол между радиусом, проходящим через узел, и плоскостью отсчета:

$$\theta_i = t \cdot i / r \text{ или } \theta_i = 2\pi i / n.$$

Используя последние соотношения и уравнения (12.30) и (12.31), куда вместо величины θ подставим θ_i , находим осевую F_i и касательную S_i составляющие нагрузки на каждый i -й узел меньшего шпангоута фермы:

$$F_i = \frac{1}{n} \left(N + \frac{2M}{r} \cos \frac{2\pi i}{n} \right); \quad (12.32)$$

$$S_i = \frac{2}{n} \left(Q \mp \frac{M}{r} \frac{R-r}{l} \right) \sin \frac{2\pi i}{n}.$$

Максимальная осевая сила приходится на узел, совпадающий с плоскостью действия момента M :

$$F_{\max} = \frac{1}{n} \left(N + \frac{2M}{r} \right); \quad (12.33)$$

наибольшая касательная сила — у узла в перпендикулярной плоскости:

$$S_{\max} = \frac{2}{n} \left(Q \mp \frac{M}{r} \frac{R-r}{l} \right). \quad (12.34)$$

Раскладывая силу F_i по двум направлениям: радиальному и в плоскости элемента фермы, а составляющую в плоскости фермы вместе с силой S_i — по стержням, получим нагрузку в каждом стержне

$$F = F_i \frac{L}{2l} \pm S_i \frac{L}{2R \sin(\pi/n)}. \quad (12.35)$$

Здесь плюс соответствует стержню, у которого осевая и касательная составляющие суммируются, а минус — соседнему стержню, где происходит вычитание сил. Длина стержня L связана с размерами отсека и числом узлов соотношением

$$L = \sqrt{R^2 + r^2 + l^2 - 2Rr \cos(\pi/n)}.$$

Таким образом, в любом стержне фермы сила

$$F = \frac{1}{n} \left[\left(N + \frac{2M}{r} \cos \frac{2\pi i}{n} \right) \frac{L}{2l} \pm \left(Q \mp \frac{M}{r} \frac{R-r}{l} \right) \frac{L}{R} \frac{\sin(2\pi i/n)}{\sin(\pi/n)} \right]. \quad (12.36)$$

Для стержней, узлы которых совпадают с плоскостью действия момента и перпендикулярны ей, силы равны

$$F_f = \frac{1}{n} \frac{L}{2l} \left(N + \frac{2M}{r} \right); \quad (12.37)$$

$$F_a = \frac{1}{n} \left[N \frac{L}{2l} \pm \left(Q \mp \frac{M}{r} \frac{R-r}{l} \right) \frac{L}{R \sin(\pi/n)} \right].$$

Индексы указывают соответствующие узлы на рис. 12.13.

От соотношения между значениями внешних нагрузок зависит, какая из сил оказывается расчетной для элемента фермы. Определяющей нагрузкой здесь является осевая сжимающая сила N . Сечение сжатых стержневых элементов фермы определяют расчетом на устойчивость. Значение силы, соответствующей потере устойчивости стержня постоянного сечения, вычисляют по формуле Эйлера. Соответствующие критические напряжения, например, в стержне трубчатого сечения с моментом инерции $J = \pi R^3 h$ и площадью $S = 2\pi R h$ равны

$$\sigma_{кр} = c \frac{\pi^2}{2} E \left(\frac{R}{L} \right)^2, \quad (12.38)$$

где R и L — соответственно радиус и длина трубы; коэффициент $c = 1,0 \dots 1,5$ учитывает жесткость опор. Это соотношение справедливо при напряжениях $\sigma < \sigma_T$, где σ_T — предел текучести материала.

Для напряжений $\sigma > \sigma_T$ критические напряжения определяют по экспериментальным кривым или по приближенной зависимости

$$\sigma_{кр} = \sigma_T + \frac{\sigma_B - \sigma_T}{\lambda_T} (\lambda_T - \lambda), \quad (12.39)$$

где $\lambda_T = \pi \sqrt{cE/\sigma_T}$; $\lambda = L \sqrt{S/J}$; σ_B — предел прочности.

С точки зрения рационального использования материала в конструкции выгодно подбирать сечения так, чтобы напряжения были большими. При заданных величинах L , E и силе F большие напряжения по соотношению (12.38) соответствуют большим размерам сечения при малых толщинах. Стержень при этом становится оболочкой. Оказываются возможными формы потери устойчивости, характерные для оболочек (ромбовидные вмятины, гофры). Потерю устойчивости такого вида для элементов фермы называют местной, в отличие от потери общей устойчивости стержня. Осевые сжимающие напряжения, соответствующие потере местной устойчивости цилиндрической оболочки, определяют по формуле

$$\sigma_{кр} = kEh/R, \quad (12.40)$$

где k — коэффициент, значения которого зависят от отношения R/h . В дальнейшем будем считать $k = 0,15$.

Исследуем влияние силы F и длины L на значение напряжений и геометрию стержня. Из условия равнопрочности выгодно подобрать сечение так, чтобы напряжения, соответствующие потере общей устойчивости, определяемые формулой (12.38), и местные критические напряжения по формуле (12.40) были равны напряжениям, возникающим в стержне от заданной силы

$$\sigma = F/(2\pi Rh). \quad (12.41)$$

Исключив из соотношений (12.38), (12.40), (12.41) величины R и h , получим

$$\sigma = \left(\frac{\pi}{4} k\right)^{1/3} E^{2/3} \left(\frac{F}{L^2}\right)^{1/3}. \quad (12.42)$$

Показателем весовой эффективности всякого силового элемента является отношение σ/γ , где γ — удельный вес материала. Для сжатой трубчатой стойки

$$\frac{\sigma}{\gamma} = \left(\frac{\pi}{4} k\right)^{1/3} \frac{E^{2/3}}{\gamma} \left(\frac{F}{L^2}\right)^{1/3}.$$

Пользуясь этой зависимостью, можно сравнивать весовую эффективность различных материалов при работе конструкции в упругой области. Введем коэффициент, показывающий, во сколько раз сравниваемый материал эффективнее по весу, например, алюминиевого сплава:

$$n = (E^{2/3}/\gamma)/(E_{Al}^{2/3}/\gamma_{Al}). \quad (12.43)$$

Ниже представлены значения этого коэффициента и другие характеристики для некоторых материалов:

Материал	E , МПа	γ , Н/м ³	n
Алюминий . . .	$7,2 \cdot 10^4$	$2,9 \cdot 10^4$	1
Магний	$4,2 \cdot 10^4$	$1,7 \cdot 10^4$	1,17
Титан	$12 \cdot 10^4$	$4,5 \cdot 10^4$	0,885
Бериллий . . .	$31 \cdot 10^4$	$1,8 \cdot 10^4$	4,17
Сталь	$21 \cdot 10^4$	$7,8 \cdot 10^4$	0,75

Наиболее выгодным материалом для сжатых стержней при работе материала в упругой области оказывается бериллий, затем идут магний, алюминий и т. д. Эта последовательность справедлива для температуры $t = 20^\circ\text{C}$. При температуре $t \geq 300^\circ\text{C}$ более эффективными становятся бериллий, титан и сталь. При напряжениях $\sigma > \sigma_T$ критические напряжения для стержня почти равны пределу текучести и тогда показатель весовой эффективности материала $n = (\sigma_T/\gamma)/(\sigma_{TAl}/\gamma_{Al})$. Преимущества и здесь остаются за бериллием, титаном и сталью.

§ 12.4. Отсеки, нагруженные внешним давлением

Работоспособность нагруженного внешним давлением отсека, как правило, определяется его устойчивостью, причем потеря устойчивости тонкостенных конструкций современных летательных аппаратов обычно происходит в упругой области. Конструктивно такие отсеки выполняются в различных вариантах (рис. 12.14): вафельные оболочки с преобладанием кольцевых ребер (а); оболочки, подкрепленные силовым набором (в основном шпангоутами) (б); оболочки с поперечной гофрировкой (в, г); трехслойные оболочки с несущими слоями из металла

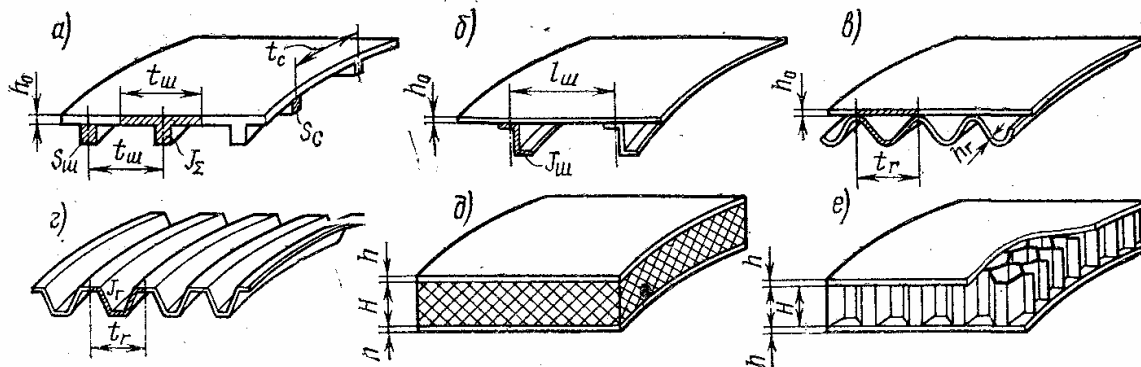


Рис. 12.14

или высокомодульного композиционного материала, например углепластика, и слоем заполнителя из пенопласта (д) или сот (е). Основная цель создания таких конструкций стенки — увеличение окружной изгибной жесткости по сравнению с гладкой однослойной оболочкой той же массы. Следует отметить, что для нагруженного внешним давлением отсека стенка, выполненная в виде гладкой однослойной оболочки, может оказаться рациональной только в случае очень коротких отсеков или при очень больших давлениях.

Общая потеря устойчивости и прочность цилиндрического отсека. Расчет на общую устойчивость нагруженного внешним давлением отсека может быть произведен на основе полубезмоментной теории. Если осевая погонная сила имеет тот же порядок, что и окружная погонная сила, возникающая в стенке отсека от внешнего давления, то критическое давление, соответствующее общей потере устойчивости отсека, можно подсчитывать без учета осевой силы по формуле (см. § 8.4)

$$p_{кр.общ} = (n^2 - 1) \frac{D_2}{R^3} + \alpha^4 \left(\frac{\pi R}{l} \right)^4 \frac{B_1}{R n^4 (n^2 - 1)}, \quad (12.44)$$

где l и R — соответственно длина и радиус отсека; D_2 и B_1 — жесткость стенки отсека на изгиб в окружном направлении и на растяжение в осевом; n — число волн, образующихся в окружном направлении при потере устойчивости и определяемое в каждом конкретном случае из условия минимума величины $p_{кр.общ}$. Входящий в выражение (12.44) коэффициент α зависит от способа закрепления краев отсека. Так, если оба края отсека свободно оперты или соединены со шпангоутами, жесткими только в своей плоскости, то $\alpha = 1$; если оба края отсека жестко закреплены относительно радиальных и осевых смещений, например соединены с другими жесткими отсеками, то $\alpha = 1,5$; для отсека с одним жестко заделанным краем, а другим свободным $\alpha = 0,6$.

Для практических расчетов, особенно проектировочных, выражение (12.44) неудобно тем, что число волн n каждый раз нужно находить подбором. Но, как уже отмечалось в § 8.4, это выражение можно упростить и привести к формуле

$$p_{кр.общ} = 4\alpha \left(\frac{\pi R}{l} \right) \left(\frac{D_2}{3R^3} \right)^{3/4} \left(\frac{B_1}{R} \right)^{1/4}, \quad (12.45)$$

причем число окружных волн n , образующихся при потере устойчивости, оценивается зависимостью

$$n^2 \approx \alpha \frac{\pi R}{l} \sqrt{\frac{3B_1 R^2}{D_2}}.$$

Формулой (12.45) можно пользоваться для расчета отсеков средней длины, когда найденное по последней формуле значение $n^2 > 10$.

Для достаточно длинных оболочек при отношении $l/R > \alpha (B_1 R^2 / D_2)^{1/4}$, вторым слагаемым в выражении (12.44) можно пренебречь. Тогда $n = 2$ и

$$p_{кр.общ} = 3D_2/R^3. \quad (12.46)$$

Давление $p_{хл.общ}$, при котором теряет устойчивость реальная оболочка, определяют с помощью коэффициента $k_{хл}$:

$$p_{хл.общ} = k_{хл} p_{кр.общ}. \quad (12.47)$$

Значение коэффициента $k_{хл}$ для каждого конструктивного варианта отсека определяют экспериментально. В оценочных расчетах на общую устойчивость можно брать $k_{хл} = 1$.

Величины B_1 и D_2 подсчитываются следующим образом. Для отсека вафельного типа (рис. 12.14, а)

$$B_1 = E (h_0 + S_c/t_c), \quad D_2 = EJ_{\Sigma}/t_{\text{ш}}, \quad (12.48)$$

где EJ_{Σ} — суммарная изгибная жесткость окружного ребра и относящегося к нему участка обшивки (на рисунке заштриховано); $t_{\text{ш}}$ — шаг окружных ребер; h_0 — толщина обшивки; S_c — площадь поперечного сечения осевого ребра; t_c — шаг осевых ребер.

Для тонкой оболочки, подкрепленной большим числом равноотстоящих шпангоутов одинаковой изгибной жесткости (рис. 12.14, б),

$$B_1 = Eh_0; \quad D_2 = Eh_0^3/[12(1 - \mu^2)] + EJ_{\text{ш}}/l_{\text{ш}}, \quad (12.49)$$

где $EJ_{\text{ш}}$ — жесткость изолированного шпангоута; $l_{\text{ш}}$ — шаг шпангоутов. Зависимостью (12.49) для D_2 можно пользоваться, если число промежуточных шпангоутов больше двух.

Когда оболочка подкреплена кольцевым гофром (рис. 12.14, в), следует принять

$$B_1 = Eh_0; \quad D_2 = EJ_{\Sigma}/t_r.$$

Здесь EJ_{Σ} — суммарная изгибная жесткость одного гофра и относящейся к нему части обшивки (на рисунке заштриховано); t_r — шаг гофра.

Для отсека, выполненного в виде изолированной гофрированной оболочки (рис. 12.14, г),

$$B_1 = 0; \quad D_2 = EJ_r/t_r, \quad (12.50)$$

где EJ_r — изгибная жесткость одного гофра; t_r — шаг гофра. В этом случае независимо от длины отсека расчет следует вести по формуле (12.46).

Если не учитывать влияние сдвиговых деформаций пакета [10] и считать $h \ll H$, то при расчете трехслойного отсека (рис. 12.14, д, е) симметричного строения можно принять

$$B_1 = 2E_1 h; \quad D_2 = \frac{E_2}{2} H^2 h, \quad (12.51)$$

где E_1 и E_2 — приведенные модули упругости несущих слоев в соответствующих направлениях (для металлических несущих слоев $E_1 = E_2 = E$).

Приведенные формулы для критического давления справедливы только в упругой области.

Для оценки напряженного состояния тонкостенного отсека можно воспользоваться схемой конструктивно-анизотропной оболочки (см. § 11.3). Окружные и осевые напряжения в такой безмоментной оболочке равны

$$\sigma_1 = -N/(2\pi R h_1); \quad \sigma_2 = -pR/h_2. \quad (12.52)$$

Здесь h_1 и h_2 — приведенные толщины стенок отсека в осевом и окружном направлениях; N — осевая сжимающая сила; p — внешнее давление. Значения h_1 и h_2 зависят от конструкции отсека. Так, например, для вафельного отсека (рис. 12.14, а)

$$h_1 = h_0 + S_c/t_c; \quad h_2 = h_0 + S_{ш}/t_{ш}. \quad (12.53)$$

В случае тонкой обшивки, подкрепленной шпангоутами (рис. 12.14, б), можно принять $h_1 = h_2 = h_0$. А для тонкой оболочки, подкрепленной поперечным гофром (рис. 12.14, в),

$$h_1 = h_0, \quad h_2 = h_0 + \eta h_r, \quad (12.54)$$

где η — отношение длины развертки гофра к шагу гофра.

Обозначим через $p_{пр}$ значение давления, при котором окружное напряжение равно пределу текучести σ_T , т. е.

$$p_{пр} = \sigma_T h_2 / R. \quad (12.55)$$

Для работающих на внешнее давление тонкостенных отсеков величину $p_{пр}$ можно считать предельной по условиям прочности материала. Заметим, что для хрупких материалов, например для высокомодульных углепластиков, при оценке предельного давления вместо предела текучести следует использовать предел прочности материала на сжатие в окружном направлении.

Местная устойчивость. Кроме общей потери устойчивости всего отсека может произойти местная потеря устойчивости элементов стенки отсека. Следует отметить, что выражения «общая» и «местная» здесь довольно условны, поскольку весь отсек является единой упругой системой и всякая его потеря устойчивости является, строго говоря, общей. Но эти выражения удобны, так как они хорошо отражают качественную сторону задачи: при общей потере устойчивости отсек деформируется как ортотропная оболочка с образованием n окружных волн и одной полуволны в продольном направлении (см. § 8.4), причем значение критического давления определяется интегральными жесткостями B_1 и D_2 стенки отсека; местная потеря устойчивости связана с локальным деформированием элементов конструкции стенки отсека, и критическое давление определяется геометрическими и жесткостными характеристиками этих элементов.

На рис. 12.15, а приведена схема работающего на внешнее давление цилиндрического отсека, выполненного в виде *тонкой обшивки, подкрепленной поперечным силовым набором* (шпангоутами). Пунктиром показаны возможные формы потери устойчивости: общей 1, когда обшивка деформируется вместе со шпангоутами, и местной 2, когда шпангоуты практически остаются круговыми, а деформируется в основном обшивка между ними. На рис. 12.15, б изображен типичный график зависимости критического давления подкрепленной оболочки от изгибной жесткости шпангоутов $EJ_{ш}$. При относительно малой жесткости шпангоутов происходит общая потеря устойчивости (участок 1), при этом увеличение жесткости $EJ_{ш}$ приводит к росту критического давления. Через $EJ_{эф}$ обозначено такое значение изгибной жесткости шпангоутов, когда критическое значение давления общей потери ус-

тойчивости отсека равно критическому давлению местной потери устойчивости. При $EJ_{ш} > EJ_{эф}$ происходит местная потеря устойчивости (участок 2) и критическое давление равно $p_{кр.м}$.

Значение критического давления $p_{кр.м}$ местной потери устойчивости обшивки между шпангоутами можно определять по формулам для гладкой свободно опертой оболочки длиной $l_{ш}$, приведенным в

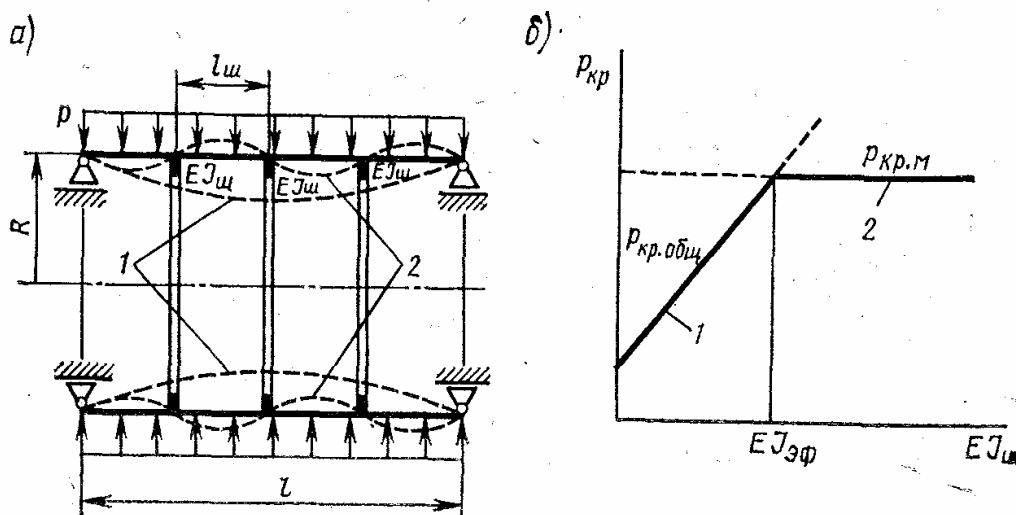


Рис. 12.15

§ 8.4. Значение коэффициента $k_{хл}$, определяющего значение давления $p_{хл}$, при котором происходит хлопок обшивки в реальных условиях, определяют экспериментально для конкретных технологических условий изготовления оболочек. Если такие данные отсутствуют, то для определения $k_{хл}$ можно воспользоваться графиком на рис. 12.16.

Поведение подкрепленного шпангоутами отсека после местной потери устойчивости обшивки зависит от способа закрепления его торцов. Если торцы отсека могут беспрепятственно сближаться, например в случае нагружения отсека всесторонним внешним давлением, то при местной потере устойчивости обшивки между подкреплениями

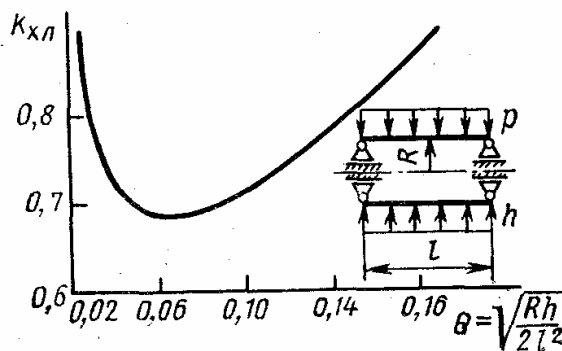


Рис. 12.16

теряется работоспособность всего отсека. Если же торцы отсека жестко закреплены относительно осевых перемещений или нагружены растягивающими силами (например, внутренняя цилиндрическая часть оболочки изображенного на рис. 12.17 кольцевого бака), то и после потери устойчивости обшивки между подкреплениями отсек может продолжать воспринимать возрастающее внешнее давление.

Заметим, что если по условиям эксплуатации отсека нельзя допускать потери устойчивости обшивки между подкреплениями, то жест-

кость шпангоутов по соображениям рационального конструирования должна быть примерно равна $EJ_{эф}$.

В трехслойной стенке местная потеря устойчивости может произойти в виде «сморщивания» несущих слоев, может произойти и потеря устойчивости элементов заполнителя [9, 10]; в вафельной стенке может потерять устойчивость клетка обшивки между продольными и окружными ребрами подобно сжатой пластине; в гофрированном отсеке местная потеря устойчивости — это потеря устойчивости профиля гофра или полосы обшивки между двумя соседними гофрами.

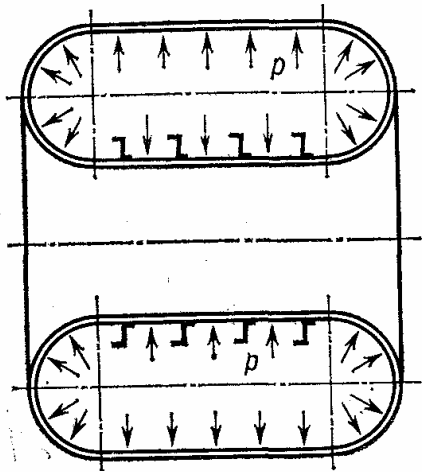


Рис. 12.17

Во всех случаях кривизна стенки отсека в окружном направлении мало влияет на значения критических напряжений. Поэтому экспериментально кри-

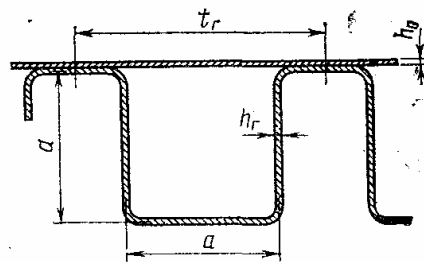


Рис. 12.18

тические напряжения местной потери устойчивости стенки таких отсеков определяют на плоских панелях, а в оценочных проектировочных расчетах эти критические напряжения подсчитывают без учета кривизны стенки отсека.

Зная окружное критическое сжимающее напряжение $\sigma_{2\text{кр.м}}$, легко найти соответствующее ему значение критического внешнего давления

$$p_{\text{кр.м}} = \sigma_{2\text{кр.м}} h_2 / R. \quad (12.56)$$

Заметим, что осевые напряжения σ_1 , подсчитываемые по формуле (12.52) и практически не влияющие на значение $p_{\text{кр.общ}}$, иногда нужно учитывать при определении давления $p_{\text{кр.м}}$. Например, клетку обшивки между ребрами жесткости в вафельном отсеке следует рассчитывать на устойчивость как пластину, сжатую в двух направлениях (см. § 7.3). Расчетное значение критического давления $p_{\text{кр}} = \min \{p_{\text{кр.общ}}; p_{\text{кр.м}}\}$.

Для тонкостенных отсеков обычно не удается достичь значения давления $p_{\text{пр}}$, определяемого формулой (12.55), причем нужно подчеркнуть, что чем меньше внешнее давление, тем труднее создать рациональную конструкцию отсека. Отношение $p_{\text{кр}}/p_{\text{пр}}$ может служить количественным показателем рациональности конструкции отсека из данного материала.

Пример. Рассмотрим цилиндрический гофрированный отсек со следующими параметрами: $l/R = 2$; $h_0 = 1,5h$; $h_r = h$; $a = 40h$; $R/a = 40$; $t_r = 1,6a$ (рис. 12.18). Материал отсека алюминиевый сплав ($E = 300\sigma_T$, $\mu = 0,3$). Расчет произведем в двух вариантах: 1) отсек нагружен только поперечным давлe-

нием p и осевая сила равна нулю; 2) отсек нагружен всесторонним внешним давлением p и осевая сжимающая сила $N = p\pi R^2$. В обоих случаях торцы отсека свободно оперты.

Подсчитаем необходимые для расчета геометрические характеристики стенки отсека, упрощенно считая при этом профиль гофра прямоугольным: $h_1 = 1,5h$; $\eta = 2,25$; $h_2 = 3,75h$; $J_\Sigma = ha^3$.

Жесткостные характеристики стенки выразим через приведенную толщину h_2 и предел текучести материала σ_T :

$$B_1 = Eh_1 = 120\sigma_T h_2; \quad D_2 = EJ_\Sigma/l_\Gamma = 50\sigma_T h_2 a^2.$$

Критическое давление общей потери устойчивости для обоих вариантов находим по формуле (12.45) при $\alpha = 1$:

$$\begin{aligned} p_{\text{кр.общ}} &= 4\alpha \frac{\pi R}{l} \left(\frac{D_2}{3R^3} \right)^{3/4} \left(\frac{B_1}{R} \right)^{1/4} = \\ &= 4 \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2} \frac{\sigma_T h_2}{R} \left(\frac{a}{R} \right)^{3/2} \left(\frac{50}{3} \right)^{3/4} 120^{1/4} = 0,678 \frac{\sigma_T h_2}{R}. \end{aligned}$$

Проверим справедливость этой формулы, подсчитав величину n^2 :

$$n^2 \approx \alpha \frac{\pi R}{l} \sqrt{\frac{3B_1 R^2}{D_2}} = 1 \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{3 \cdot 120}{50}} (40)^2 = 16,7 > 10.$$

Чтобы подсчитать критическое давление местной потери устойчивости для первого варианта, воспользуемся упрощенной полуэмпирической формулой [17]

$$\sigma_{\text{кр.м}} = \sum_i S_i \sigma_{\text{кр.}i} / \sum_i S_i, \quad (12.57)$$

где $\sigma_{\text{кр.}i}$ — критические напряжения отдельных участков профиля гофра и обшивки; S_i — площади этих участков. Контур профиля при этом разбивают на прямолинейные участки и дуги окружностей. Критические напряжения для прямолинейных участков определяют как для удлиненных пластин, сжатых в одном направлении, по формуле

$$\sigma_{\text{кр.}i} = K_\sigma \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{h_i}{b_i} \right)^2 = 3,6E \left(\frac{h_i}{b_i} \right)^2,$$

где h_i , b_i — толщина и ширина i -го участка; $K_\sigma = 4$. Критические напряжения для криволинейных участков определяют как для сжатых в осевом направлении цилиндрических оболочек по формуле

$$\sigma_{\text{кр.}i} = kE \frac{h_i}{r_i},$$

где h_i , r_i — толщина и радиус кривизны соответствующего участка; $k = 0,1 \dots 0,15$. Если при подсчете по этим формулам окажется $\sigma_{\text{кр.}i} > \sigma_T$, то для такого участка берут $\sigma_{\text{кр.}i} = \sigma_T$.

В рассматриваемом случае, пренебрегая криволинейными участками профиля гофра, находим для гофра $\sigma_{\text{кр.г}} = 3,6E (h/a)^2 = 0,675\sigma_T$. Для участка прилегающей к гофру обшивки получим $\sigma_{\text{кр.о}} = 3,6E (1,5h/a)^2 = 1,52\sigma_T$. Поэтому принимаем $\sigma_{\text{кр.о}} = \sigma_T$. По формуле (12.57) находим

$$\sigma_{\text{кр.м}} = \frac{3ha\sigma_{\text{кр.г}} + 1,5ha\sigma_{\text{кр.о}}}{3ha + 1,5ha} = \frac{3 \cdot 0,675 + 1,5}{3 + 1,5} \sigma_T = 0,783\sigma_T.$$

Этому значению напряжения $\sigma_{\text{кр.м}}$ соответствует критическое давление

$$p_{\text{кр.м}} = 0,783\sigma_T h_2/R.$$

Расчет на местную устойчивость для второго варианта отличается тем, что при подсчете напряжения $\sigma_{\text{кр.о}}$ нужно учесть осевые сжимающие напряжения $\sigma_1 = pR/2h_1 = 1,25 (pR/h_2)$, действующие совместно с окружными сжимающи-

ми напряжениями $\sigma_2 = pR/h_2$. Поэтому величину $\sigma_{кр. 0}$ следует подсчитывать по формуле для удлиненной прямоугольной свободно опертой пластинки, сжатой в двух направлениях (см. § 7.3). Поскольку в нашем случае $\sigma_1 \approx \sigma_2$, то значение критического осевого сжимающего напряжения определяется формулой (7.22):

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E h_0^2}{12(1-\mu^2)a^2} = \frac{\pi^2 \cdot 300 \sigma_T}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{1,5}{40} \right) = 0,381 \sigma_T.$$

Соответствующее этому критическому осевому напряжению внешнее давление

$$p_{кр. м} = \sigma_{кр} 2h_1/R = \sigma_{кр} h_2/(1,25R) = 0,305 \sigma_T h_2/R.$$

Потеря устойчивости обшивки от осевых сжимающих напряжений приведет к разрушению всего отсека.

Итак, для первого варианта опасной является общая потеря устойчивости и окончательное значение критического давления

$$p_{кр} = 0,678 \sigma_T h_2/R,$$

а для второго варианта, наоборот, более опасна местная потеря устойчивости и окончательное значение критического давления

$$p_{кр} = 0,305 \sigma_T h_2/R.$$

Числовые коэффициенты в двух последних формулах равны отношениям $p_{кр}/p_{пр}$ и являются показателями рациональности использования материала в конструкции отсека. Для работы на поперечное внешнее давление (первый вариант) конструкцию гофрированного отсека можно считать удовлетворительной, но в случае нагружения всесторонним внешним давлением (второй вариант) эта конструкция оказывается явно нерациональна. Для ее улучшения можно, например, несколько изменить геометрию гофра с целью уменьшения отношения h_0/a .

Для сравнения рассчитаем на устойчивость под действием внешнего давления цилиндрический отсек, изготовленный из того же материала с гладкой стенкой толщиной h_2 , т. е. имеющий ту же массу, что и рассматриваемый гофрированный отсек. Используя формулу (12.45), находим

$$\begin{aligned} p_{кр} &= 4\alpha \frac{\pi R}{l} \left(\frac{E h_2^2}{3 \cdot 12 (1-\mu^2) R^2} \right)^{3/4} \left(\frac{E h_2}{R} \right)^{1/4} = \\ &= 0,92 \frac{R}{l} E \left(\frac{h_2}{R} \right)^{5/2} = 0,0312 \frac{\sigma_T h_2}{R}. \end{aligned}$$

Как и следовало ожидать, критическое давление гладкой оболочки оказалось существенно ниже, чем гофрированной.

Потеря устойчивости оболочек, подкрепленных малым числом упругих шпангоутов. Расчет нагруженного внешним давлением отсека на устойчивость можно вести путем интегрирования уравнений устойчивости стенки отсека между шпангоутами и выполнения условий стыковки ее со шпангоутами. При этом отметим, что стенка отсека может быть как однослойной тонкой обшивкой, так и быть выполнена по любому из вариантов, показанных на рис. 12.14.

Уравнение устойчивости стенки отсека (см. § 8.4) берем в виде

$$\begin{aligned} B_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{D_2}{R^6} \left(\frac{\partial^8 w}{\partial \varphi^8} + 2 \frac{\partial^6 w}{\partial \varphi^6} + \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) + \\ + \frac{p}{R^3} \left(\frac{\partial^6 w}{\partial \varphi^6} + \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) = 0, \end{aligned} \quad (12.58)$$

где B_1 , D_2 — соответствующие жесткости стенки отсека; w — радиальное перемещение; p — внешнее давление.

Изгиб k -го шпангоута с нерастяжимой осью под действием распределенных касательных сил $q_{\tau k}$ описывается уравнением (4.14):

$$\frac{EJ_k}{R^4} \left(\frac{d^6 V_k}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 V_k}{d\varphi^4} + \frac{d^2 V_k}{d\varphi^2} \right) = q_{\tau k}, \quad (12.59)$$

где EJ_k — изгибная жесткость k -го шпангоута; V_k — окружные перемещения осевой линии k -го шпангоута.

Касательная нагрузка, передаваемая на k -й шпангоут при потере устойчивости, равна разности сдвигающих сил на участках стенки отсека, прилегающих слева и справа к шпангоуту:

$$q_k = S_{k-0} - S_{k+0}. \quad (12.60)$$

Используя соотношения полубезмоментной теории (см. § 6.4), можно составить систему граничных и стыковочных условий для отсека с N пролетами, т. е. для отсека, подкрепленного $(N - 1)$ промежуточными шпангоутами. Для каждого из промежуточных шпангоутов получим четыре стыковочных условия. Кроме того, на каждом из торцов отсека должны быть дополнительно заданы по два граничных условия. Таким образом, для отсека с N пролетами получим необходимое число условий: $4(N - 1) + 2 \cdot 2 = 4N$.

Далее, действуя по общей схеме, намеченной в § 8.4, можно для каждого конкретного отсека построить зависимость $\rho_{кр}$ от жесткости промежуточных шпангоутов (типа зависимости, изображенной на рис. 12.15, б). Конкретный пример реализации общей схемы решения приведен в § 13.1.

Не воспроизводя выкладок, отметим, что для свободно опертого по обоим торцам отсека средней длины, подкрепленного симметрично расположенным шпангоутом жесткостью EJ , оказывается $EJ_{эф} \approx 1,5lD_2$, где $2l$ — общая длина отсека; D_2 — окружная изгибная жесткость его стенки. Для свободно опертого по торцам отсека, подкрепленного двумя равноотстоящими шпангоутами жесткостью EJ , оказывается $EJ_{эф} \approx 3,2lD_2$, где $3l$ — общая длина отсека [1].

При трех и более равноотстоящих промежуточных шпангоутах одинаковой жесткости расчет отсека на общую устойчивость можно вести с использованием формул (12.49), «размазывая» жесткости шпангоутов по всей длине отсека.

Глава 13

РАСЧЕТ ОТДЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ

Сухие отсеки и баки составляют основную часть силовой конструкции ракеты; их конструктивные схемы и упрощенные методы расчета были рассмотрены в предыдущих главах. Но в конструкцию ракеты помимо них входит еще большое количество других элементов, также требующих расчета на прочность. К таким элементам относятся кронштейны и балки для крепления оборудования внутри отсеков, люки, баллоны со сжатым газом, трубопроводы, сильфоны и т. д. При этом следует под-

черкнуть, что в рационально спроектированной конструкции ракеты нет второстепенных элементов: для правильного функционирования всей конструкции необходимо обеспечить надежную работу каждого ее элемента.

§ 13.1. Устойчивость головного стабилизатора

При входе в плотные слои атмосферы основной нагрузкой на конструкцию стабилизирующей юбки головной части ракеты является аэродинамическое давление.

На рис. 13.1, *a* показана схема конической стабилизирующей юбки, выполненной в виде оболочки с радиусом R большего основания конуса, толщиной h , длиной l с поперечным силовым набором (шпангоутами): сравнительно тонкая обшивка 1 подкреплена несколькими промежуточными шпангоутами 2 и торцовым шпангоутом 3, подкрепляющим свободный край юбки. (Заметим, что возможны и другие конструктивные варианты выполнения стенки стабилизирующей юбки, подобные тем, какие были рассмотрены в § 12.4.) Снаружи оболочку обычно покрывают слоем термоизоляции, для предохранения ее от чрезмерного аэродинамического нагрева. Слой термоизоляции увеличивает

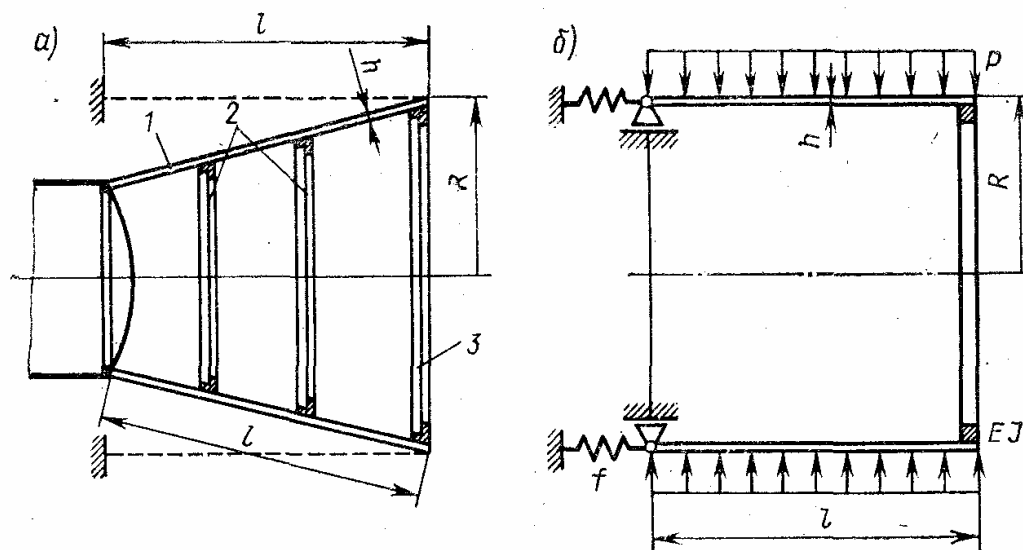


Рис. 13.1

жесткость оболочки юбки, что можно учесть в расчете, например, вводя соответствующие эквивалентные толщины стенки. Но при оценочных расчетах примем в запас устойчивости, что термоизоляция не изменяет жесткости оболочки. Влияние нагрева силовой конструкции юбки следует учесть, предусматривая понижение механических характеристик материала. Термические напряжения, вызываемые неравномерным нагревом силовой конструкции, в расчетах на общую устойчивость можно не учитывать.

Устойчивость консольной цилиндрической оболочки с подкрепленным краем. Сначала решим вспомогательную задачу об устойчивости

нагруженной внешним давлением ортотропной консольной цилиндрической оболочки, свободный край которой укреплен упругим шпангоутом с изгибной жесткостью EJ (рис. 13.1, б). Решение этой задачи получим с помощью намеченной в § 12.4 схемы, но некоторые промежуточные этапы решения рассмотрим более подробно. За исходные возьмем уравнение (12.58) устойчивости полубезмоментной цилиндрической оболочки и уравнение (12.59) изгиба кругового кольца в своей плоскости. Если решение уравнения (12.59) искать в виде

$$w = X \sin n\varphi, \quad (13.1)$$

где $X = X(x)$, то приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению (дифференцирование производится по x):

$$X^{IV} - (\lambda/R)^4 X = 0, \quad (13.2)$$

где

$$\lambda^4 = \frac{R}{B_1} \left[p - \frac{D_2}{R^3} (n^2 - 1) \right] n^4 (n^2 - 1).$$

Запишем решение этого уравнения

$$X = A_1 \sin(\lambda x/R) + A_2 \cos(\lambda x/R) + A_3 \operatorname{sh}(\lambda x/R) + A_4 \operatorname{ch}(\lambda x/R). \quad (13.3)$$

Здесь A_1 — произвольные постоянные.

Используя основные гипотезы полубезмоментной теории и условия замкнутости оболочки в окружном направлении (см. § 6.4), находим

$$v = \frac{1}{n} X \cos n\varphi; \quad u = -\frac{R}{n^2} X' \sin n\varphi; \quad (13.4)$$

$$T_1 = -\frac{B_1 R}{n^2} X'' \sin n\varphi; \quad S = -\frac{B_1 R^2}{n^3} X''' \cos n\varphi.$$

Формулируя граничные условия рассматриваемой задачи, будем считать, что левый торец оболочки при $x = 0$ жестко закреплен относительно окружных (и нормальных) перемещений и упруго закреплен относительно осевых перемещений, причем эти условия неизменны по всей окружности торца. Соответствующие граничные условия для уравнения (13.2) тогда будут

$$X(0) = 0; \quad B_1 X''(0) = f X'(0), \quad (13.5)$$

где f — жесткость упругого закрепления.

Жесткость торцового шпангоута при изгибе из его плоскости примем пренебрежимо малой; поэтому на правом торце оболочки при $x = l$ осевая сила $T_1 = 0$. Чтобы сформулировать последнее граничное условие, рассмотрим взаимодействие оболочки и торцового шпангоута при потере устойчивости. Как уже отмечалось в § 12.4, оболочка при изгибе нагружает шпангоут касательными распределенными силами, определяемыми выражением (12.60). В рассматриваемой задаче

оболочка только слева примыкает к торцовому шпангоуту. Следовательно, на торцовый шпангоут передается касательная нагрузка

$$q_{\tau} = -\frac{B_1 R^2}{n^3} X'''(l) \cos n\varphi.$$

В соответствии с уравнением (12.59) касательные перемещения оси замкнутого торцового шпангоута под действием такой нагрузки равны

$$V = \frac{B_1 R^3}{EJ} \frac{X'''(l)}{n^5 (n^2 - 1)^2} \cos n\varphi. \quad (13.6)$$

Приравнивая эти перемещения касательным перемещениям оболочки на подкрепленном торцовым шпангоутом крае, приходим к четвертому граничному условию уравнения (13.2). Итак, к граничным условиям (13.5) на левом торце оболочки добавляются еще два:

$$T_1(l) = 0, \text{ т. е. } X''(l) = 0; X(l) = (R^3/\bar{c}) X'(l), \quad (13.7)$$

где

$$\bar{c} = \frac{EJ}{B_1 R^3} n^4 (n^2 - 1)^2.$$

Четыре граничных условия дают систему четырех однородных линейных уравнений относительно произвольных постоянных A_i . Равенство нулю определителя этой системы приводит к характеристическому уравнению для λ . Как показывают вычисления, если жесткость упругого закрепления левого края оболочки $f > 30B_1/l$, то в рассматриваемой задаче этот край можно считать жестко закрепленным относительно осевого перемещения u оболочки. Тогда характеристическое уравнение для λ упрощается и принимает вид

$$\bar{c} = k^3 (1 + \operatorname{cosh} k \operatorname{ch} k) / (\operatorname{cosh} k \operatorname{sh} k - \operatorname{ch} k \operatorname{sink}), \quad (13.8)$$

где $k = \lambda R/l$.

Значение критического давления находим как наименьшую из величин p_n , определяемых выражением

$$p_n = (n^2 - 1) \frac{D_2}{R^3} + \frac{B_1}{R} \frac{\lambda^4}{n^3 (n^2 - 1)} \quad (13.9)$$

при различных числах волн n в окружном направлении. Подчеркнем, что в рассматриваемой задаче совместной потери устойчивости оболочки и шпангоута число волн n влияет на значение приведенной изгибной жесткости \bar{c} торцового шпангоута и, следовательно, на корни характеристического уравнения (13.8). Поэтому значение критического давления находят так: задавшись некоторым числом n , из уравнения (13.8) надо найти соответствующее ему наименьшее значение k_{\min} и только затем из уравнения (13.9) подсчитать давление p_n . Повторив эти вычисления несколько раз, для различных значений n находим $p_{\text{кр}} = p_{n \min}$. В рассматриваемой задаче эта процедура может приводить к двум локальным минимумам для p_n : за окончательное критическое значение $p_{\text{кр}}$ следует, естественно, взять меньшее из них.

На рис. 13.2, а приведена типичная зависимость безразмерного критического давления $\bar{p}_{кр} = p_{кр}/p_{кр.0}$ от относительной безразмерной жесткости торцового шпангоута $\bar{EJ} = EJ/(lD_2)$, где $p_{кр.0}$ — критическое давление свободно опертой по обоим торцам оболочки длиной l . График построен для конкретной оболочки с параметрами $R/l = 1$, $R/h = 500$ (рис. 13.2, б). Проследим за изменением критического числа волн n и формы изгиба образующей при увеличении относительной безразмерной жесткости шпангоута \bar{EJ} . При $\bar{EJ} = 0$ оболочка теряет устойчивость при $n = 10$ и $\bar{p}_{кр} = 0,6$; максимальные поперечные перемещения имеют свободный край (форма 1 на рис. 13.2). С ростом безразмерной жесткости \bar{EJ} критическое давление сначала заметно возрастает, хотя форма изгиба образующей сохраняет тот же характер, а критическое число волн при $\bar{EJ} \approx 0,3$ уменьшается до

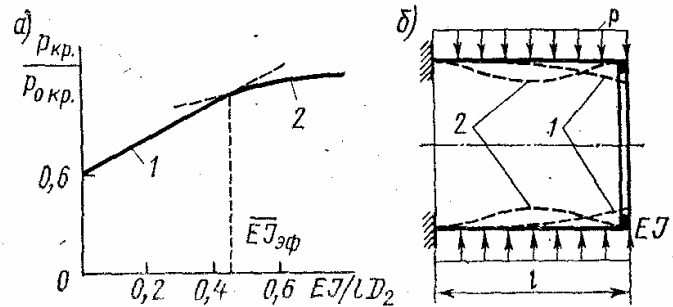


Рис. 13.2

$n = 9$. Затем при некотором значении $\bar{EJ}_{эф}$ происходит резкая качественная смена форм потери устойчивости: критическое число окружных волн возрастает скачком до $n = 14$, а максимум нормальных перемещений смещается к середине оболочки (форма 2). Дальнейший рост \bar{EJ} существенно не изменяет ни формы потери устойчивости, ни значения $\bar{p}_{кр}$ (при $\bar{EJ} \rightarrow \infty$ значение $\bar{p}_{кр} \rightarrow 1,25$).

Хотя график на рис. 13.2 построен для цилиндрической оболочки с конкретными параметрами, расчеты показывают, что зависимость безразмерного критического давления $\bar{p}_{кр}$ от безразмерной жесткости \bar{EJ} торцового шпангоута остается практически такой же и для других оболочек средней длины (изменяются только критические значения числа окружных волн n). В частности, для оболочек средней длины с одним жестко закрепленным краем

$$\bar{EJ}_{эф} \approx 0,45lD_2. \quad (13.10)$$

Оценочный расчет конической стабилизирующей юбки. Цель такого расчета — найти критические нагрузки общей и местной потери устойчивости конструкции стабилизирующей юбки. При расчете на общую устойчивость можно (в запас устойчивости) заменить коническую оболочку ортотропной полубезмоментной цилиндрической оболочкой, как показано пунктиром на рис. 13.1, а. Радиус такой эквивалентной ортотропной цилиндрической оболочки равен максимальному радиусу конической оболочки, а жесткостные характеристики B_1 и D_2 подсчитывают в зависимости от конструкции стенки стабилизирующей юбки по формулам, приведенным в § 13.4. Затем для определения критического давления эквивалентной цилиндрической оболочки следует

воспользоваться результатами только что приведенного решения задачи устойчивости консольной оболочки с подкрепленным краем.

Расчет конструкции юбки на местную устойчивость следует произвести для нескольких поперечных сечений по длине юбки, воспользовавшись при этом соответствующими результатами, изложенными в § 12.4. Например, если стенка стабилизирующей юбки выполнена в виде обшивки, подкрепленной несколькими промежуточными шпангоутами, то оценку местной устойчивости обшивки между подкреплениями можно произвести по формуле для свободно опертой по обоим торцам цилиндрической оболочки радиусом R_i и длиной l_i , где R_i — средний радиус i -го пролета между подкреплениями, l_i — длина i -го пролета по образующей конуса. При этом на местную устойчивость, естественно, следует проверить все пролеты между подкреплениями.

Прием замены конической стабилизирующей юбки ортотропной цилиндрической оболочкой, как правило, дает результаты, идущие в запас устойчивости; поэтому никакой дополнительной поправки на возможность хлопка оболочки можно не вводить и просто всюду принять $k_{хл} = 1$.

§ 13.2. Температурные напряжения в подкрепленных отсеках

Тонкостенные оболочки несущих отсеков, не имеющих термоизоляции, в полете нагреваются быстрее подкрепляющих элементов. Чем выше температурные градиенты, тем значительнее температурные напряжения. При определенных условиях они могут вызвать разрушение или потерю устойчивости обшивки, полок шпангоутов или стрингеров.

Расчет напряженного состояния проводят обычно после того, как определено поле температур. Поэтому в дальнейшем будем считать, что температурное состояние конструкции известно. Рассмотрим последовательность упругого расчета напряжений в обшивке и подкреплениях, а также контактных сил между шпангоутами и обшивкой.

Для отсека, подкрепленного поперечным набором, наиболее важен случай, когда температуры обшивки и кольца-шпангоута постоянны и соответственно равны t_0 и t . Напряжение определяют с помощью уравнений моментного состояния цилиндрической оболочки. В правой части уравнения (6.49) для осесимметричного случая появится слагаемое, соответствующее безмоментному температурному перемещению $w_T = \alpha t_0 R$, где α — температурный коэффициент линейного расширения. Если отсутствуют поверхностная нагрузка p и осевая сила T_1 , уравнение (6.49) примет вид

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{12(1-\mu^2)}{R^2 h_0^2} w = \alpha t_0 R \frac{12(1-\mu^2)}{R^2 h_0^2}. \quad (13.11)$$

Обозначим $12(1-\mu^2)/(R^2 h_0^2) = 4k^4$. Будем считать, что расстояние между подкреплениями больше удвоенной длины зоны краевого эффекта ($l > 5\sqrt{Rh_0}$), поэтому в решении уравнения (13.11) оставим

лишь слагаемые с затухающими функциями:

$$w = \alpha t_0 R + C_1 e^{-kx} \sin kx + C_2 e^{-kx} \cos kx. \quad (13.12)$$

При симметричном сечении кольца условия его сопряжения с оболочкой при $x = 0$ имеют вид

$$w' = 0; \quad \frac{Eh_0^3}{12(1-\mu^2)} w''' = -\frac{q_0}{2}, \quad (13.13)$$

где q_0 — контактная сила между кольцом и оболочкой. Радиальное перемещение кольца от сил q_0 и нагрева равно

$$w_R = \frac{q_0 R^2}{E_R S_R} + \alpha t R,$$

где $E_R S_R$ — жесткость кольца при растяжении. Так как перемещения кольца и оболочки в радиальном направлении ($w = w_R$), второе граничное условие можно представить так:

$$\frac{Eh_0^3}{12(1-\mu^2)} w''' = -\frac{E_R S_R}{R^2} (w - \alpha t R). \quad (13.14)$$

Подставив сюда выражение (13.12) и имея в виду первое условие сопряжения (13.13), определим константы

$$C_2 = C_1 = C = \alpha (t - t_0) R \left[1 + \frac{2Eh_0 R}{E_R S_R} \sqrt[4]{\frac{h_0^2}{R^2} \frac{1}{3(1-\mu^2)}} \right]^{-1}. \quad (13.15)$$

Это соотношение полностью определяет радиальное перемещение в оболочке:

$$w = \alpha t_0 R + C e^{-kx} (\sin kx + \cos kx).$$

Отсюда можно найти перемещение w при любой жесткости кольца. Например, при $E_R S_R = 0$, $C = 0$ w определяется только безмоментным решением. При $E_R S_R \rightarrow \infty$

$$w = \alpha t_0 R + \alpha (t - t_0) R e^{-kx} (\sin kx + \cos kx).$$

Окружные напряжения в оболочке $\sigma_2 = Ew/R - E\alpha t_0$. Подставив сюда выражения (13.12) и (13.15), получим

$$\sigma_2 = E\alpha (t - t_0) \left[1 + \frac{2Eh_0 R}{E_R S_R} \sqrt[4]{\frac{h_0^2}{R^2} \frac{1}{3(1-\mu^2)}} \right]^{-1} \times \\ \times e^{-kx} (\sin kx + \cos kx). \quad (13.16)$$

Наибольшее напряжение соответствует сечению $x = 0$, при этом множитель, зависящий от x в формуле (13.16), равен единице. При $t_0 > t$ в оболочке возникают сжимающие напряжения, а в кольце — растягивающие. Напряжения в кольце $\sigma_R = E_R w_R / R - E_R \alpha t$, или иначе

$$\sigma_R = +E_R \alpha (t_0 - t) \left\{ 1 - \left[1 + \frac{2Eh_0 R}{E_R S_R} \sqrt[4]{\frac{h_0^2}{R^2} \frac{1}{3(1-\mu^2)}} \right]^{-1} \right\}. \quad (13.17)$$

Из второго уравнения (13.13) находим силу q_0 в соединении шпангоута с оболочкой:

$$q_0 = -2Eh_0 \alpha (t_0 - t) \sqrt[4]{\frac{h_0^2}{R^2} \frac{1}{3(1-\mu^2)}} \times \left[1 + \frac{2Eh_0 R}{[E_K S_K]} \sqrt[4]{\frac{h_0^2}{R^2} \frac{1}{3(1-\mu^2)}} \right]^{-1}. \quad (13.18)$$

Если кольцо крепят к оболочке по окружности, в ряде точек с шагом l , сила, приходящаяся на каждую точку,

$$F = q_0 l. \quad (13.19)$$

Соотношения (13.16), (13.17), (13.18), (13.19) позволяют провести расчет оболочки и кольца, а также их крепления друг к другу. Все зависимости показывают, что когда температуры шпангоута и оболочки одинаковы ($t = t_0$), температурные напряжения и контактные силы в соединении равны нулю. Рассмотренную задачу поэтому можно решать иначе, полагая температуру шпангоута равной нулю, а оболочку считать нагретой до температуры $t_0 - t$. Все результирующие соотношения (13.16) ... (13.19) будут те же.

В задаче расчета температурных напряжений принято, что высота шпангоута невелика и не учитывается разность температуры и сил в сечении. Иногда с этим обстоятельством приходится считаться. Расчет кольца двутаврового поперечного сечения, соединенного с оболочкой, показывает, как влияет высота сечения и неравномерный нагрев на напряженное состояние. Температура обшивки наружного пояса шпангоута считается одинаковой и равной $t_0 - t$, а температура стенки и внутреннего пояса равной нулю. Деформации и напряжения в каждом поясе связаны соотношениями

$$\varepsilon_1 = \sigma_1/E + \alpha (t_0 - t); \quad \varepsilon_2 = \sigma_2/E. \quad (13.20)$$

Индексы здесь соответствуют наружному (1) и внутреннему (2) поясам шпангоута. Обозначив q_1 и q_2 — радиальную распределенную нагрузку внутреннего и наружного поясов, с помощью соотношений (13.20) определим радиальные перемещения

$$u_1 = q_1 R^2 / (E S_1) + \alpha (t_0 - t) R; \\ u_2 = q_2 (R - H)^2 / (E S_2). \quad (13.21)$$

Здесь погонная сила q_2 передается к внутреннему поясу со стенки, а сила $q_1 = q_0 - q$ (q_0 — сила, действующая на наружный пояс с оболочки, а q — со стенки); S_1 и S_2 — площади поясов; H — высота двутавра. Рассмотрим деформацию стенки. Стенка представляет собой диск, внутренний и наружный радиусы которого равны соответственно $R - H$ и R . Уравнение радиального перемещения стенки (диска) имеет вид (2.27). Если отсутствуют массовые силы и нагрев, оно может быть представлено следующим образом:

$$r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ur) \right] = 0. \quad (13.22)$$

Общее решение этого уравнения:

$$u = A_1 r + A_2 / r. \quad (13.23)$$

Напряжение в диске в радиальном направлении определяется соотношением

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_r + \mu \varepsilon_\theta).$$

Каждая из распределенных составляющих сил q и q_2 на границах диска может быть определена из уравнения

$$\sigma_r h = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} \right),$$

где h — толщина стенки. Подставив сюда функцию (13.23), получим

$$\sigma_r h = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[A_1 (1 + \mu) - A_2 \frac{1}{r^2} (1 - \mu) \right].$$

Для наружной и внутренней границы стенки силы q и q_2 равны:

$$q = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[A_1 (1 + \mu) - A_2 \frac{1}{R^2} (1 - \mu) \right]; \quad (13.24)$$

$$q_2 = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[A_1 (1 + \mu) - A_2 \frac{1}{(R-H)^2} (1 - \mu) \right]. \quad (13.25)$$

Соответствующие перемещения определяют из соотношения (13.23):

$$u = A_1 R + A_2 / R, \quad u_2 = A_1 (R - H) + A_2 / (R - H). \quad (13.26)$$

Для оболочки, скрепленной со шпангоутом, справедливы соотношения (13.12) и (13.13), если в выражении (13.12) первое слагаемое заменить на $\alpha (t_0 - t) R$.

Воспользуемся условиями сопряжения оболочки, поясов и стенки шпангоута. Равенство перемещений оболочки и наружного пояса приводит к зависимости

$$C = (q_0 - q) R^2 / (ES_1). \quad (13.27)$$

Так как перемещение оболочки и стенки также равны, то

$$A_1 R + A_2 / R = C + \alpha (t_0 - t) R. \quad (13.28)$$

Второе условие (13.13) можно представить в виде

$$\frac{Eh_0^3}{12(1-\mu^2)} 4Ck^3 = - \frac{q_0}{2}. \quad (13.29)$$

Внутренний пояс шпангоута под действием сил q_2 перемещается в радиальном направлении и из соотношений (13.21) и (13.26) можно записать условие

$$q_2 (R - H)^2 / (ES_2) = A_1 (R - H) + A_2 / (R - H). \quad (13.30)$$

Система уравнений (13.24), (13.25), (13.27), (13.28), (13.29) (13.30) позволяет найти неизвестные A_1 , A_2 , C , q , q_0 , q_2 , которые определяют контактные силы и силы в стенке в каждом поясе шпангоута. Если ра-

диус R значительно больше высоты шпангоута, при $S_1 = S_2 = S$ и $S \ll Rh$ для отсека, у которого толщина обшивки очень мала, напряжение в наружном поясе

$$\sigma_1 = -E\alpha(t_0 - t) \frac{S}{Hh}. \quad (13.31)$$

Значение напряжений во внутреннем поясе то же, но другого знака. Зависимость (13.31) показывает, что напряжения в полках шпангоута весьма велики даже при небольших перепадах температуры.

Отсеки, подкрепленные продольными элементами, также испытывают температурные напряжения. Их значения существенно зависят от конструктивных особенностей подкреплений, крепления к обшивке и соседним отсекам. Температурные напряжения в общем случае определить весьма сложно. Приближенные их значения могут быть получены в предположении, что напряжения не меняются вдоль оси отсека и по поперечному сечению. Это справедливо для длинных отсеков с частыми продольными подкреплениями. Пусть температура обшивки t_0 , а температура подкреплений t . Деформации, возникающие в обшивке и продольных элементах,

$$\varepsilon_0 = \sigma_0/E_0 + \alpha t_0; \quad \varepsilon_c = \sigma_c/E_c + \alpha t. \quad (13.32)$$

Так как силы и напряжения связаны соотношениями $N_0 = S_0\sigma_0$; $N_c = S_c\sigma_c$, а в любом поперечном сечении силы, возникающие от нагрева, самоуравновешены ($N_0 = -N_c$), из условия равенства деформаций ($\varepsilon_0 = \varepsilon_c$) получаем соотношение

$$-N_c/(E_0S_0) + \alpha t_0 = N_c/(E_cS_c) + \alpha t. \quad (13.33)$$

Отсюда определяют силу в продольных элементах:

$$N_c = \alpha(t_0 - t) E_c S_c E_0 S_0 / (E_c S_c + E_0 S_0). \quad (13.34)$$

При $t_0 > t$ продольные элементы растянуты, а обшивка сжата той же силой.

При расчете отсеков температурные напряжения должны быть определены для каждого расчетного случая. Но даже большие напряжения не всегда вызывают разрушение конструкции. Надо учитывать, из какого материала изготовлен тот или иной элемент. Если материал пластичен, разрушения от температурных напряжений, как правило, не происходит. Но для хрупких материалов температурные напряжения играют очень важную роль. Нужно отметить, что даже когда температурные напряжения не принимаются в расчет, всегда необходимо учитывать снижение прочностных и деформационных характеристик материала, вызванное температурным воздействием.

§ 13.3. Баллоны высокого давления, трубопроводы, сильфоны

Расчет баллонов. В качестве баллонов высокого давления в ракетах широко используются сферические так называемые шар-баллоны, емкости в виде замкнутого кругового тора, цилиндрические баллоны с полусферическими днищами и т. п. Торы и цилиндры по сравнению

с шар-баллонами более удобны по условиям компоновки, но хуже с точки зрения массы.

Давление является основной нагрузкой, определяющей толщину стенки емкости и в конечной степени ее вес. Баллоны в ракете, как правило, крепят с помощью лент на специальных ложементах, так что нагружение инерционными силами оказывается незначительным и в расчет обычно не принимается. Местные усиления и малые размеры отверстий в местах соединения заправочной и расходной трубок позволяют при расчете не учитывать отверстий.

Большинство баллонов изготавливают сваркой из штампованных элементов, так что при расчете надо учитывать ослабляющее влияние сварного шва. Материалы, применяемые для емкостей, должны иметь высокую удельную прочность на растяжение. Этим требованиям удовлетворяют высокопрочные стали и титановые сплавы. Недавно баллоны высокого давления стали изготавливать также из композиционных материалов.

Ввиду тяжелых условий эксплуатации и необходимости обеспечить высокую надежность конструкции коэффициент безопасности при расчете баллонов высокого давления принимают большим ($f > 2$). Расчет баллонов высокого давления на прочность сводится к определению максимальных внутренних сил в оболочке от равномерного давления и выбору толщины стенки таким образом, чтобы расчетные напряжения в баллоне были равны пределу прочности материала.

В сферической оболочке радиусом R , нагруженной внутренним давлением p , напряженное состояние однородно

$$\sigma_1 = \sigma_2 = pR/(2h),$$

где h — толщина стенки. Для шар-баллона

$$h = p_0 f R / 2 \sigma_{вс}. \quad (13.35)$$

Здесь p_0 — эксплуатационное давление, $c = 0,85 \dots 0,95$ — коэффициент прочности сварного шва; $\sigma_{в}$ — предел прочности материала.

Напряжения в торовой оболочке кругового сечения, нагруженной внутренним давлением, определяются зависимостями

$$\sigma_1 = \frac{pR}{h} \frac{r + (R/2) \sin \theta}{r + R \sin \theta}, \quad \sigma_2 = \frac{pR}{2h},$$

где R — радиус сечения тора; r — радиус кольца; θ — угол между нормалью к поверхности оболочки и осью вращения. Наибольшие напряжения возникают на внутреннем экваторе тора, где $\theta = \pi/2$:

$$\sigma_{1 \max} = \frac{pR}{h} \frac{r - R/2}{r - R}.$$

Толщину стенки торового баллона выбирают из соотношения

$$h = \frac{p_0 f R}{c \sigma_{в}} \frac{r - R/2}{r - R}. \quad (13.36)$$

Цилиндрический баллон с полусферическими днищами, нагруженный внутренним давлением, имеет некоторые особенности в распределении внутренних сил. На участке сопряжения цилиндра с полусферой

кроме мембранных напряжений возникают изгибные напряжения от краевого эффекта. Рассмотрим, как влияет изгиб в краевой зоне на напряженное состояние в баллоне. Мембранные напряжения в цилиндре $\sigma_{1ц} = pR/2h$, $\sigma_{2ц} = pR/h$, в сфере $\sigma_{1сф} = \sigma_{2сф} = pR/2h$. Закон изменения изгибающего момента по осевой координате s , отсчитываемой от точки сопряжения цилиндра с полусферой, описывается уравнением

$$M_1 = \frac{pR}{8h} \frac{\sin ks}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} e^{-ks},$$

а дополнительные окружные напряжения, соответствующие краевому эффекту,

$$\sigma_{2\text{ доп}} = -\frac{pR}{4h} e^{-ks} \cos ks.$$

Коэффициент k определяют из выражения

$$k = \sqrt[4]{3(1-\mu^2)/(R^2 h^2)}.$$

Для оболочек цилиндра и полусферы одинаковой толщины максимальные напряжения в цилиндрической оболочке

$$\sigma_{1ц\text{ max}} = \frac{pR}{h} (0,5 + 0,146); \quad \sigma_{2ц\text{ max}} = \frac{pR}{h} (1 + 0,0312). \quad (13.37)$$

Вторые слагаемые в скобках отражают влияние краевого эффекта. Соотношения (13.37) показывают, что наибольшие напряжения в баллоне — окружные. Они практически не отличаются от мембранных, поэтому при расчете такого баллона достаточно воспользоваться известным безмоментным решением для окружных напряжений $\sigma_2 = pR/h$ и толщину стенки баллона определять из уравнения

$$h = \frac{p_0 R}{\sigma_B}. \quad (13.38)$$

Итак, для расчета баллонов высокого давления пользуются обычно соотношениями (13.35), (13.36), (13.38). Эти зависимости показывают, что толщина стенки баллона, а следовательно, и его вес тем меньше, чем выше прочностные характеристики материала. Для увеличения предела прочности материала, из которого изготовлен баллон, иногда применяют специальные меры. Например, сферические баллоны из титанового сплава для сжатого гелия на ракете «Атлас» помещают в емкости, содержащие жидкий азот. При такой температуре значительно повышаются прочностные характеристики материала баллона (при $t = 20^\circ\text{C}$ $\sigma_B = 1090$ МПа, $\sigma_T = 960$ МПа; при $t = -195^\circ\text{C}$ $\sigma_B = 1640$ МПа, $\sigma_T = 1600$ МПа). Это позволяет баллоны, находящиеся под давлением наддува $p = 35$ МПа при диаметре 407 мм, сделать сравнительно легкими. Масса одного баллона из титанового сплава составляет всего 22,2 кг.

Расчет трубопроводов. Трубопроводы подачи горючего и окислителя работают обычно при внутреннем давлении

$$p = p_0 + n_x \gamma H, \quad (13.39)$$

где H — высота столба от зеркала жидкости в баке до расчетного сечения, n_x — осевая перегрузка с учетом динамических особенностей гидравлического тракта. Тоннельные трубы проходят внутри баков и нагружаются внешним для них давлением наддува и столба жидкости. При транспортировке возникают поперечные перегрузки n_y , создающие осевые напряжения в трубах.

Трубопроводы подачи компонентов топлива диаметром $2R$ рассчитывают прежде всего на прочность от внутреннего давления p :

$$\sigma = pfR/h. \quad (13.40)$$

Напряжение при выбранной толщине стенки трубы не должно превышать предела прочности материала. Это условие, как правило, не является основным и толщину труб выбирают из конструктивных или технологических соображений. Для случая транспортировки незаправленных баков при действии поперечной перегрузки напряжения в трубопроводе определяют, как в балке длиной l (расстояние между точками крепления труб), и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой $q = 2\pi R h \gamma_T n_y$ (γ_T — удельный вес материала трубопровода). Трубу, закрепленную в днищах бака, можно считать двухопорной балкой, максимальные осевые напряжения в которой равны

$$\sigma = \frac{1}{4} \gamma_T n_y \frac{l^2}{R}. \quad (13.41)$$

Эти напряжения должны удовлетворять условию прочности, т. е. $\sigma \leq \sigma_v$, а также условию устойчивости трубопровода как оболочки, т. е. $\sigma \leq \sigma_{кр}$, где

$$\sigma_{кр} = kEh/R.$$

Для оболочки принимают $k = 0,2$.

При больших поперечных перегрузках к трубопроводам в баках крепят растяжки, увеличивая тем самым количество опор балки. При этом напряжения в трубопроводе следует определять известными способами, как в многоопорной балке. Следует еще отметить, что при транспортировке ракеты возможны циклические поперечные перегрузки. При выборе шага растяжек на трубопроводах это учитывают и стремятся к тому, чтобы собственная частота колебаний трубы возможно больше отличалась от частоты вынужденных колебаний системы.

Для обеспечения топливом поворотных двигателей, а также в установках с высоким уровнем вибраций применяют гибкие трубопроводы. Они представляют собой эластичные трубы с несущей провололочной оплеткой из нержавеющей стали, обеспечивающей гибкость и герметичность шланга. Наибольшее распространение получили шланги с внутренними трубками из каучука и тефлона. Они могут работать при давлениях до 30 МПа и имеют сравнительно большие размеры. Например, для двигателя «Ф-1» используются гибкие шланги диаметром до 350 мм [17].

Тоннельные трубы рассчитывают на устойчивость от внешнего давления $p_p = p_a f$, где p_a — суммарное эксплуатационное давление наддува и столба жидкости. Простейший расчет показывает, что гладкие

трубы теряют устойчивость при очень малом внешнем давлении. Например, труба радиусом $R = 100$ мм с толщиной стенки $h = 1$ мм из алюминиевого сплава теряет устойчивость при $p = 0,02$ МПа. Для увеличения критического давления в тоннельных трубах делают поперечные зиги обычно омегаобразного сечения (рис. 13.3). Эти зиги являются своего рода шпангоутами, повышающими устойчивость трубы.

Расчет тоннельных труб ведут в такой последовательности. Выбирают толщину стенки трубы так, чтобы окружные напряжения в ней удовлетворяли условиям прочности. Определяют шаг зигов l по уравнению

$$p_p = kE \frac{R}{l} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2}, \quad (13.42)$$

где $k = 0,64$. Находят радиус зига r или его момент инерции J из условия равноустойчивости участка трубы между зигами (как оболочки) и зига (как изолированного кольца):

$$p_p l = 3EJ/R^3. \quad (13.43)$$

При больших радиусах r возможна местная потеря устойчивости — образование вмятины на внешнем контуре зига. Местные критические напряжения определяют приближенно по отношению

$$\sigma_{кр.м} = kEh/r. \quad (13.44)$$

Можно принять $k = 0,15$.

Расчет сильфонов. Сильфоны применяют для компенсации температурных и технологических деформаций в трубопроводах. Это — оболочки вращения, состоящие из торообразных участков положительной и отрицательной кривизны и соединенные плоскими круговыми пластинами (рис. 13.4, а).

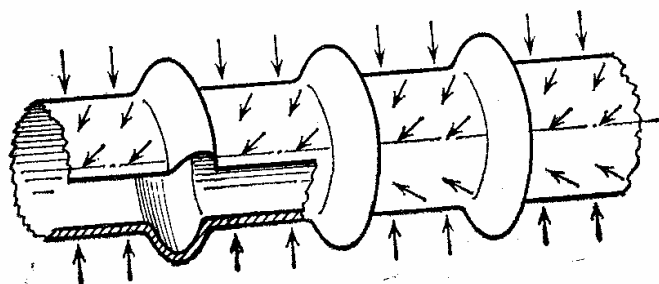


Рис. 13.3

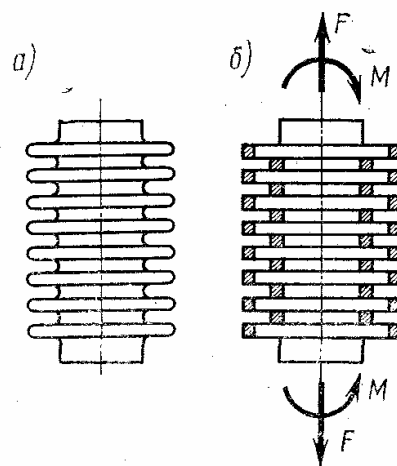


Рис. 13.4

Расчет сильфона сводится к определению его жесткости при осевом и угловых перемещениях и расчету на прочность. Существует ряд методов уточненного расчета сильфонов как оболочек вращения. Применение этих методов, однако, бывает затруднено из-за громоздкости. Удовлетворительные результаты при определении жесткости сильфона дает схематизация его как системы кольцевых пластин. Пластины считают попеременно заделанными по внутреннему и наружному контурам (рис. 13.4, б). В такой схеме не учитываются участки скругления,

и поэтому жесткость сильфона, полученная расчетным путем, оказывается несколько выше действительной.

Для определения жесткости сильфона при осевом перемещении достаточно рассмотреть один элемент схемы — плоскую круговую кольцевую пластину, нагруженную осевой силой F . Наибольший прогиб для пластины, у которой отсутствуют угловые перемещения по внутреннему и наружному контурам, определяется соотношением

$$w = \frac{Fr^2}{Eh^3} 3 \frac{1-\mu^2}{4\pi} \left(\rho^2 - 1 - \frac{4\rho^2}{\rho^2-1} \ln^2 \rho \right), \quad (13.45)$$

где $\rho = R/r$ — отношение наружного радиуса пластины к внутреннему; h — толщина пластины. Если количество волн гофрировки равно n , число пластин $2n$ и жесткость сильфона $\lambda_F = F/(2nw)$ определяется зависимостью

$$\lambda_F = \frac{2\pi}{3(1-\mu^2)} \frac{Eh^3}{r^2 n} \left(\rho^2 - 1 - \frac{4\rho^2}{\rho^2-1} \ln^2 \rho \right)^{-1}. \quad (13.46)$$

При угловых перемещениях сильфон также представляют как систему кольцевых пластин, но нагруженных изгибающим моментом M . Угол поворота α центрального кольца при неподвижном внешнем контуре пластины

$$\alpha = 3 \frac{1-\mu^2}{\pi} \frac{M}{Eh^3} \frac{(\rho^2+1) \ln \rho - \rho^2 + 1}{\rho^2 + 1}, \quad (13.47)$$

и отсюда нетрудно найти жесткость угловых перемещений сильфона $\lambda_M = M/2n\alpha$. Деформация сильфонов при поперечных перемещениях трубопроводов и сохранении параллельности оси сводится к угловым перемещениям [2]. Связь между параллельным перемещением ΔH , длиной сильфона L , количеством гофров n и углом α определяется зависимостью

$$\Delta H = n\alpha L/3. \quad (13.48)$$

Толщину сильфонов определяют из расчета на прочность. Изгибные напряжения ввиду небольшого ресурса работы и пластичности материала в расчет не принимают. Эксперименты показывают, что разрушению сильфонов от внутреннего давления предшествует распрямление наружных участков гофров и, в конце концов, разрушение оболочки вдоль образующей. Толщина стенки сильфона может быть определена из соотношения

$$h = p_0 f R / \sigma_B. \quad (13.49)$$

Представленные приближенные способы расчета сильфонов требуют уточнения при применении их в длительно работающих системах. Эти вопросы освещаются в литературе [2].

§ 14.1. Особенности расчета на прочность конструкций ЖРД

Теплонапряженность современного жидкостного ракетного двигателя (ЖРД) чрезвычайно высока: по мощности, приходящейся на единицу объема камеры сгорания, ЖРД в тысячи раз превосходит стационарные тепловые установки. Такая теплонапряженность ЖРД связана с высоким давлением и температурой газов в камере сгорания, причем развитие и совершенствование двигателей ведет к дальнейшему возрастанию этих параметров.

Специфика работы ЖРД ставит перед его создателями целый ряд трудноразрешимых проблем. В общем комплексе подлежащих рассмотрению задач важную роль играют вопросы, связанные с созданием надежно работающей, легкой и технологичной оболочки камеры ЖРД.

Схема конструкции и особенности нагружения камеры ЖРД. В конструкции камеры ЖРД выделяют три основных элемента (рис. 14.1, а): форсуночную головку 1, оболочку камеры сгорания 2 и сопло 3; в конструкцию также входят узлы крепления 4, входной коллектор 5 и ряд других вспомогательных деталей. Наиболее характерным является теплопрочностной расчет оболочки камеры сгорания.

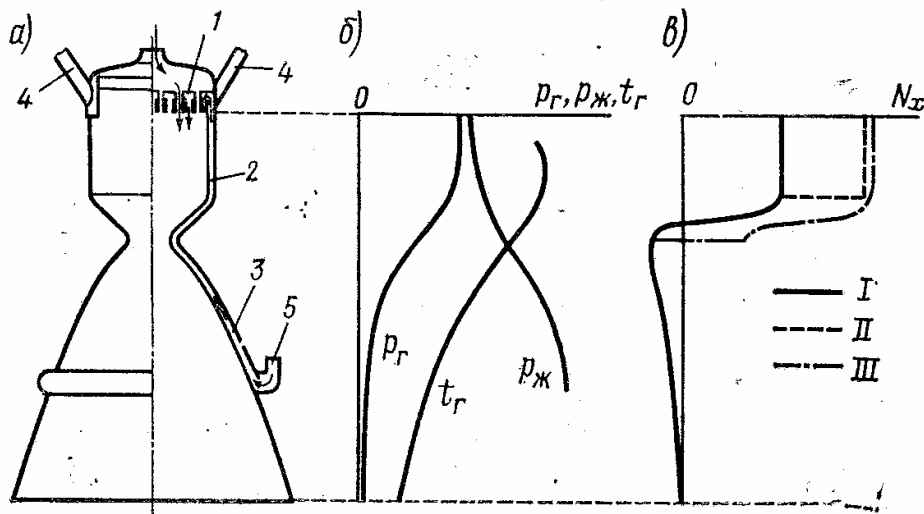


Рис. 14.1

Оболочка представляет собой двухстеночную осесимметричную конструкцию. Внутренняя и наружная ее стенки скреплены между собой. Различные виды соединения стенок по геометрическому признаку можно подразделить на три типа: продольные, винтовые и точечные связи. Между стенками имеется пространство, называемое охлаждающим трактом. По нему протекает один из компонентов топлива, используемый для охлаждения оболочки. Вход охлаждающего компонента обычно выполнен в виде коллектора в зоне сопла, а выход непосредственно связан с форсуночной головкой. В некоторых случаях

часть оболочки сопла может быть выполнена одностенной в виде неохлаждаемого насадка.

Компоненты топлива через форсуночную головку поступают в камеру сгорания, где между ними происходит химическая реакция с выделением теплоты. Продукты сгорания истекают через сопло, создавая реактивную силу тяги двигателя. Характер изменения давления газов p_r и их температуры t_r по длине камеры показан на рис. 14.1, б.

Давление газов является основной нагрузкой для оболочки камеры. Интенсивный теплообмен с продуктами сгорания вызывает нагрев внутренней и в некоторой степени наружной стенок. Изменение механических свойств материала стенок с изменением температуры и значительные температурные деформации следует считать вторым по значению фактором, влияющим на условия работы оболочки в целом, т. е. на ее общую прочность и жесткость. Кроме того, можно говорить о местной прочности и жесткости стенок камеры между связями, а также о прочности элементов связей и их соединений со стенками. В этом случае необходимо рассмотреть давление $p_{ж}$ охлаждающего компонента (рис. 14.1, б).

Таким образом, исследование и расчет оболочки камеры как силового элемента двигателя ведут по двум основным направлениям: 1) на общую прочность и жесткость оболочки камеры под действием внутреннего давления и теплового воздействия; 2) на местную прочность и жесткость, в первую очередь, внутренней стенки между элементами связей под действием нагрева и перепада давлений $\Delta p = p_{ж} - p_r$.

Рассматривая эти направления, особое внимание следует уделить взаимосвязи между прочностью оболочки и ее температурным состоянием, связи между условиями работы оболочки как силового элемента двигателя и особенностями рабочего процесса. Важность взаимного влияния этих факторов качественно можно показать на примере. Под действием перепада давлений Δp внутренняя стенка прогибается в пролете между элементами связи. В результате увеличивается площадь проходного сечения охлаждающего тракта, падает скорость охлаждающей жидкости, ухудшаются условия охлаждения внутренней стенки, растет ее температура, вызывающая снижение механических характеристик материала. Это может привести к дальнейшему увеличению прогиба внутренней стенки, к ее прогару и разрушению.

Материал оболочки, как правило, работает за пределом упругости. Поэтому работоспособность оболочки камеры зависит не только от силового воздействия в рабочем режиме, но и от последовательности нагружения оболочки в процессе изготовления и испытания двигателя. Остаточные деформации и напряжения, возникающие после очередного нагружения, влияют на поведение оболочки при следующем нагружении. Исследование истории нагружения оболочки камеры представляет собой довольно сложную задачу. Для ее решения помимо знания технологических, испытательных и рабочих режимов, включая режимы пуска и остановки двигателя, необходимо располагать сведениями о поведении материалов оболочки с учетом фактора времени при одно-

временном изменении напряженно-деформированного состояния и температуры.

Специфическим режимом нагружения оболочки ЖРД является опрессовка, когда подается давление $p_{ж}$ в охлаждающий тракт при отсутствии давления p_r в полости камеры. Такие условия обычно создаются при пуске двигателя. Кроме того, указанные условия возникают при опрессовке охлаждающего тракта повышенным давлением в процессе технологического контроля оболочки двигателя.

Реактивная сила тяги, создаваемая двигателем, с оболочки камеры через узлы крепления и ферму передается на корпус ракеты. Узлы крепления располагаются, как правило, в одной плоскости, нормальной к оси двигателя. Их обычно устанавливают в зоне форсуночной головки, а поворотные двигатели также крепят в зоне критического сечения сопла или за цилиндрическую часть камеры сгорания.

При проектировании и расчете узлов крепления необходимо учитывать ряд особенностей, связанных с передачей на оболочку камеры сосредоточенных сил. Расположение узлов крепления двигателя на камере определяет вид эпюры осевых сил в ее оболочке. Осевые силы оказывают некоторое влияние на общую прочность и жесткость оболочки камеры. Характер изменения осевой силы N_x по длине камеры при разных вариантах расположения узлов крепления (*I* — у головки, *II* — в конце цилиндрической части камеры сгорания и *III* — в зоне критического сечения сопла) показан на рис. 14.1, *в*.

На работоспособность оболочки двигателя могут влиять также динамические режимы нагружения, так как ЖРД является мощным источником механических колебаний в широком диапазоне частот. Амплитуды колебания давлений p_r и $p_{ж}$, которые определяют динамическое нагружение оболочки, в особо неблагоприятных случаях могут быть соизмеримы с номинальными значениями давлений. Причиной возникновения колебаний давления являются работа системы подачи компонентов и механизм горения топлива в камере сгорания.

Оболочка камеры подвергается прямому воздействию возмущающих сил давления газов. При совпадении частоты собственных колебаний конструкции с частотой колебаний давления наступает состояние резонанса. Амплитуды колебаний оболочки растут, что непосредственно сказывается на ее работоспособности. Резонансные колебания могут иметь и более сложную природу, когда переменное осесимметричное давление газов вызывает изгибные (неосесимметричные) колебания оболочки ЖРД. Это явление называется параметрическим резонансом.

Известно, что оптимальным режимом работы сопла ракетного двигателя является расчетный режим истечения, когда давление газов в выходном сечении совпадает с атмосферным давлением на данной высоте. Однако при работе двигателя на различных высотах возникают нерасчетные режимы истечения газов. Типичным нерасчетным режимом работы сопла с большим расширением является стендовое испытание двигателя при нормальном атмосферном давлении p_0 . Оболочка сопла в этом случае оказывается нагруженной переменным по длине перепадом давлений $p_0 - p_r$, который может вызвать потерю

устойчивости оболочки. Таким образом, для двигателей с большим расширением сопла нагружение части его оболочки внешним давлением является одним из расчетных случаев, подлежащих рассмотрению при проектировании оболочки.

Критерии прочности и работоспособности ракетных двигателей. В машиностроении используются три основных вида расчетов конструкций на прочность: 1) расчет по разрушающим (предельным) нагрузкам, 2) расчет по допускаемым напряжениям и 3) расчет по допускаемым перемещениям или деформациям.

При расчете по разрушающим нагрузкам в основу кладут то значение нагрузки, при котором конструкция теряет несущую способность, разрушается. Элементы тонкостенных конструкций, работающие на сжатие, обычно разрушаются в результате потери устойчивости, а элементы, работающие на растяжение, — вследствие достижения напряжениями предела прочности материала.

Но при расчете ракетных двигателей наряду с расчетом по разрушающим нагрузкам используются также и расчеты по допускаемым напряжениям и допускаемым перемещениям. Поэтому вместо коэффициента безопасности f и запаса прочности n при расчете двигателей чаще пользуются просто понятием коэффициента запаса, определяя его либо как отношение разрушающей и эксплуатационной нагрузок, либо как отношение соответствующих напряжений. Так, например, коэффициент запаса по пределу прочности равен $n_b = \sigma_b / \sigma_a$, где σ_a — максимальное значение эксплуатационного напряжения; σ_b — предел прочности материала.

Перечислим целесообразные подходы к расчету на прочность элементов жидкостного двигателя. Камеру сгорания ЖРД на общую несущую способность целесообразно рассчитывать по предельным нагрузкам, не считаясь с местными концентрациями напряжений, поскольку обычно камера сгорания выполняется из достаточно пластичных материалов. Расчет охлаждающего тракта на местные прогибы ведут по допускаемым перемещениям [26]. Критерием работоспособности плоской форсуночной головки является герметичность соединения форсунок с пластинами. Поэтому прочностной расчет плоской головки следует вести по допускаемым деформациям. Относительные удлинения, вызываемые изгибом и нагревом плоской головки, следует сравнивать с теми их значениями (определяемыми экспериментально), при которых нарушается герметичность соединения форсунок с пластинами [26]. Кроме того, если в камере имеются сварные или паяные соединения и если материал в зоне пайки обладает повышенной хрупкостью, то расчет этих соединений в некоторых случаях возможен и по допускаемым напряжениям.

§ 14.2. Общая несущая способность оболочки камеры ЖРД

При расчете камеры на общую несущую способность должны быть известны: геометрия камеры, распределение давления газов по ее длине, температурные поля в стенках, диаграммы растяжения и пределы

прочности материалов стенок в требуемом диапазоне температур. Расчет носит проверочный характер.

Сформулируем систему допущений, с помощью которой можно сравнительно просто произвести расчет камеры двигателя на прочность:

1) тепловой расчет двигателя проводится для недеформированного состояния и считается, что ни местные прогибы охлаждающего тракта ни общая деформация камеры не влияют на температуру стенок;

2) остаточные напряжения, возникающие в конструкции двигателя в процессе его изготовления, не учитываются;

3) считается, что температура и нагрузка меняются во время пуска двигателя таким образом, что деформация материала стенок камеры всюду является активной и участки разгрузки отсутствуют;

4) связи между стенками камеры принимаются абсолютно жесткими и настолько частыми, что их действие на оболочки можно «размазать», т. е. заменить приведенным контактным давлением.

В большинстве случаев перечисленные упрощающие допущения не приводят к большим погрешностям и резко сокращают трудоемкость расчета.

Оценочный расчет «по кольцу». Материал стенок двигателя работает обычно за пределом упругости и находится в сложном напряженном состоянии. Поэтому для расчета необходимо пользоваться аппаратом теории пластичности. Но предварительно на простой модели установим основные закономерности, свойственные двухстеночной конструкции камеры двигателя, подвергаемой одновременному действию больших давлений и высоких температур. Для этого произведем расчет двигателя «по кольцу», т. е. из цилиндрического участка камеры сгорания «вырежем» кольцо единичной ширины и будем считать напряженное состояние в стенках этого кольца одноосным. Другими словами, в таком расчете не учитываются осевые температурные удлинения и осевая сила. Кроме того, будем полагать, что свойства материала наружной и внутренней стенок определяются их средними температурами t' и t'' .

Из условия равновесия половины кольца (рис. 14.2, а) следует

$$\sigma' h' + \sigma'' h'' = p_r R + p_{ж} \delta, \quad (14.1)$$

где h' и h'' — толщины внутренней и наружной стенок; σ' и σ'' — окружные напряжения во внутренней и наружной стенках; R — средний радиус двухслойного кольца; δ — зазор между стенками; p_r — давление в камере; $p_{ж}$ — давление между стенками (рис. 14.2, а).

Поскольку обычно $\delta \ll R$, а давление $p_{ж}$ имеет тот же порядок, что и давление газов p_r , то вторым слагаемым в уравнении (14.1) можно пренебречь; тогда получим

$$\sigma' h' + \sigma'' h'' = p_r R. \quad (14.2)$$

Задача по нахождению σ' и σ'' является статически неопределимой, и поэтому к уравнению (14.2) следует добавить уравнение в перемещениях. Полные окружные удлинения внутренней и наружной стенок

$\epsilon''_{п}$ и $\epsilon''_{п}$ являются суммами силовых и температурных удлинений:

$$\epsilon''_{п} = \epsilon' + \epsilon'_t; \quad \epsilon''_{п} = \epsilon'' + \epsilon''_t, \quad (14.3)$$

где ϵ'_t и ϵ''_t — температурные удлинения, определяемые соответствующими средними температурами t' и t'' стенок. Силовые удлинения ϵ' и ϵ'' определяют по диаграммам растяжения $\sigma - \epsilon$.

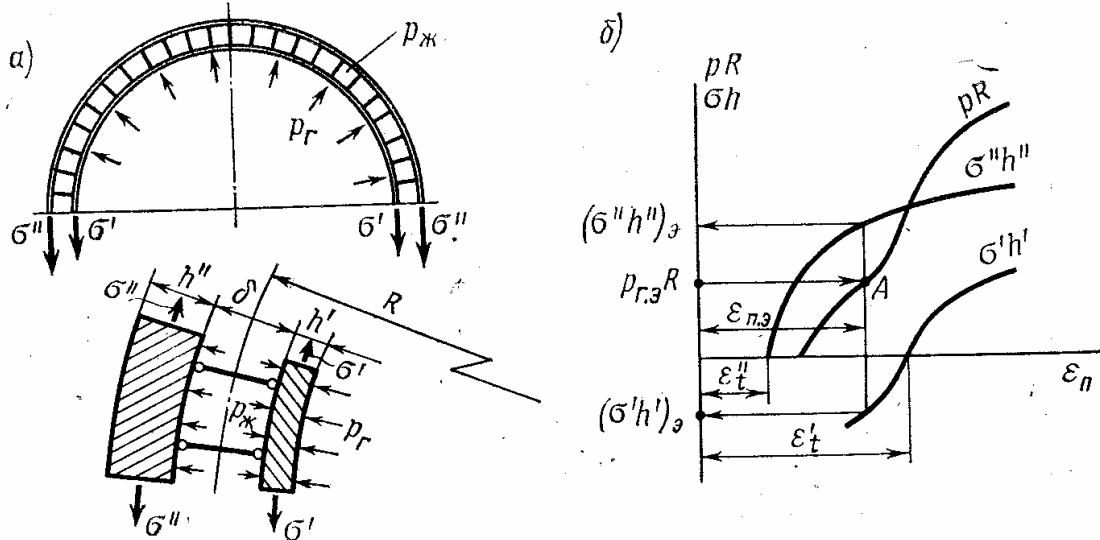


Рис. 14.2

Поскольку связи между стенками считаются жесткими, то, очевидно,

$$\epsilon' + \epsilon'_t = \epsilon'' + \epsilon''_t. \quad (14.4)$$

Если диаграммы растяжения $\sigma' = \sigma'(\epsilon')$ и $\sigma'' = \sigma''(\epsilon'')$ при соответствующих температурах t' и t'' заданы, то уравнений (14.2) и (14.4) достаточно, чтобы найти величины σ', σ'' , а также увеличение диаметра кольца в рабочем режиме $2\Delta R = 2R\epsilon_{п,э}$ при эксплуатационном давлении газов $p_{г,э}$.

Чтобы выяснить качественную сторону взаимодействия внутренней и наружной стенок, рассмотрим вначале условия упругой работы материала; в этом случае легко получить аналитические выражения для напряжений и деформаций в оболочке камеры. Обозначив через E' и E'' модули упругости материалов внутренней и наружной стенок при соответствующих температурах и учитывая, что в упругой области $\sigma' = E'\epsilon'$ и $\sigma'' = E''\epsilon''$, из уравнений (14.2) и (14.4) получим

$$\sigma' h' = \frac{p_r R}{1 + E'' h'' / (E' h')} - \frac{(\epsilon'_t - \epsilon''_t) E' h'}{1 + E' h' / (E'' h'')};$$

$$\sigma'' h'' = \frac{p_r R}{1 + E' h' / (E'' h'')} + \frac{(\epsilon'_t - \epsilon''_t) E' h'}{1 + E' h' / (E'' h'')}.$$

Поскольку для оболочки камеры $\epsilon'_t > \epsilon''_t$, то из полученных формул следует, что наружная стенка всегда растянута, а внутренняя стенка может быть как растянута, так и сжата в зависимости от соот-

ношения между давлением p_r , разностью температурных удлинений ($\varepsilon'_i - \varepsilon''_i$) и жесткостями стенок $E'h'$, $E''h''$. Но, как уже отмечалось, материал стенок камеры чаще всего работает за пределом упругости, что необходимо учитывать в расчете.

Так как диаграммы растяжения обычно заданы в виде графиков, то решение приходится вести либо численным подбором, либо, что в данном случае удобнее, графически. Для этого по диаграммам растяжения $\sigma' = \sigma'(\varepsilon')$ и $\sigma'' = \sigma''(\varepsilon'')$ следует построить кривые $\sigma'h' = f(\varepsilon_{\text{п}})$ и $\sigma''h'' = f(\varepsilon_{\text{п}})$, т. е. изменить масштаб диаграмм растяжения материала внутренней и наружной стенок в соответствии с их толщинами h' и h'' и сместить начало отсчета по оси абсцисс соответственно на величины ε'_i и ε''_i (рис. 14.2, б). Для простоты диаграмму сжатия считают совпадающей с диаграммой растяжения. Сложив графически эти две кривые, можно построить зависимость суммы $(\sigma'h' + \sigma''h'')$ от полного удлинения $\varepsilon_{\text{п}}$; точка пересечения этой последней зависимости с прямой $p_{г.э} R$ и даст рабочую точку A . Таким образом можно определить напряжения во внутренней и наружной стенках в рабочем режиме $\sigma'_э$ и $\sigma''_э$. Следует подчеркнуть, что внутренняя стенка из-за больших температурных удлинений обычно оказывается сжатой. После того как напряжения во внутренней и наружной стенках определены, нетрудно подсчитать силы в связях между оболочками. В современных двигателях связи располагают так часто, что их действие на стенки вполне можно заменить осредненным контактным давлением p_k (положительное давление соответствует растягивающим усилиям в связях). Тогда, рассмотрев равновесие элемента внутренней стенки, можно получить

$$p_k = (p_{ж} - p_r) + \sigma'h'/R. \quad (14.5)$$

Как следует из этой формулы, в рабочем режиме связи могут работать как на растяжение, так и на сжатие.

Если значения пределов прочности $\sigma'_в$ и $\sigma''_в$ материалов стенок при соответствующих температурах известны, то предельное давление легко можно определить по формуле

$$p_p = (\sigma'_в h' + \sigma''_в h'')/R. \quad (14.6)$$

Сравнивая значения рабочего давления $p_{г.э}$ газов и предельного давления p_p , судят о запасе прочности камеры.

В заключение следует подчеркнуть, что все полученные в расчете «по кольцу» формулы могут быть использованы только для ориентировочного расчета. Основное преимущество решения «по кольцу» состоит в его простоте и наглядности, в том, что с его помощью можно легко проследить за влиянием того или иного параметра (толщин стенок, их материалов и температур, значений давлений) на напряжения в стенках и на значения сил в связях. Кроме того, простая модель двухслойного кольца, материал которого считается работающим в однослойном напряженном состоянии, позволяет хотя бы качественно проследить за влиянием таких факторов, как повторные пуски двигателя, остаточные технологические напряжения, и учесть реальную последовательность нагружения при пуске двигателя.

Уточненный расчет оболочки двигателя. Прежде всего следует определить запас прочности камеры по предельным нагрузкам. Для этого подсчитанные в нескольких характерных сечениях эксплуатационные суммарные внутренние силы T_1 и T_2 сравнивают с подсчитанными в тех же сечениях предельными значениями T_{1p} и T_{2p} .

При определении сил T_1 и T_2 камеру можно рассматривать как безмоментную тонкостенную оболочку, нагруженную внутренним давлением. Площадь сечения охлаждающего тракта существенно меньше площади сечения самой камеры, поэтому при составлении уравнений равновесия влиянием давления в межстеночном пространстве можно пренебречь. Важно подчеркнуть, что задача нахождения сил T_1 и T_2 в безмоментной оболочке является статически определимой, и эти силы не зависят ни от температуры, ни от свойств материала и толщин стенок камеры, ни от способа их скрепления, а определяются исключительно геометрией самой камеры и законом распределения давления газов.

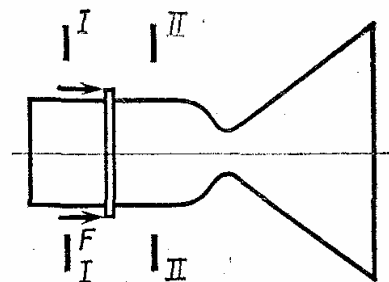


Рис. 14.3

Осевую силу T_1 в любом сечении камеры легко найти из условия равновесия в проекции на ось камеры, если известно место крепления двигателя. Так, например, для сечений I—I и II—II (рис. 14.3) соответственно

$$T_1 = p_r R / 2; \quad T_1 = p_r R / 2 - F / (2\pi R),$$

где F — тяга двигателя.

Окружную силу T_2 находят из уравнения Лапласа

$$T_1 / R_1 + T_2 / R_2 = p_r, \quad (14.7)$$

где R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны оболочки в рассматриваемом сечении камеры.

В упрощенном варианте расчета предельные значения сил T_{1p} и T_{2p} могут быть подсчитаны по формулам

$$T_{1p} = T_{2p} = T_p; \quad T_p = \sigma'_b h' + \sigma''_b h'', \quad (14.8)$$

где σ'_b и σ''_b — пределы прочности материалов стенок при средней температуре.

Проведя расчет камеры в нескольких сечениях, за окончательный запас прочности следует взять наименьшее из полученных отношений

$$T_p / T_b = n. \quad (14.9)$$

Если подсчитанный запас прочности не удовлетворяет конструктора, то следует изменить какие-либо параметры двигателя. Важно подчеркнуть, что все эти параметры тесно связаны между собой. Так, изменение толщин стенок камеры вызывает изменение их температуры, и прежде чем производить новый расчет на прочность, необходимо заново сделать тепловой расчет двигателя. Однако изменение толщины только наружной стенки обычно слабо сказывается на изменении ее

температуры и температуры внутренней стенки. Поэтому для данной толщины внутренней стенки, проделав один раз тепловой расчет двигателя, можно по формулам (14.8) и (14.9) подбирать толщину наружной стенки при заданном запасе прочности:

$$h'' = (np_{г.в}R - \sigma'_в h') / \sigma''_в. \quad (14.10)$$

Для более полной оценки работоспособности камеры недостаточно знать только запас прочности по предельным нагрузкам. Целесообразно еще определить напряженно-деформированное состояние стенок камеры в рабочем режиме [26]. Это необходимо также и для дальнейшего расчета местных деформаций в охлаждающем тракте.

В рассматриваемом сечении предполагаются известными силы T_1 и T_2 , причем

$$T_1 = \int_{-h'/2}^{h'/2} \sigma'_x dz + \sigma_x h'', \quad T_2 = \int_{-h'/2}^{h'/2} \sigma'_\varphi dz + \sigma''_\varphi h''. \quad (14.11)$$

Здесь и всюду в дальнейшем температура наружной стенки принята постоянной по толщине, следовательно, и напряжения в наружной стенке постоянны по толщине. Поэтому интегрирование производится только по толщине внутренней стенки.

Силовые удлинения в стенке камеры

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon'_\varphi &= \varepsilon_{\varphi\Pi} - \varepsilon'_t; & \varepsilon'_x &= \varepsilon_{x\Pi} - \varepsilon'_t; \\ \varepsilon''_\varphi &= \varepsilon_{\varphi\Pi} - \varepsilon''_t; & \varepsilon''_x &= \varepsilon_{x\Pi} - \varepsilon''_t, \end{aligned} \right\} \quad (14.12)$$

где $\varepsilon_{\varphi\Pi}$ и $\varepsilon_{x\Pi}$ — полные геометрические удлинения, одинаковые для внутренней и наружной стенок в каждом из сечений камеры по допущению о жесткости связей; ε_t — температурные удлинения, изменяющиеся по толщине внутренней стенки с изменением температуры и постоянные по толщине наружной стенки. Интенсивности деформаций в каждой точке определяются формулами [14, 26]:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon'_i &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon'_\varphi)^2 + \varepsilon'_\varphi \varepsilon'_x + (\varepsilon'_x)^2}; \\ \varepsilon''_i &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon''_\varphi)^2 + \varepsilon''_\varphi \varepsilon''_x + (\varepsilon''_x)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (14.13)$$

По диаграммам растяжения $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, соответствующим температуре стенки в каждой рассматриваемой точке, определяют интенсивности напряжений σ'_i и σ''_i , а затем по соотношениям теории малых упруго-пластических деформаций подсчитывают осевые и окружные напряжения по сечению стенок камеры:

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= \frac{4}{3} \frac{\sigma'_i}{\varepsilon'_i} \left(\varepsilon'_x + \frac{1}{2} \varepsilon'_\varphi \right), & \sigma'_\varphi &= \frac{4}{3} \frac{\sigma'_i}{\varepsilon'_i} \left(\varepsilon'_\varphi + \frac{1}{2} \varepsilon'_x \right), \\ \sigma''_x &= \frac{4}{3} \frac{\sigma''_i}{\varepsilon''_i} \left(\varepsilon''_x + \frac{1}{2} \varepsilon''_\varphi \right), & \sigma''_\varphi &= \frac{4}{3} \frac{\sigma''_i}{\varepsilon''_i} \left(\varepsilon''_\varphi + \frac{1}{2} \varepsilon''_x \right). \end{aligned} \quad (14.14)$$

Задача, следовательно, сводится к определению таких значений $\varepsilon_{\text{хп}}$ и $\varepsilon_{\text{фп}}$, при которых удовлетворяются уравнения (14.11). Поскольку в решение входят графически заданные зависимости $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$, совпадающие согласно теории малых упругопластических деформаций с диаграммами растяжения $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, то определять $\varepsilon_{\text{хп}}$ и $\varepsilon_{\text{фп}}$ удобнее всего численным подбором. Преобразовав уравнения (14.11) и используя выражения (14.12) и (14.14), получим

$$\varepsilon_{\text{хп}} = \left(T_1 - \frac{1}{2} T_2 + B \right) / A, \quad \varepsilon_{\text{фп}} = \left(T_2 - \frac{1}{2} T_1 + B \right) / A, \quad (14.15)$$

где

$$A = \int_{-h'/2}^{h'/2} \frac{\sigma_i'}{\varepsilon_i'} dz + \frac{\sigma_i''}{\varepsilon_i''} h''; \quad B = \int_{-h'/2}^{h'/2} \frac{\sigma_i'}{\varepsilon_i'} \varepsilon_i' dz + \frac{\sigma_i''}{\varepsilon_i''} \varepsilon_i'' h''. \quad (14.16)$$

При определении величин A и B по выражениям (14.16) или при подсчете сил T_1 и T_2 по выражениям (14.11) толщину внутренней стенки разбивают на несколько слоев. Число слоев следует выбирать в зависимости от перепада температур по толщине внутренней стенки. Так, для стальной стенки, когда перепад температур достигает нескольких сот градусов, можно взять от трех до пяти слоев. Для медной стенки при перепаде температур в несколько десятков градусов вполне достаточно ограничиться одним-двумя слоями.

Подбор величин $\varepsilon_{\text{хп}}$ и $\varepsilon_{\text{фп}}$ ведут в такой последовательности:

1. Для величин $\varepsilon_{\text{хп}}$ и $\varepsilon_{\text{фп}}$ задают нулевые приближения, за которые удобно брать полные окружные и осевые удлинения, подсчитанные без учета влияния внутренней стенки, т. е. принять

$$\sigma_x'' = T_1/h'', \quad \sigma_\phi'' = T_2/h''. \quad (14.17)$$

Тогда, подсчитав интенсивность напряжений наружной стенки,

$$\sigma_i'' = \frac{1}{h''} \sqrt{T_1^2 - T_1 T_2 + T_2^2}, \quad (14.18)$$

из диаграммы растяжения $\sigma_i'' = \sigma_i''(\varepsilon_i'')$ можно найти интенсивность деформаций ε_i'' наружной стенки и, воспользовавшись соотношениями теории малых упругопластических деформаций [14, 26], вычислить нулевые приближения:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\text{хп}} &= \frac{\varepsilon_i''}{\sigma_i'' h''} \left(T_1 - \frac{1}{2} T_2 \right) + \varepsilon_i'', \\ \varepsilon_{\text{фп}} &= \frac{\varepsilon_i''}{\sigma_i'' h''} \left(T_2 - \frac{1}{2} T_1 \right) + \varepsilon_i''. \end{aligned} \right\} \quad (14.19)$$

2. По зависимости (14.12) и (14.13) подсчитывают удлинения и интенсивности деформаций в стенках камеры.

3. По диаграммам растяжения определяют интенсивности напряжений в стенках.

4. По формулам (14.15) подсчитывают новые приближения для полных окружных и осевых удлинений (значения сил T_1 и T_2 считают-

ся известными). Подбор числовых значений полных окружных и осевых деформаций можно считать законченным, если последующие приближения с заданной точностью совпадают с предыдущими. (В практических расчетах целесообразно ограничиться погрешностью $\Delta \varepsilon \approx 10^{-4}$.)

Проделав то же для нескольких сечений камеры и определив для них полные окружные и осевые удлинения $\varepsilon_{\phi\Pi}$ и $\varepsilon_{x\Pi}$, судят о том, как деформируется вся камера в рабочем режиме. При этом осевые и радиальные перемещения камеры подсчитывают по значениям осевых и окружных удлинений, как для безмоментной оболочки. Если значения перемещений удовлетворяют требованиям, предъявляемым конструктором к камере двигателя, то прочностной расчет по общей несущей способности можно считать законченным. В противном случае нужно внести изменения в конструкцию камеры, заново определить температурное состояние ее стенок и по полученным новым данным повторить весь прочностной расчет.

В изложенной схеме расчета не учитывалось явление ползучести. А между тем за несколько минут работы двигателя может заметно проявиться кратковременная ползучесть материала стенок камеры. Учесть в расчете эту кратковременную ползучесть проще всего с помощью теории старения [14]. Для этого весь расчет по определению напряженно-деформированного состояния стенок камеры следует повторить для нескольких моментов времени работы двигателя, используя каждый раз вместо статических диаграмм растяжения материала зависимости $\sigma_i(\varepsilon_i)$, полученные перестройкой кривых простого последствия для тех же моментов времени. В результате такого расчета находим зависимости изменения полных окружных и осевых удлинений, а следовательно, радиальных и осевых перемещений стенок камеры во времени.

§ 14.3. Расчет некоторых элементов конструкции камеры ЖРД

Местные прогибы стенок камеры между связями возникают как результат действия контактных сил в связях. Если связи между стенками растянуты, то стенки камеры деформируются, как утрированно показано на рис. 14.4, а; если связи сжаты, то местные деформации стенок имеют характер, показанный на рис. 14.4, б; наконец, если связи между оболочками вообще не нагружены, то нет и местных деформаций стенок.

Цель расчета — определить силы, возникающие в связях в рабочем режиме ЖРД, и местные прогибы, вызываемые этими силами. Такой расчет должен быть проведен для нескольких характерных сечений: в камере сгорания, в зоне критического сечения и в сопловой части. На работу двигателя сильнее всего влияют местные прогибы внутренней стенки, поэтому в дальнейшем изложение методики расчета ведется именно для нее, хотя сама методика полностью применима и к расчету прогибов наружной стенки.

Расчету на местные прогибы должен предшествовать расчет на общую несущую способность камеры (см. § 14.2). Поэтому предполага-

ются известными осевые и окружные напряжения σ'_x , σ'_φ и σ''_x , σ''_φ в стенках, а также полные осевые и окружные удлинения ϵ_{xII} и $\epsilon_{\varphi II}$. Должно быть также задано давление охлаждающей среды по длине камеры и геометрия связей между оболочками.

При определении сил в частых связях реакции этих связей можно «размазать» по поверхности стенки, заменив их действие на стенки камеры приведенным контактным давлением p_K . Тогда из условия равновесия элемента внутренней стенки можно получить

$$p_K = \xi p_{ж} + \frac{1}{R_1} \int_{-h'/2}^{+h'/2} \sigma'_x dz + \frac{1}{R_2} \int_{-h'/2}^{+h'/2} \sigma'_\varphi dz - p_\Gamma, \quad (14.20)$$

где R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны оболочки камеры в рассматриваемом сечении, а коэффициент ξ равен отношению площади поверхности стенки, на которую действует давление охлаждающей жидкости, к площади поверхности стенки, на которую действует давление газа. В частности, для изображенных на рис. 14.4 продольных связей $\xi = a/(a + b)$.

В рабочем режиме контактное давление может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от соотношения между жесткостями и температурами внутренней и наружной стенок от перепада давления ($p_\Gamma - p_{ж}$) на внутренней стенке. С точки зрения прочности сварного или паяного соединения связей со стенками опасным является случай, когда $p_K > 0$, т. е. когда связи работают на растяжение. Для оценки запаса прочности связей следует подсчитать значение растягивающей силы, действующей на одну сварную точку или на единицу длины шва, и сравнить его с соответствующим значением разрушающей силы. (Разрушающую силу определяют экспериментально для той температуры, при которой работает соединение в рабочем режиме.)

Сила, приходящаяся на единицу длины шва (рис. 14.4),

$$q_{шв} = p_K (a + b). \quad (14.21)$$

Если стенки камеры соединены между собой с помощью сварных точек, то сила, действующая на одну точку,

$$F_0 = p_K S_0,$$

где S_0 — площадь поверхности оболочки, приходящаяся на одну сварную точку.

Определение местных прогибов стенки между связями — чрезвычайно сложная задача теории оболочек, так как материал стенки ра-

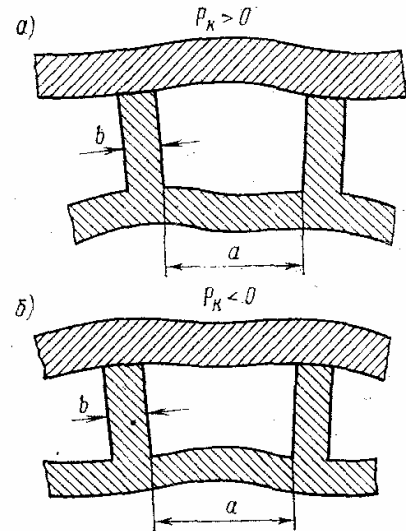


Рис. 14.4

ботаает за пределом упругости, свойства его в результате неравномерного нагрева существенно изменяются по толщине, а в общем случае следует еще учитывать геометрическую нелинейность задачи. Эти трудности удается преодолеть с помощью численных методов решения. Подробное исследование вопроса о местных прогибах в оболочках ЖРД можно найти в литературе [26].

Чтобы учесть ползучесть материала стенки, весь расчет (в том числе, конечно, и расчет на общую несущую способность) следует повторить для нескольких моментов времени, используя каждый раз кривые растяжения, полученные перестройкой кривых простого последования по теории старения [14].

Рассмотрим две задачи расчета сопла: 1) определение напряженно-деформированного состояния, сил в связях и местных прогибов на охлаждаемом участке сопла; 2) расчет на устойчивость неохлаждаемого насадка при работе двигателя в нерасчетном режиме.

В основной части сопла давление газов мало, и его влиянием на напряженно-деформированное состояние стенок можно пренебречь. Тогда полные средние удлинения $\varepsilon_{x\Pi}$ и $\varepsilon_{\varphi\Pi}$ и напряжения σ'_x , σ'_φ , σ''_x , σ''_φ в стенках будут определяться только температурным состоянием сопла. В общем случае расчет можно вести по схеме, изложенной в § 14.2, но если жесткости стенок на растяжение в окружном и осевом направлениях примерно одинаковы, т. е. если сопло рассматривать как изотропное, то расчет упрощается. В этом случае независимо от геометрии всей оболочки в каждом слое по толщине стенок справедливы зависимости:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x\Pi} = \varepsilon_{\varphi\Pi} = \varepsilon_{\Pi}; \quad \varepsilon'_x = \varepsilon'_\varphi = \varepsilon_{\Pi} - \varepsilon'_t = \varepsilon'; \quad \varepsilon''_x = \varepsilon''_\varphi = \varepsilon_{\Pi} - \varepsilon''_t = \varepsilon''; \\ \varepsilon'_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon'^2_x + \varepsilon'_x \varepsilon'_\varphi + \varepsilon'^2_\varphi} = 2\varepsilon'; \quad \varepsilon''_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon''^2_x + \varepsilon''_x \varepsilon''_\varphi + \varepsilon''^2_\varphi} = 2\varepsilon''; \\ \sigma'_i = \sqrt{\sigma'^2_x - \sigma'_x \sigma'_\varphi + \sigma'^2_\varphi} = \sigma'; \quad \sigma''_i = \sqrt{\sigma''^2_x - \sigma''_x \sigma''_\varphi + \sigma''^2_\varphi} = \sigma''. \end{aligned} \quad (14.22)$$

Из уравнений равновесия элемента оболочки получается соотношение

$$\int_{-h'/2}^{h'/2} \sigma' dz = -\sigma'' h''. \quad (14.23)$$

Дальнейший расчет удобно вести графически, как это делалось в § 14.2 при упрощенном расчете камеры «по кольцу». Соответствующие графические построения приведены на рис. 14.5. Зависимость силы $T'' = \sigma'' h''$ в наружной стенке от полного удлинения ε_{Π} получена простой перестройкой диаграммы растяжения материала наружной стенки при ее температуре t'' , которую можно считать постоянной по толщине. При построении аналогичной зависимости для внутренней стенки ее разбивают по толщине на несколько слоев $\Delta h'_k$, для каждого

из них строят свою кривую, а затем их суммированием получают для всей внутренней стенки зависимость

$$T' = \int_{-h'/2}^{h'/2} \sigma' dz = \sum_k \sigma'_k \Delta h'_k.$$

Из условия равновесия ($T' + T'' = 0$) находят рабочую точку A , определяют полное окружное и осевое удлинения $\varepsilon_n = \varepsilon_{xII} = \varepsilon_{\Phi II}$ и осевые и окружные силы в стенках сопла. После этого силы в связях и местные прогибы охлаждающего тракта определяют точно так же, как для камеры сгорания.

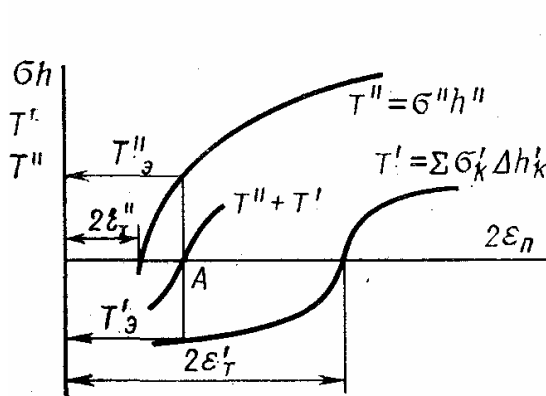


Рис. 14.5

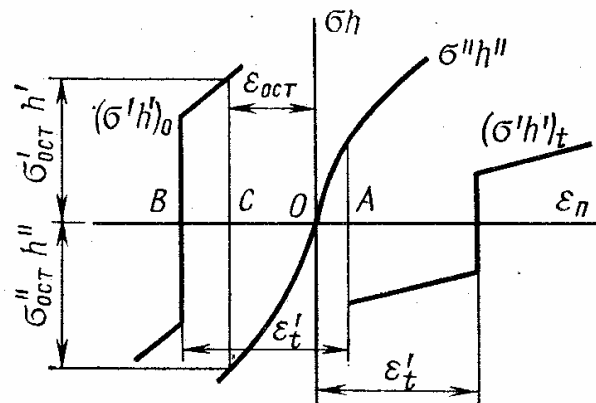


Рис. 14.6

Следует отметить, что после выключения двигателя размеры сопла могут уменьшиться по сравнению с его начальными размерами. Физика этого явления заключается в следующем. В работающем двигателе нагретая внутренняя стенка «распирает» более холодную наружную стенку, что приводит к увеличению размеров сопла. Напряжения во внутренней стенке (сжатой) обычно значительно превышают предел упругости, и полное удлинение ε_n в рабочем режиме, естественно, бывает значительно меньше температурного удлинения внутренней стенки (рис. 14.5). После останова двигателя происходит охлаждение внутренней стенки, и она стремится уменьшиться в размерах. А поскольку в ней остались пластические деформации сжатия, то температурное сокращение размеров внутренней стенки приведет к сжатию наружной, т. е. размеры сопла уменьшаются по сравнению с начальными.

Проиллюстрировать это можно таким примером (рис. 14.6). Для простоты рассуждений предполагаем, что наружная стенка вообще не нагревается, а материал внутренней стенки работает по диаграмме жестко-пластического тела с упрочнением, причем его пределы текучести в холодном и нагретом состоянии различны. Положим также, что перед первым пуском двигателя в стенках сопла нет никаких остаточных напряжений. Описанным выше графическим решением «по кольцу» определяем рабочую точку A при первом пуске двигателя. Если при охлаждении двигателя мысленно отделить внутреннюю стенку от наружной, то она сокращается на размер ε'_t (от рабочей точки A до точки B). Для определения действительного сокращения можно из

точки B как из начала координат построить диаграмму растяжения холодной внутренней стенки и графическим построением найти точку C , определяющую остаточные напряжения $\sigma'_{ост}$, $\sigma''_{ост}$ и остаточные деформации $\epsilon_{ост}$ в стенках сопла после первого пуска двигателя. Аналогичные построения можно продолжить и для последующих пусков двигателя; причем при повторных пусках сопло монотонно уменьшается в размерах. В реальных двигателях к описанным явлениям добавляется ползучесть материала внутренней стенки, но характер «сжимания» сопла остается тем же.

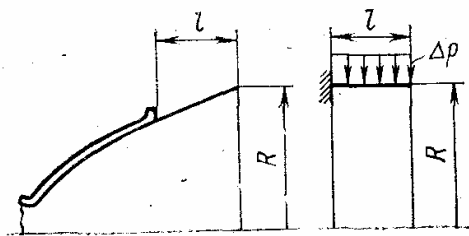


Рис. 14.7

При расчете на устойчивость неохлажденный насадок, нагруженный в нерасчетном режиме работы внешним перепадом давления Δp , можно заменить консольно закрепленной цилиндрической оболочкой радиусом R и длиной l (рис. 14.7). Если материал и толщина оболочки неохлаждаемого насадка выбраны и температурное состояние его определено, то дальнейший расчет на устойчивость можно проделать так же, как это делалось при расчете на устойчивость стабилизирующей юбки (см. § 13.1).

§ 14.4. Особенности расчета конструкции РДТТ

Ракетный двигатель твердого топлива (РДТТ) является вторым (после ЖРД) основным вариантом современного ракетного двигателя. РДТТ используется как в качестве стартового ускорителя, так и в качестве маршевого двигателя для баллистических или крылатых ракет. Вопросы расчета и проектирования стартовых РДТТ упрощаются бла-

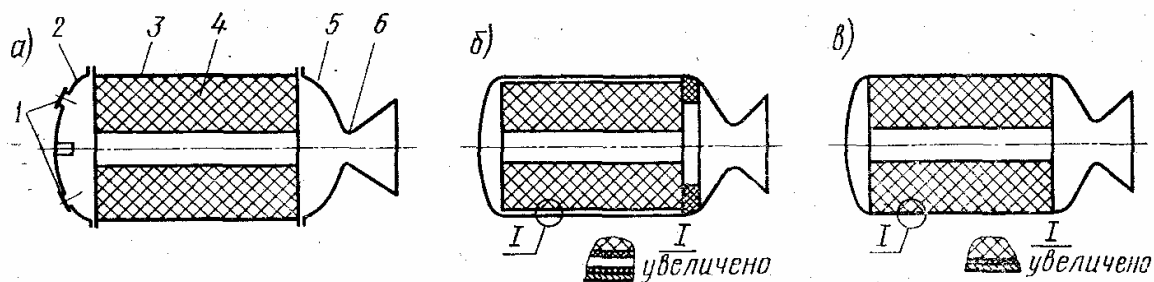


Рис. 14.8

годаря сравнительно малому времени их работы. Кроме того, весовые характеристики стартовых двигателей не так важны для ракеты в целом, как весовые характеристики маршевых двигателей. Поэтому в дальнейшем изложении основное внимание уделено особенностям расчета на прочность маршевых РДТТ с временем работы до нескольких десятков секунд.

Типичная схема РДТТ приведена на рис. 14.8, а. Корпус РДТТ включает в себя обечайку 3, переднее 2 и заднее 5 днища и заряд твердого топлива 4. На переднем днище имеются отсечные сопла 1, на заднем днище расположен сопловой блок 6. Заряд твердого топлива мо-

жет быть свободно вложен в корпус двигателя (рис. 14.8, б) или прочно скреплен с ним (рис. 14.8, в). Сопловой блок может состоять из одного или нескольких сопл, причем они могут быть либо неподвижно прикреплены к днищу, либо быть выполнены в виде поворотных сопл, являющихся органом рулевого управления ракеты.

Корпус работающего двигателя можно рассматривать как сосуд, нагруженный давлением газов, образующихся в результате горения заряда твердого топлива. Основное назначение корпуса — выдержать в течение заданного времени совместное воздействие внутреннего давления и высоких температур и передать на остальную часть ракеты силу тяги. Кроме того, РДТТ обычно является частью силового корпуса всей ракеты и поэтому он воспринимает продольные и поперечные перегрузки, а также испытывает аэродинамический нагрев. С точки зрения прочности, напряжения от внешних продольных и поперечных нагрузок не опасны, поскольку обычно они малы по сравнению с напряжениями, вызываемыми рабочим давлением газов. Но они могут привести к потере устойчивости корпуса двигателя, если внешние нагрузки действуют на неработающий двигатель. Например, это может произойти с двигателями второй и третьей ступени при работающем двигателе первой ступени или с двигателем первой ступени стоящей на старте ракеты.

Металлический корпус и металлические днища РДТТ целесообразно рассчитывать по разрушающим (предельным) нагрузкам, дополняя в некоторых случаях этот расчет проверкой по допускаемым перемещениям и допускаемым напряжениям. Так, для днищ с несимметрично расположенными соплами дополнительной проверкой по перемещениям будет определение угла поворота оси сопла, вызванное деформацией всего днища. Значения этого угла не должны превышать задаваемого при проектировании. Корпус двигателя из стеклопластика рассчитывают по разрушающим нагрузкам и дополняют расчетом по допускаемым напряжениям, так как стеклопластик — материал хрупкий, и поэтому необходимо проверять, не превышают ли допускаемых значений местные напряжения, вызванные концентрацией напряжений в местах стыков и в местах соединения стеклопластика с металлом.

Особо следует отметить влияние температуры на конструкцию РДТТ. Во-первых, корпус двигателя должен быть предохранен тем или иным способом от непосредственного воздействия высоких температур горячих газов. Во-вторых, должны быть приняты меры, чтобы изменения температуры в процессе изготовления и хранения не приводили к значительным температурным напряжениям и деформациям. Напряжения и деформации могут возникать вследствие резкого (обычно почти в десять раз) различия между коэффициентами линейного расширения топлива и материала корпуса двигателя или вследствие неравномерного поля температур в крупногабаритных зарядах (при резком изменении температуры окружающей среды).

На работоспособность РДТТ, так же как и на работоспособность ЖРД, могут самым существенным образом повлиять весьма сложные динамические явления, происходящие в работающем двигателе [17].

§ 14.5. Расчет корпуса РДТТ

Корпус современного ракетного двигателя твердого топлива является сложной оболочечной конструкцией, уточненный расчет которой может быть выполнен только на ЭВМ с помощью численных методов, описанных в гл. 12. Но для оценочных проектировочных расчетов используют упрощенные аналитические зависимости, основанные на теории безмоментных оболочек (в некоторых случаях с учетом краевого эффекта).

Расчет собственно корпуса двигателя. В настоящее время в РДТТ в основном применяют три типа обечаек: металлические, из композиционных материалов (например, стеклопластиковые) и комбинированные [16, 22]. При расчете обечайки будем полагать, что толщина теплоизоляции выбрана и температура стенки двигателя известна.

Расчет *металлического корпуса* ведут по так называемой котельной формуле и запас прочности n определяют из условия прочности в окружном направлении:

$$n = \sigma_{\text{в}} h / (R p_{\text{э}}), \quad (14.24)$$

где $p_{\text{э}}$ — эксплуатационное давление в двигателе; $\sigma_{\text{в}}$ — предел прочности материала обечайки при соответствующей температуре стенки; h и R — толщина стенки и радиус корпуса. Эта формула справедлива, либо когда обечайка изготовлена без помощи сварки методом раскатки, либо когда для обечайки, свернутой из листа с последующей сваркой, технологически обеспечена равнопрочность основного материала и зоны сварного шва (например, за счет местного утолщения стенки обечайки). В противном случае в формулу вводят поправочный коэффициент, учитывающий ослабление корпуса в зоне сварного шва.

В месте стыковки обечайки с днищами возникают изгибные напряжения от краевого эффекта (см. § 6.1). Для достаточно пластичных материалов местные напряжения практически не отражаются на работоспособности корпуса двигателя. Если же обечайка выполнена из высокопрочных и малопластичных материалов, местные напряжения могут привести к разрушению двигателя. Основная конструктивная мера, применяемая для уменьшения изгибных напряжений от краевого эффекта, — плавное увеличение толщины стенки обечайки в зоне стыка с днищами [22].

Комбинированный корпус состоит из внутренней металлической оболочки, обеспечивающей герметичность, и наружного слоя высокопрочного композиционного материала, например стеклопластика. Подробную теорию проверочного и проектировочного расчетов такого типа комбинированных баллонов давления можно найти в литературе [16]. Здесь мы остановимся на двух задачах расчета комбинированного цилиндрического корпуса: 1) определение напряжений в рабочем режиме; 2) оценка весовой эффективности.

При решении первой задачи будем считать, что и материал металлической оболочки, и композиционный слой работают в упругой области. Поскольку в РДТТ площадь критического сечения сопла обычно

значительно меньше площади поперечного сечения корпуса, то можно принять

$$T_1 = p_3 R / 2; \quad T_2 = p_3 R, \quad (14.25)$$

где T_1 и T_2 — осевая и окружная погонные силы в стенке комбинированного корпуса; R — радиус корпуса.

Если цилиндрическая металлическая оболочка усилена слоем высокопрочного однонаправленного композиционного материала, способного воспринимать только окружные напряжения, то из условия равновесия элемента комбинированного корпуса получаем:

$$\sigma_1' h' = p_3 R / 2, \quad \sigma_2' h' + \sigma_2'' h'' = p_3 R, \quad (14.26)$$

где σ_2' и σ_1' — окружное и осевое напряжения в металлической оболочке; σ_2'' — окружное напряжение в слое композиционного материала; h' и h'' — толщины металлической оболочки и слоя композиционного материала.

Пренебрегая температурными напряжениями и начальными технологическими напряжениями в корпусе, из условия равенства окружных удлинений получим

$$\frac{\sigma_2''}{E_2''} = \frac{1}{E'} (\sigma_2' - \mu' \sigma_1'), \quad (14.27)$$

где E_2'' — модуль упругости слоя однонаправленного композиционного материала в окружном направлении; E' и μ' — модуль упругости и коэффициент Пуассона металла. Из уравнений (14.26) и (14.27) находим

$$\sigma_1' = \frac{p_3 R}{2h'}; \quad \sigma_2' = \frac{p_3 R}{h'} \frac{1 + \mu' E'' h'' / (2E' h')}{1 + E'' h'' / (E' h')}; \quad (14.28)$$

$$\sigma_2'' = \frac{p_3 R}{h'} \frac{E_2''}{E'} \frac{1 - \mu' / 2}{1 + E'' h'' / (E' h')}.$$

Если в комбинированном корпусе существовали начальные напряжения (температурные или технологические), то при упругой деформации металла и композиционного материала их следует просто прибавить к напряжениям, подсчитанным по формулам (14.28). Тогда, обозначив начальное окружное напряжение в металлической оболочке σ_{20}' , и учитывая, что из условия равновесия (14.26) при $p_3 = 0$ начальное окружное напряжение в слое композиционного материала $\sigma_{20}'' = -\sigma_{20}' h' / h''$, вместо формул (14.28) получаем

$$\sigma_1' = \frac{p_3 R}{2h'}; \quad \sigma_2' = \frac{p_3 R}{h'} \frac{1 + \mu E'' h'' / (2E' h')}{1 + E'' h'' / (E' h')} + \sigma_{20}'; \quad (14.29)$$

$$\sigma_2'' = \frac{p_3 R}{h'} \frac{E_2''}{E'} \frac{1 - \mu' / 2}{1 + E'' h'' / (E' h')} - \sigma_{20}' \frac{h'}{h''}.$$

Заметим, что обычно технологические напряжения $\sigma_{20}' < 0$.

Аналогично можно получить решение и в более общем случае, когда корпус укреплен композиционным материалом, воспринимающим как окружные, так и осевые напряжения, а металлическая оболочка работает за пределом упругости [16].

Для оценки весовой эффективности комбинированного корпуса воспользуемся его расчетом по предельной нагрузке (см. § 6.6). При этом будем считать, что материал металлической стенки работает по диаграмме идеальной пластичности, причем предел текучести совпадает с пределом прочности, обозначаемым σ'_B . Тогда, обозначив предел прочности однонаправленного композиционного материала σ''_B и считая, что корпус укреплен нитями только в окружном направлении, получаем

$$T_{1p} = \sigma'_B h', \quad T_{2p} = \sigma'_B h' + \sigma''_B h'', \quad (14.30)$$

где T_{2p} и T_{1p} — предельные окружная и осевая погонные силы в стенке комбинированного корпуса. Оптимальным следует считать такое отношение толщин металла и слоя композиционного материала, при котором стенка комбинированного корпуса равнопрочна в окружном и осевом направлениях. Учитывая соотношения (14.25), находим

$$h'_{\text{опт}} = \frac{h''_0}{2}; \quad \left(\frac{h''}{h'_0} \right)_{\text{опт}} = \frac{1}{2} \frac{\sigma'_B}{\sigma''_B}, \quad (14.31)$$

где $h'_0 = p_p R / \sigma'_B$ — толщина оболочки цельнометаллического корпуса при том же расчетном давлении $p_p = n p_a$.

Введем безразмерную величину \bar{m} , характеризующую весовую эффективность (без массы термоизоляции) обечайки комбинированного корпуса по сравнению с цельнометаллическим:

$$\bar{m} = (\rho' h' + \rho'' h'') / (\rho h'_0), \quad (14.32)$$

где ρ' и ρ'' — плотности металла и композиционного материала. При $h'_0 \geq h' \geq h'_0/2$, используя формулы (14.30), находим

$$\bar{m} = \frac{1}{K} + \frac{h'}{h'_0} \left(1 - \frac{1}{K} \right). \quad (14.33)$$

Здесь $K = (\sigma''_B / \rho'') / (\sigma'_B / \rho')$ — отношение удельных прочностей однонаправленного композиционного материала и металла. В частности, при оптимальном значении $h' / h'_0 = 1/2$ получаем

$$\bar{m} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{K} \right). \quad (14.34)$$

При $h' / h'_0 < 1/2$ металлическую оболочку, очевидно, следует укреплять не только в окружном, но и в поперечном направлении (рис. 14.9). Сделать это можно двумя способами: либо армируя композиционный материал волокнами, составляющими некоторый угол φ с образующей цилиндрической оболочки, либо используя композиционный материал, армированный волокнами в продольно-поперечном направлении. На-

пример, в последнем случае вместо выражений (14.30) для предельных окружной и осевой погонных сил имеем:

$$T_{1p} = \sigma'_B h' + \sigma''_B h''_1, \quad T_{2p} = \sigma'_B h' + \sigma''_B h''_2, \quad (14.35)$$

где h''_2 и h''_1 — соответственно толщины слоев однонаправленного композиционного материала в окружном и осевом направлениях. Тогда, учитывая соотношения (14.25) и условие равнопрочности комбинированного корпуса, приходим к таким зависимостям (при $h'_o/2 \geq h' \geq 0$):

$$h''_1 = h'_o \frac{\sigma'_B}{\sigma''_B} \left(\frac{1}{2} - \frac{h'}{h'_o} \right); \quad h''_2 = h'_o \frac{\sigma'_B}{\sigma''_B} \left(1 - \frac{h'}{h'_o} \right). \quad (14.36)$$

В этом случае

$$\bar{m} = \frac{3}{2} \frac{1}{K} + \frac{h'}{h'_o} \left(1 - \frac{2}{K} \right). \quad (14.37)$$

Если при $h'/h'_o < 1/2$ металлическую оболочку укреплять композиционным материалом, армированными волокнами, перекрещивающимися под оптимальным углом φ , можно показать, что величина \bar{m} комбинированного корпуса определяется той же самой формулой (14.37). На рис. 14.9 приведены зависимости, построенные по формуле (14.33) при $h' > h'_o/2$ и по формуле (14.37) при $h' < h'_o/2$. Интересно отметить, что укрепление металлической оболочки простой поперечной обмоткой при $K < 2$ оказывается выгоднее в весовом отношении, чем усиление продольно-поперечной или наклонной обмоткой. Если еще учесть, что заделка волокон на торцах оболочки при продольно-поперечной и наклонной обмотках вызывает увеличение веса, то практически выигрыш по корпусу в целом по сравнению с цельно-металлическим корпусом при таких видах намотки будет меньше, чем на рис. 14.9.

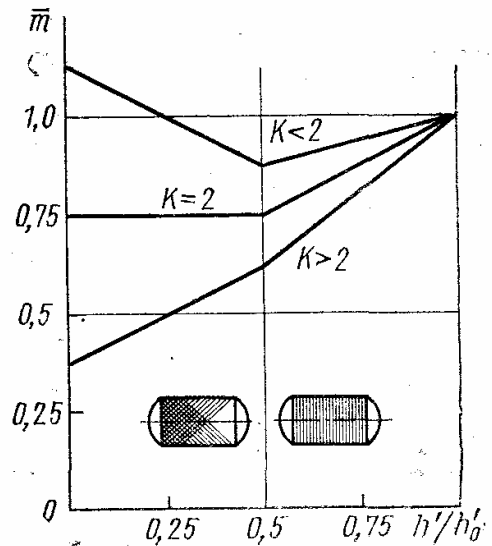


Рис. 14.9

При $h' = 0$ зависимости (14.35) ... (14.37) дают возможность оценить весовую эффективность обечайки корпуса двигателя, изготовленной из композиционного материала методом намотки.

Более подробно с особенностями расчета оболочек двигателя, выполненных из композиционного материала, можно ознакомиться по книгам [16, 22].

Расчет металлических днищ. Одна из основных трудностей расчета днищ состоит в необходимости учитывать ослабляющее влияние имеющих в них сопловых отверстий. Различают два варианта нагружения

сопл: 1) во время работы двигателя на переднем днище сопла заглушены, на заднем — открыты; 2) в процессе опрессовки двигателя могут быть заглушены и сопловые отверстия на заднем днище. Соответственно возникают две задачи: 1) расчет нагруженного внутренним давлением днища с заглушенным соплом и 2) расчет днища с открытым соплом.

В настоящее время используют несколько способов решения задач такого типа. Например, можно из линейного решения задачи об изгибе упругой оболочки найти максимальные значения напряжений, возникающих в зоне отверстия днища; сравнивая эти величины с напряжениями в аналогичном днище без отверстия, можно получить так называемый коэффициент концентрации напряжений. Значения этого коэффициента табулируются и в дальнейшем используются в известной схеме расчета по допускаемым напряжениям.

Но при изгибе тонких оболочек зона повышенных напряжений носит ярко выраженный локальный характер, связанный с рассмотренным в § 6.1 краевым эффектом. Поэтому расчет по допускаемым напряжениям с использованием коэффициента концентрации напряжений оправдан только для очень хрупких материалов. Для пластичных материалов, чаще всего используемых в реальных конструкциях, такой подход нецелесообразен.

В некоторых случаях коэффициент концентрации напряжений определяют с учетом пластических деформаций в зоне краевого эффекта. Такое решение дает более полное представление о распределении напряжений в реальном днище по сравнению с решением в упругой области, но оно все же не устраняет основного недостатка самого подхода к расчету днищ по допускаемым напряжениям: невозможность правильно оценить работоспособность днища из пластичного материала.

Как отмечалось выше, для ракетных двигателей логичнее вести расчет на прочность не по допускаемым напряжениям, а по допускаемым перемещениям. Для этого можно, используя диаграмму растяжения реального материала днища, с помощью например, шагового метода решения выяснить картину поведения данного днища при данном варианте нагружения. Затем, имея полную информацию о поведении днища под нагрузкой, можно обоснованно найти то значение нагрузки, при котором днище еще сохраняет работоспособность.

Наконец, возможен и расчет днища по предельной нагрузке, когда материал реального днища заменяют идеальным жесткопластическим телом и определяют то значение нагрузки, при котором в результате развития пластических деформаций конструкция из жесткопластического тела перестает быть жесткой, превращается в механизм (см. § 6.6). Расчет по предельным нагрузкам в такой трактовке тесно примыкает к расчету по допускаемым перемещениям. Действительно, достижение предельной нагрузки характеризуется прежде всего резким ростом перемещений. Поэтому расчет днища с отверстиями (по предельной нагрузке) можно рассматривать как упрощенный первый этап полного расчета днища по допускаемым перемещениям.

Примеры решения задач по несущей способности днищ с заглушенными и открытыми соплами можно найти в литературе [17].

§ 14.6. Напряжения и деформации в заряде твердого топлива

Теоретическое определение условий нормального горения топлива и истечения продуктов его сгорания, обеспечивающих заданный закон изменения тяги РДТТ по времени, является чрезвычайно сложной комплексной проблемой термодинамики и газодинамики. Изучение чисто механического поведения заряда твердого топлива входит одной из составных частей в эту проблему.

Заряд твердого топлива можно рассматривать как конструкцию, воспринимающую во время изготовления, транспортировки, хранения и работы двигателя определенные нагрузки: инерционные, температуры и перепады давлений.

В полете основными нагрузками, действующими на заряд твердого топлива, являются инерционные силы и давление газов. Если заряд свободно вложен в корпус, продольные инерционные силы воспринимаются специальными опорными устройствами; если заряд скреплен с корпусом, инерционные силы передаются непосредственно на корпус двигателя. В свободно вложенном заряде давление газов создает почти равномерное сжатие, обычно не приводящее к неприятным последствиям. Заряд, скрепленный с корпусом двигателя, можно рассматривать как нагруженный внутренним давлением толстостенный сосуд. Давление газов вызывает в нем сложное неоднородное напряженное состояние, которое может привести к разрушению заряда.

Для крупногабаритных зарядов твердого топлива существенным оказывается действие собственного веса. Под влиянием этой силы в процессе длительного хранения и транспортировки заряда из-за ползучести твердого топлива может нежелательно измениться геометрия заряда.

На процессе работы двигателя могут отразиться три основные вызываемые перечисленными нагрузками причины:

1) деформация заряда твердого топлива, происходящая в нем как во время хранения, так и в рабочем режиме и изменяющая номинальную геометрию заряда, например проходное сечение внутреннего канала;

2) увеличение поверхности горения в результате разрушения, растрескивания заряда, вызываемого действующими в нем напряжениями;

3) разрушение заряда в конце работы двигателя вследствие потери устойчивости под действием инерционных сил и перепадов давлений (в основном, для свободно вложенного заряда).

Основной задачей при изучении механического поведения заряда твердого топлива является определение его напряженно-деформированного состояния. Для заряда неосесимметричной формы — это сложная трехмерная задача деформирования твердого тела, имеющего типичные для полимера свойства. Задача существенно усложняется из-за того, что в зависимость напряжение — деформация входит время. Поэтому для решения должны быть заданы начальные и граничные условия.

В общем случае решение такого типа задач с учетом реальных свойств твердого топлива возможно только на мощных ЭВМ с использованием методов конечных элементов в сочетании с шаговыми мето-

дами решения. Лишь в некоторых частных случаях могут быть получены сравнительно простые аналитические решения.

В качестве примера наиболее простого аналитического решения приведем решение задачи о напряжениях и деформациях в заряде твердого топлива, скрепленном с корпусом двигателя и имеющем форму кругового цилиндра. Топливо будем считать работающим упруго; такое упрощение свойств реального топлива возможно при определении напряжений, вызываемых быстро нарастающим давлением при запуске двигателя, и при низких температурах, когда вязкоупругими свойствами топлива можно пренебречь.

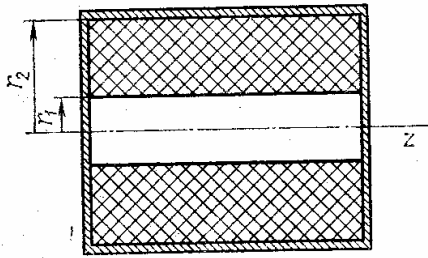


Рис. 14.10

Для решения этой задачи воспользуемся результатами решения плоской задачи теории упругости в полярных координатах (см. § 2.3). Особенности крепления торцов заряда твердого топлива учитывать не будем и заменим реальный двигатель упрощенной схемой (рис. 14.10). Обычно модуль упругости

материала корпуса двигателя на несколько порядков больше, чем модуль упругости твердого топлива; поэтому на первом этапе решения при определении напряженно-деформированного состояния заряда деформациями корпуса можно полностью пренебречь и принять его абсолютно жестким [22]. В этом случае при осесимметричном нагружении заряд твердого топлива, изображенный на рис. 14.10, находится в условиях плоского деформированного состояния ($\epsilon_z = 0$). Воспользовавшись уравнениями (2.30) и (2.31), запишем

$$u = \frac{1+\mu}{E} \left[A_1(1-2\mu)r + \frac{A_2}{r} \right] \quad (14.38)$$

и

$$\sigma_r = A_1 - A_2/r^2, \quad \sigma_\theta = A_1 + A_2/r^2. \quad (14.39)$$

Здесь E и μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона твердого топлива; u — радиальное перемещение; σ_r и σ_θ — радиальные и окружные напряжения. Произвольные постоянные A_1 , A_2 определяются из граничных условий при значениях текущего радиуса $r = r_1$ и $r = r_2$.

Из закона Гука при $\epsilon_z = 0$ следует

$$\sigma_z = 2\mu A_1. \quad (14.40)$$

Приведенные зависимости положим в основу определения напряженно-деформированного состояния в заряде твердого топлива, вызванного давлением газов работающего двигателя и изменением его температуры.

Напряжения и деформации, вызванные в заряде давлением газов. На внутренней поверхности заряда при $r = r_1$ сжимающее радиальное напряжение σ_r равно давлению газов p_r , а на внешней поверхности заряда при $r = r_2$, равно нулю радиальное перемещение u , поскольку деформациями камеры мы пренебрегаем, т. е. граничные условия будут:

$$\sigma_r(r_1) = -p_r; \quad u(r_2) = 0. \quad (14.41)$$

Определив из этих граничных условий произвольные постоянные A_1 и A_2 из формул (14.39) и (14.40), находим:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -\frac{p_r m^2}{m^2+1-2\mu} \left[1 + \frac{r_2^2}{r^2} (1-2\mu) \right]; \\ \sigma_\theta &= -\frac{p_r m^2}{m^2+1-2\mu} \left[1 - \frac{r_2^2}{r^2} (1-2\mu) \right]; \\ \sigma_z &= -2\mu \frac{p_r m^2}{m^2+1-2\mu},\end{aligned}\quad (14.42)$$

где $m = r_1/r_2$. Отсюда, в частности, следует, что на внутренней поверхности заряда при $r = r_1$ окружные напряжения

$$\sigma_\theta = p_r (1 - m^2 - 2\mu)/(1 + m^2 - 2\mu). \quad (14.43)$$

В отношении полученного результата можно высказать два замечания. Во-первых, при малых значениях отношения m окружное напряжение σ_θ на внутренней поверхности заряда оказывается растягивающим, что может послужить причиной разрушения заряда; во-вторых, окончательные результаты чрезвычайно чувствительны к значению коэффициента Пуассона твердого топлива. Обычно заряд, прочно скрепленный с корпусом двигателя, выполняют из смесового эластичного топлива [22], значение коэффициента Пуассона которого $\mu \approx 0,5$. А как видно из формул (14.42), при $m^2 \ll 1$ и $\mu \approx 0,5$ напряжения в заряде могут резко изменяться при малых изменениях значений μ .

Температурные напряжения и деформации в двигателе со скрепленным зарядом. Будем считать, что при температуре t_0 напряжения в заряде равны нулю. Определим, какие напряжения и деформации возникнут в заряде, если температура заряда и корпуса двигателя изменится и станет равной t . Для этого опять воспользуемся решением упругой задачи для толстостенного цилиндра. Как и в предыдущем случае, корпус двигателя считаем абсолютно жестким (его размеры изменяются только за счет температурных удлинений). Но в отличие от предыдущего случая силовое удлинение заряда ε_z не равно нулю, а определяется разностью температурных удлинений топлива и материала корпуса двигателя:

$$\varepsilon_z = (\alpha_R - \alpha) (t - t_0), \quad (14.44)$$

где α и α_R — температурные коэффициенты линейного расширения соответственно топлива и материала корпуса двигателя.

Используя обобщенный закон Гука и зависимости (14.39), нетрудно найти радиальные и окружные удлинения в заряде:

$$\varepsilon_r = \frac{1+\mu}{E} \left[A_1 (1-2\mu) - \frac{A_2}{r^2} \right] - \mu \varepsilon_z; \quad (14.45)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1+\mu}{E} \left[A_1 (1-2\mu) + \frac{A_2}{r^2} \right] - \mu \varepsilon_z,$$

а также осевое напряжение:

$$\sigma_z = E \varepsilon_z + \mu (\sigma_r + \sigma_\theta) = E \varepsilon_z + 2\mu A_1. \quad (14.46)$$

Для определения констант A_1 и A_2 в данной задаче имеем два граничных условия: внутренняя поверхность заряда не нагружена и, следовательно, на ней $\sigma_r = 0$, а на наружной поверхности заряда полные окружные удлинения топлива равны температурным окружным удлинениям корпуса двигателя, т. е. граничные условия данной задачи:

$$\sigma_r(r_1) = 0; \quad \varepsilon_\theta(r_2) + \alpha(t - t_0) = \alpha_k(t - t_0), \quad (14.47)$$

откуда находим

$$A_1 = \frac{E(t-t_0)(\alpha_k - \alpha)}{m^2 + 1 - 2\mu}; \quad A_2 = -\frac{E(t-t_0)(\alpha_k - \alpha)}{m^2 + 1 - 2\mu} r_1^2 \quad (14.48)$$

и подсчитываем напряжения в заряде

$$\sigma_r = B(1 - r_1^2/r^2); \quad \sigma_\theta = B(1 + r_1^2/r^2); \quad \sigma_z = B(1 + m^2), \quad (14.49)$$

где

$$B = \frac{E(t-t_0)(\alpha_k - \alpha)}{m^2 + 1 - 2\mu}.$$

Приведенных зависимостей достаточно для определения напряжений и деформаций в заряде твердого топлива для тех случаев, когда коэффициент линейного расширения материала корпуса двигателя имеет одно и то же значение в осевом и окружном направлениях. Полученное решение легко скорректировать и для различных значений температурных коэффициентов в осевом и окружном направлениях.

Коэффициент линейного расширения топлива значительно превышает коэффициенты линейного расширения тех материалов, из которых изготавливают корпуса двигателей. Поэтому наиболее опасные растягивающие напряжения будут возникать в заряде при охлаждении двигателя, когда $t < t_0$. При этом наибольшими будут окружные напряжения у внутренней поверхности заряда (при $r = r_1$):

$$\sigma_\theta = 2 \frac{E(t-t_0)(\alpha_k - \alpha)}{m^2 + 1 - 2\mu}. \quad (14.50)$$

Представляют практический интерес и значения радиальных напряжений на наружной поверхности заряда (при $r = r_2$), которые могут привести к отслоению заряда от корпуса при охлаждении двигателя:

$$\sigma_r = \frac{E(t-t_0)(\alpha_k - \alpha)}{m^2 + 1 - 2\mu} (1 - m^2). \quad (14.51)$$

Оценка работоспособности заряда твердого топлива производится как по допускаемым перемещениям, так и по допускаемым напряжениям. Типичный пример расчета по допускаемым перемещениям — определение изменения геометрии заряда, вызванное ползучестью топлива под действием собственного веса во время хранения или перепадами давлений и инерционными нагрузками в момент старта ракеты [17]. При пониженных температурах топливо становится хрупким (пластические деформации отсутствуют); разрушение, растрескивание заряда может в результате резкого увеличения поверхности горения привести к взрыву всего двигателя. Поэтому при температуре ниже так называемой температуры стеклования расчет заряда твердого топлива следует производить по допускаемым напряжениям, учитывая концентрацию напряжений [17].

Основные понятия вариационного исчисления

Прежде чем излагать основы вариационного исчисления, приведем необходимые сведения из математического анализа и линейной алгебры. Приращение функции нескольких переменных $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ может быть подсчитано с помощью ряда Тейлора:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j + \dots, \quad (1)$$

где $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ — приращения независимых переменных x_1, x_2, \dots, x_n ; частные производные берутся в рассматриваемой точке.

Функция имеет минимум, если ее значение в рассматриваемой точке меньше значений во всех достаточно близких точках, т. е. если $\Delta f > 0$ при любых достаточно малых приращениях независимых переменных. Необходимым условием минимума функции является равенство нулю ее первого дифференциала, что эквивалентно равенству нулю всех ее первых частных производных в рассматриваемой точке

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0. \quad (2)$$

Это условие не является достаточным условием минимума. Для того чтобы функция имела минимум, кроме условия (2) в рассматриваемой точке должно еще выполняться условие

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j > 0 \quad (3)$$

при любых комбинациях приращений независимых переменных, т. е. условие положительной определенности второго дифференциала. Это условие выполняется тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} > 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} > 0; \dots; \quad (4)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix} > 0.$$

Если хотя бы одно из неравенств обращается в равенство, то для выяснения характера поведения функции в рассматриваемой точке в разложении (1) необходимо учесть и исследовать следующие слагаемые, содержащие производные более высокого порядка.

Аналогично формулируются условия максимума функции в точке.

Независимо от знаков второго и высших дифференциалов все точки, в которых выполняется условие (2), называются *стационарными точками*, а значения функции в них — *стационарными значениями*. В стационарной точке второй дифференциал может оказаться ни положительно, ни отрицательно определенным; в такой стационарной точке функция не имеет ни минимума, ни максимума. Это так называемая *точка минимакса*.

Обобщение задачи нахождения стационарных значений и экстремумов функции при нахождении стационарных значений и экстремумов определенных интегралов рассматривается в *вариационном исчислении*. Рассмотрим, например, определенный интеграл

$$\Phi = \int_a^b F(x, y, y', y'') dx, \quad (5)$$

где $y = y(x)$. При фиксированных пределах интегрирования и заданном подынтегральном выражении $F(x, y, y', y'')$ значение определенного интеграла зависит от конкретного выбора функции $y = y(x)$. Переменные величины такого типа, значения которых определяются выбором одной или нескольких функций, называются *функционалами*.

Понятие вариации имеет в вариационном исчислении такое же фундаментальное значение, как и понятие дифференциала в дифференциальном исчислении. В *вариации* функции $y = y(x)$ называют допустимое по условиям данной задачи малое изменение этой функции. Вариация функции y обозначается δy . Аналогично вводят понятия вариаций первой и высших производных функций; обозначают их соответственно $\delta y'$, $\delta y''$ и т. д. Заметим, что $(\delta y)' = \delta y'$, т. е. символ вариации δ можно выносить за знак дифференцирования.

При варьировании функции $y = y(x)$ и ее производных изменяется значение функционала Φ . Приращение функционала $\Delta\Phi$ можно представить в виде, аналогичном выражению (1):

$$\Delta\Phi = \delta\Phi + \frac{1}{2!} \delta^2\Phi + \dots, \quad (6)$$

где

$$\delta\Phi = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y'' \right) dx; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \delta^2\Phi = \int_a^b & \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} (\delta y)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} (\delta y')^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y''^2} (\delta y'')^2 + \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \delta y \delta y' + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y''} \delta y \delta y'' + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y''} \delta y' \delta y'' \right] dx. \end{aligned} \quad (8)$$

Величина $\delta\Phi$, аналогичная первому дифференциалу функции нескольких переменных, является главной линейной относительно вариаций функции и ее производных составляющей приращения $\Delta\Phi$ и называется *первой вариацией* функционала Φ . Величина $\delta^2\Phi$ аналогична второму дифференциалу функции нескольких переменных; эта величина носит название *второй вариации* функционала Φ .

Основная задача вариационного исчисления формулируется так: *среди всех допустимых по условиям данной задачи функций найти такую функцию $y = y(x)$, которая доставляет заданному функционалу экстремальное значение.*

Необходимым условием экстремума функционала является равенство нулю его первой вариации:

$$\delta\Phi = 0. \quad (9)$$

Условие $\delta\Phi = 0$ называют условием стационарности функционала. Это условие, как и равенство (2) для функции нескольких переменных, является необходимым условием максимума или минимума функционала. Как видно из выражения (6), стационарное значение функционала будет минимумом, если вторая вариация функционала является положительно определенной, т. е. если при любых допустимых по условиям задачи вариациях выполняется условие

$$\delta^2\Phi > 0. \quad (10)$$

Аналогично формулируется условие максимума функционала. Из условия стационарности (9) может быть получено дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять искомая функция, доставляющая стационарное значение функционалу, а также те граничные условия, которым она может быть подчинена. Для этого, последовательно интегрируя выражение для первой вариации функционала (7) по частям, избавимся от вариаций производных искомой функции под знаком интеграла:

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' + \frac{dF}{dy''} \delta y'' \right) dx = \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_a^b + \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y' \Big|_a^b + \\ &+ \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y' \right) dx = \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y \Big|_a^b + \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y' \Big|_a^b + \\ &+ \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} \right) \delta y dx. \end{aligned}$$

Откуда следует, что условие стационарности $\delta\Phi = 0$ выполняется при всех допустимых вариациях искомой функции, если, во-первых,

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} = 0, \quad (11)$$

во-вторых, при $x = a$ и $x = b$ должны выполняться условия:

$$\delta y = 0, \quad \text{т. е. } y \text{ задано, либо } \left(\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y''} \right) = 0;$$

$$\delta y' = 0, \quad \text{т. е. } y' \text{ задано, либо } \frac{\partial F}{\partial y''} = 0. \quad (12)$$

Уравнение (11) называется *уравнением Эйлера*. В данном примере, когда функционал зависит от второй производной искомой функции, это уравнение имеет четвертый порядок и выражения (12) дают те четыре граничных условия, какие могут быть заданы при $x = a$ и $x = b$. В общем случае, когда функционал зависит от производных искомой функции до m -го порядка включительно, уравнение Эйлера имеет порядок $2m$ и соответствующее число граничных условий.

Все сказанное может быть обобщено на функционалы, зависящие от нескольких функций одной или нескольких независимых переменных. Так, например, если задан функционал

$$\Phi = \int_a^b F(x, u, v, u', v', u'', v'') dx, \quad (13)$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$, то его первая вариация определяется выражением, аналогичным выражению (7):

$$\delta\Phi = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial v} \delta v + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' + \frac{\partial F}{\partial v'} \delta v' + \frac{\partial F}{\partial u''} \delta u'' + \frac{\partial F}{\partial v''} \delta v'' \right) dx. \quad (14)$$

Действуя так же, как и в предыдущем примере, можно показать, что функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$, доставляющие стационарное значение функционалу, т. е. обеспечивающие выполнение условия $\delta\Phi = 0$, должны удовлетворять *системе уравнений Эйлера*

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial u''} = 0; \quad (15)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial v'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial v''} = 0$$

и соответствующим граничным условиям.

Если функционал зависит от функции нескольких независимых переменных, условие стационарности приводит к уравнениям в частных производных. Так, если задан функционал

$$\Phi = \iint F \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) dx dy, \quad (16)$$

то уравнение Эйлера имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)} + \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Если на функции, от которых зависят исследуемые функционалы, наложены некоторые дополнительные условия, то задача поиска экстремума называется задачей на условный экстремум. Например, можно сформулировать задачу так: найти функцию $y = y(x)$, доставляющую стационарное значение функционалу (5) и удовлетворяющую дополнительным интегральным условиям.

$$\int_a^b G_i(x, y, y', y'') dx = g_i, \quad (18)$$

где g_i — заданные константы; $i = 1, 2, \dots, k$. Решение этой задачи можно получить с помощью *метода множителей Лагранжа*, отыскивая условия стационарности вспомогательного функционала

$$\Phi^* = \int_a^b F^*(x, y, y', y'') dx. \quad (19)$$

Здесь

$$F^* = F(x, y, y', y'') + \sum_{i=1}^k \lambda_i G_i(x, y, y', y''), \quad (20)$$

где λ_i — неизвестные постоянные (множители Лагранжа).

При заданных граничных условиях для определения k множителей Лагранжа λ_i и искомой функции $y = y(x)$ используют k условий связи (18) и уравнение Эйлера вспомогательного функционала

$$\frac{\partial F^*}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F^*}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F^*}{\partial y''} = 0. \quad (21)$$

Для функционалов, зависящих от нескольких функций, возможны задачи на условный экстремум при дополнительных конечных или дифференциальных связях, накладываемых на искомые функции. Пусть, например, задача сформулирована так: найти условие стационарности функционала

$$\Phi = \int_a^b F(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'', \dots) dx, \quad (22)$$

если n искомым функций подчинены дополнительным уравнениям

$$G_j(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'', \dots) = 0, \quad (23)$$

где $j = 1, 2, \dots, k$. Число этих дополнительных уравнений, конечно, должно быть меньше числа искомым функций, т. е. $k < n$. Такую задачу тоже можно решить с помощью метода множителей Лагранжа, отыскивая условия стационарности вспомогательного функционала (19), где теперь

$$F^* = F(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'', \dots) + \sum_{j=1}^k \lambda_j(x) G_j. \quad (24)$$

При заданных граничных условиях n искомым функций $y_i = y_i(x)$ и k функций $\lambda_j = \lambda_j(x)$ определяются из системы уравнений Эйлера и k дополнительных уравнений связи (23).

Аналогично выглядит метод множителей Лагранжа и в тех задачах на условный экстремум, когда искомые функции зависят от нескольких переменных.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Основные определения матричной алгебры

Матрицей называется прямоугольный массив чисел или алгебраических символов, расположенных по строкам и столбцам.

Система линейных уравнений

$$a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z = b_1,$$

$$a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z = b_2,$$

$$a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z = b_3$$

может быть записана в компактном виде

$$[A] \{X\} = \{b\},$$

где $[A]$ — квадратная матрица, имеющая три строки и три столбца:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix};$$

$\{X\}$ и $\{b\}$ — матрицы-столбцы или векторы:

$$\{X\} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \quad \{b\} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Правило перемножения матрицы на вектор следует из вышеприведенных соотношений. Отсюда же можно получить произведение вектора-строки на вектор-столбец и вектора-столбца на вектор-строку:

$$\{a_1 \ a_2 \ a_3\} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = a_1 X + a_2 Y + a_3 Z,$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \{XYZ\} = \begin{bmatrix} a_1 X & a_1 Y & a_1 Z \\ a_2 X & a_2 Y & a_2 Z \\ a_3 X & a_3 Y & a_3 Z \end{bmatrix}.$$

Приведенные зависимости показывают, что матричное произведение не коммутативно:

$$\{a\} \{X\} \neq \{X\} \{a\}.$$

Матрицы одинаковой размерности, у которых число строк и столбцов то же самое, можно складывать. При этом суммируются соответствующие члены матриц.

Транспонированной называется матрица, у которой столбцы заменены строками и наоборот. Например,

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \quad [A]^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Транспонированными могут быть также вектор-столбец и вектор-строка:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}^T = \{XYZ\}, \quad \{XYZ\}^T = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Транспонированное произведение матриц

$$([A] [B])^T = [B]^T [A]^T.$$

Записанную выше систему уравнений при известных коэффициентах матрицы $[A]$ можно решить относительно X, Y, Z или вектора $\{X\}$. Это решение может быть представлено в виде

$$\{X\} = [A]^{-1} \{b\},$$

где $[A]^{-1}$ — обратная матрице $[A]$. Она также квадратная и той же размерности, что и матрица $[A]$. Произведение матрицы $[A]$ и обратной матрицы $[A]^{-1}$ равно единичной матрице $[1]$, все члены которой нулевые, кроме главной диагонали, где они равны единице, т. е.

$$[A]^{-1} [A] = [1].$$

Составляющие матрицы $[A]^{-1}$ равны

$$[A]^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} (a_{23} a_{32} - a_{22} a_{33}) & (a_{33} a_{12} - a_{13} a_{32}) & (a_{13} a_{22} - a_{23} a_{12}) \\ (a_{33} a_{21} - a_{23} a_{31}) & (a_{13} a_{31} - a_{11} a_{33}) & (a_{23} a_{11} - a_{13} a_{21}) \\ (a_{22} a_{31} - a_{21} a_{32}) & (a_{11} a_{32} - a_{31} a_{12}) & (a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22}) \end{bmatrix},$$

где $\Delta = a_{11} a_{23} a_{32} + a_{22} a_{13} a_{31} + a_{33} a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22} a_{33} - a_{13} a_{21} a_{32} - a_{23} a_{31} a_{12}$.

Приведенным выше правилам матричной алгебры подчиняются и блоки матриц. Если матрицу

$$[A] = \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right]$$

разделить на четыре составляющие

$$[A_{11}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \quad [A_{12}] = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}; \quad [A_{21}] = [a_{31} \ a_{32}]; \quad [A_{22}] = [a_{33}],$$

представив также векторы

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \{X_1\}; \quad \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \{B_1\}; \quad \{Z\} = \{X_3\}; \quad \{b_3\} = \{B_3\},$$

и записать вышеприведенную систему трех уравнений в виде

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_3 \end{Bmatrix},$$

то уравнения, связывающие блоки матриц с составляющими векторов, будут следующими:

$$[A_{11}] \{X_1\} + [A_{12}] \{X_3\} = \{B_1\};$$

$$[A_{21}] \{X_1\} + [A_{22}] \{X_3\} = \{B_3\}.$$

Отсюда можно получить зависимости, определяющие векторы $\{X_1\}$ и $\{X_3\}$:

$$([A_{11}]^{-1} [A_{12}] - [A_{21}]^{-1} [A_{22}]) \{X_3\} = [A_{11}]^{-1} \{B_1\} - [A_{21}]^{-1} \{B_3\};$$

$$([A_{22}]^{-1} [A_{21}] - [A_{12}]^{-1} [A_{11}]) \{X_1\} = [A_{21}]^{-1} \{B_3\} - [A_{12}]^{-1} \{B_1\}.$$

Если составляющие матрицы $[A]$ не числовые величины, а функции, то матрицу можно дифференцировать:

$$\frac{d}{dx} [A] = \begin{bmatrix} \frac{da_{11}(x)}{dx} & \frac{da_{12}(x)}{dx} & \frac{da_{13}(x)}{dx} \\ \frac{da_{21}(x)}{dx} & \frac{da_{22}(x)}{dx} & \frac{da_{23}(x)}{dx} \\ \frac{da_{31}(x)}{dx} & \frac{da_{32}(x)}{dx} & \frac{da_{33}(x)}{dx} \end{bmatrix}.$$

Интеграл от матрицы определяется аналогично:

$$\int [A] dx = \begin{bmatrix} \int a_{11}(x) dx & \int a_{12}(x) dx & \int a_{13}(x) dx \\ \int a_{21}(x) dx & \int a_{22}(x) dx & \int a_{23}(x) dx \\ \int a_{31}(x) dx & \int a_{32}(x) dx & \int a_{33}(x) dx \end{bmatrix}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Алфутов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М., 1978.
2. Андреева Л. Е. Упругие элементы приборов. М., 1962.
3. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М., 1974.
4. Бидерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций. М., 1977.
5. Биргер И. А., Шор Б. Ф., Иосилевич Г. Б. Расчет на прочность деталей машин. М., 1979.
6. Болотин В. В., Новицков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. М., 1980.
7. Бояршинов С. В. Основы строительной механики машин. М., 1973.
8. Валишвили Н. В. Расчет оболочек вращения на ЭЦВМ. М., 1976.
9. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М., 1967.
10. Григолюк Э. И., Чулков П. П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М., 1973.
11. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике/ Пер. с англ. М., 1975.
12. Кармишин А. В., Мяченков В. И., Фролов А. Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. М., 1975.
13. Лизин В. Т., Пяткин В. А. Проектирование тонкостенных конструкций. М., 1976.
14. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М., 1975.
15. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л., 1962.
16. Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков В. А. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. М., 1977.
17. Основы строительной механики ракет/ Балабух Л. И., Колесников К. С., Зарубин В. С., Алфутов Н. А., Усюкин В. И., Чижов В. Ф. М., 1969.
18. Папкович П. Ф. Труды по строительной механике корабля. Л., 1962—1963, т. 1—4.
19. Постнов В. А. Численные методы расчета судовых конструкций. Л., 1977.
20. Прочность, устойчивость, колебания/ Под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. М., 1968, т. 1—3.
21. Работнов Ю. Н. Сопротивление материалов. М., 1962.
22. Разумеев В. Ф., Ковалев Б. К. Основы проектирования баллистических ракет на твердом топливе. М., 1976.
23. Розин Л. А. Вариационные постановки задачи для упругих систем. Л., 1978.
24. Тимошенко С., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки/ Пер. с англ. М., 1963.
25. Тимошенко С., Гудбер Дж. Теория упругости/ Пер. с англ. М., 1965.
26. Феодосьев В. И. Прочность теплонапряженных узлов ЖРД. М., 1963.
27. Феодосьев В. И. Основы техники ракетного полета. М., 1979, 494 с.
28. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкции/ Пер. с нем. М., 1971.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От издательства	3
Предисловие	4

ЧАСТЬ I

ОСНОВЫ МЕХАНИКИ ТВЕРДОГО ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА. ЭЛЕМЕНТЫ ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

<i>Глава 1.</i> Основные понятия и уравнения механики твердого деформируемого тела	6
§ 1.1. Внешние силы и напряжения	7
§ 1.2. Перемещения и деформации	10
§ 1.3. Начало возможных перемещений и уравнения равновесия. . .	13
§ 1.4. Упругое поведение деформируемых тел	17
§ 1.5. Принцип минимума полной потенциальной энергии	22
§ 1.6. Устойчивое и неустойчивое равновесие деформированного тела	28
<i>Глава 2.</i> Элементы прикладной теории упругости	34
§ 2.1. Плоское напряженное и плоское деформированное состояния	34
§ 2.2. Обратная задача теории упругости. Принцип Сен-Венана	40
§ 2.3. Плоская задача теории упругости в полярных координатах	46
§ 2.4. Осесимметричный изгиб круглых пластин	53
§ 2.5. Дифференциальное уравнение изгиба пластин в прямоугольной системе координат	60
<i>Глава 3.</i> Методы решения задач строительной механики	64
§ 3.1. Вариационные методы	65
§ 3.2. Матричный метод начальных параметров	70
§ 3.3. Метод конечных разностей	76
§ 3.4. Применение метода конечных разностей для решения двумерных задач	81
§ 3.5. Метод конечных элементов	87
§ 3.6. Решение двумерных задач методом конечных элементов . . .	96
<i>Глава 4.</i> Расчет круговых колец	104
§ 4.1. Уравнения изгиба кольца в своей плоскости	104
§ 4.2. Определение внутренних сил и моментов в замкнутом кольце	109
§ 4.3. Определение перемещений	116
§ 4.4. Расчет замкнутых колец с помощью тригонометрических рядов	121

ЧАСТЬ II

ОСНОВЫ ТЕОРИИ И РАСЧЕТА ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

<i>Глава 5.</i> Основы теории оболочек вращения	127
§ 5.1. Геометрия оболочек	127
§ 5.2. Уравнения безмоментной теории	133
§ 5.3. Осесимметричная задача для безмоментной оболочки	136
§ 5.4. Уравнения моментной теории оболочек	140
§ 5.5. Классификация напряженных состояний	143
<i>Глава 6.</i> Прикладные теории оболочек	146
§ 6.1. Краевой эффект	146
§ 6.2. Расчет пологой сферической оболочки	150
§ 6.3. Деформация цилиндрических оболочек	154
§ 6.4. Полубезмоментная теория цилиндрических оболочек	161

§ 6.5. Основы теории мягких оболочек	166
§ 6.6. Расчеты оболочек по предельным нагрузкам	174
<i>Глава 7. Устойчивость стержней и пластин</i>	<i>183</i>
§ 7.1. Критические нагрузки прямых упругих стержней	184
§ 7.2. Устойчивость прямоугольных пластин	189
§ 7.3. Энергетический метод исследования устойчивости пластин. Комбинированное нагружение пластин	199
§ 7.4. Поведение стержней и пластин после потери устойчивости. Влияние начальных неправильностей	207
<i>Глава 8. Устойчивость цилиндрических оболочек</i>	<i>216</i>
§ 8.1. Устойчивость круговых колец	217
§ 8.2. Основные уравнения устойчивости цилиндрической оболочки	221
§ 8.3. Устойчивость цилиндрической оболочки при осевом сжатии	226
§ 8.4. Устойчивость цилиндрической оболочки при внешнем давлении	231
§ 8.5. Устойчивость цилиндрической оболочки при кручении и поперечном изгибе	237
§ 8.6. Особенности расчета реальных оболочек на устойчивость	241
<i>Глава 9. Основы расчета оболочек численными методами</i>	<i>248</i>
§ 9.1. Расчет оболочек матричным методом начальных параметров	248
§ 9.2. Расчет методом конечных разностей	255
§ 9.3. Расчет методом конечных элементов	262
§ 9.4. Численное решение задач устойчивости оболочек	267

ЧАСТЬ III

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

<i>Глава 10. Особенности расчета конструкций ракет на прочность</i>	<i>271</i>
§ 10.1. Основные принципы расчета	271
§ 10.2. Внешние нагрузки	276
§ 10.3. Внутренние силы в корпусе ракеты	284
§ 10.4. Испытания конструкций	288
<i>Глава 11. Расчет баков</i>	<i>291</i>
§ 11.1. Конструктивные схемы и нагрузки	291
§ 11.2. Гладкие баки	294
§ 11.3. Баки вафельной конструкции	300
§ 11.4. Расчет днищ баков	305
§ 11.5. Сфероидальные и торообразные баки	311
<i>Глава 12. Расчет сухих отсеков</i>	<i>314</i>
§ 12.1. Конструктивные схемы и нагрузки	314
§ 12.2. Стрингерные, панельные и лонжеронные отсеки	319
§ 12.3. Ферменные переходные отсеки и узлы крепления двигателей	329
§ 12.4. Отсеки, нагруженные внешним давлением	333
<i>Глава 13. Расчет отдельных элементов конструкции</i>	<i>341</i>
§ 13.1. Устойчивость головного стабилизатора	342
§ 13.2. Температурные напряжения в подкрепленных отсеках	346
§ 13.3. Баллоны высокого давления, трубопроводы, сильфоны	350
<i>Глава 14. Расчет конструкций ЖРД и РДТТ</i>	<i>356</i>
§ 14.1. Особенности расчета на прочность конструкции ЖРД	356
§ 14.2. Общая несущая способность оболочки камеры ЖРД	359
§ 14.3. Расчет некоторых элементов конструкции камеры ЖРД	366
§ 14.4. Особенности расчета конструкции РДТТ	370
§ 14.5. Расчет корпуса РДТТ	372
§ 14.6. Напряжения и деформации в заряде твердого топлива	377
Приложения	381
Литература	389

Лев Иванович Балабух
Николай Анатольевич Алфутов
Валерий Иванович Усюкин

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА РАКЕТ

Заведующая редакцией К. И. Аношина. Редактор А. В. Дубровский. Младший редактор И. В. Александрова. Художественный редактор Т. А. Дурасова. Технический редактор З. В. Нуждина. Корректор В. В. Кожуткина

ИБ 3960

Изд. № ОТ—390. Сдано в набор 14.12.83. Подп. в печать 25.07.84. Т-05472. Формат 60×90¹/₁₆. Бум. тип. № 3. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 24,5 усл. печ. л. Усл. кр.-отг. 24,5. Уч. изд. л. 24,72. Тираж 4000 экз. Зак. 1948 Цена 1 р. 10 к.

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
129041, Москва, Б. Переяславская ул., 46