



А.Г. Дибир, О.В. Макаров,
Н.И. Пекельный

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОДОЛЬНО СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ



2008

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского
«Харьковский авиационный институт»

А.Г. Дибир, О.В. Макаров, Н.И. Пекельный

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОДОЛЬНО СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Учебное пособие

Харьков «ХАИ» 2008

УДК 539.318

Устойчивость продольно сжатых стержней / А.Г. Дибир, О.В. Макаров, Н.И. Пекельный. – Учеб. пособие. – Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2008. – 43 с.

Представлен расчет на устойчивость продольно сжатых стержней с учетом условий закрепления концов стержня. Даны пределы применимости формулы Эйлера и формулы Ясинского. Рассмотрена несущая способность элементов конструкции крыла самолета. Выведены уравнения приближенных расчетов на прочность и жесткость при продольно-поперечном изгибе стержня. Для сравнения уравнение Эйлера и перемещения сечений выведены с использованием энергетического метода и приведена оценка точности формул.

Кроме теоретических сведений по расчету на устойчивость стержней приведены примеры их практических расчетов.

Для студентов машиностроительных и приборостроительных специальностей, изучающих сопротивление материалов, механику материалов и конструкций, техническую и прикладную механику. Может быть использовано при самостоятельной работе.

Ил. 24. Табл. 13. Библиогр.: 5 назв.

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. С.А. Бычков,
канд. техн. наук, доц. Е.Т. Василевский

© Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского
«Харьковский авиационный институт», 2008 г.

Введение

В реальных условиях нагружения самолета многие элементы конструкции планера – стойки, подкосы шасси, полки лонжеронов, стрингеры, обшивка и т. д. работают на сжатие. При сжатии элемент конструкции может потерять устойчивость, причем при напряжениях значительно меньших, чем разрушающие. Устойчивость – способность конструктивного элемента сохранять исходную форму упругого равновесия при действии внешних нагрузок. При потере устойчивости элемент перестает работать как силовой элемент конструкции. Поэтому при прочностном расчете обязательно проверяют сжатые элементы на местную и общую потери устойчивости.

Проводя расчеты на прочность и жесткость при различных деформациях, предполагалось, что во время деформации любой системы имеет место единственная форма упругого равновесия. В действительности же в деформированном состоянии равновесие между внешними и вызываемыми ими внутренними силами упругости может быть не только устойчивым, но и неустойчивым.

1. Понятие о продольном изгибе

Упругое равновесие будет устойчивым, если деформированное тело при любом малом отклонении от состояния равновесия стремится возвратиться к первоначальному состоянию и возвращается к нему после устранения внешнего воздействия, нарушившего первоначальное равновесное состояние.

Упругое равновесие неустойчиво, если деформированное тело, будучи выведено из него каким-либо воздействием, приобретает стремление продолжать деформироваться в направлении данного ему отклонения и после удаления воздействия в исходное состояние не возвращается.

Между этими двумя состояниями равновесия существует переходное состояние, называемое критическим, при котором деформированное тело находится в безразличном равновесии: оно может сохранить первоначально приданную форму, но может и потерять ее от самого незначительного воздействия.

Устойчивость формы равновесия деформированного тела зависит от величины приложенных к нему нагрузок.

Нагрузка, превышение которой вызывает потерю устойчивости первоначальной формы тела, называется критической и обозначается $P_{кр}$.

При $P = P_{кр}$ наступает разрушение конструкции (максимальные деформации и напряжения), причем $\sigma_{кр} \ll [\sigma]_с$.

Условие устойчивости

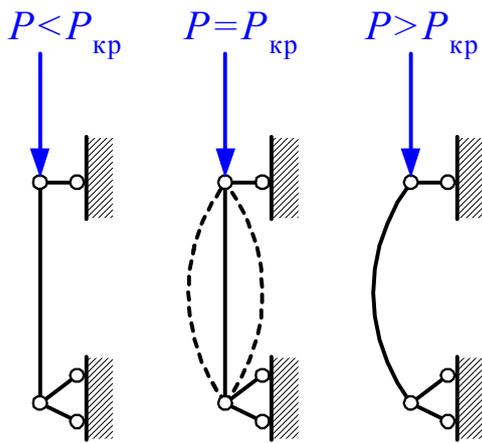


Рис. 1

$$P \leq [P] \text{ или } n_y \geq [n]_y, \quad (1)$$

где $[P] = \frac{P_{кр}}{n_y}$ - допускаемая нагрузка;

$P_{кр}$ - критическая нагрузка; P - действующая нагрузка;

$n_y = \frac{P_{кр}}{P}$ (n_y - коэффициент запаса устойчивости),

$[n]_y$ - требуемый коэффициент запаса устойчивости:

для дерева $[n]_y = 2,8 \div 3,2$;

для стали $[n]_y = 1,8 \div 3,0$;

для чугуна $[n]_y = 5,0 \div 5,5$.

Случай потери устойчивости при сжатии длинного тонкого стержня – продольный изгиб.

2. Формула Эйлера*

Предположим, что $P > P_{кр}$, а $\sigma < \sigma_{пл}$.

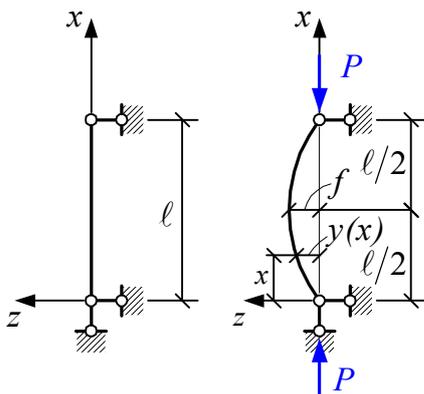


Рис. 2

Приближенное дифференциальное уравнение упругой линии запишем в виде

$$EJ_{\min} \frac{d^2 z(x)}{dx^2} = \pm M(x), \quad (2)$$

где J_{\min} - минимальный момент инерции.

Так как знак прогиба всегда противоположен знаку

$\frac{d^2 z(x)}{dx^2}$, а $M(x) = -Pz$, то

$$EJ_{\min} \frac{d^2 z(x)}{dx^2} = -Pz \quad (3)$$

* ЭЙЛЕР (Euler), Леонард (04.04.1707 – 07.09.1783), математик, физик и астроном, член Петербургской и Берлинской АН. Родился в Швейцарии, с 1727 по 1741 и с 1766 по 1783 работал в России.

или

$$\frac{d^2 z(x)}{dx^2} + \frac{Pz}{EJ_{\min}} = 0.$$

Принимая

$$\frac{P}{EJ_{\min}} = k^2, \quad (4)$$

получим

$$\frac{d^2 z(x)}{dx^2} + k^2 z = 0 \quad (5)$$

– однородное линейное дифференциальное уравнение.

Решение уравнения:

$$z = A \sin kx + B \cos kx.$$

Постоянные A и B определим из граничных условий

$$z(0) = 0; \quad z(\ell) = 0.$$

При $z(0) = 0 \Rightarrow B = 0$

$$z(x) = A \sin kx. \quad (6)$$

При $z(\ell) = 0 \Rightarrow A \sin k\ell = 0$.

Если $A = 0$, то $z(x) \equiv 0$. Это соответствует прямолинейной форме упругой оси.

Если $A \neq 0$, то $\sin k\ell = 0$, где $k\ell = 0, \pi, \dots, n\pi$ –

$$k\ell = n\pi \quad (n \text{ – произвольное число}). \quad (7)$$

$$k^2 \ell^2 = n^2 \pi^2. \quad (8)$$

Таким образом, получим из уравнения (4) выражение для сжимающей силы:

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EJ_{\min}}{\ell^2} \quad (9)$$

– формула Эйлера.

При $n = 1$ $k\ell = \pi$

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{\ell^2}. \quad (10)$$

3. Уравнение изогнутой оси стержня

Из формул (6) и (7) получим уравнение изогнутой оси стержня при малых деформациях

$$z(x) = A \sin \frac{n\pi}{\ell} x. \quad (11)$$

$z_{\max} = f$ – наибольший прогиб при $\sin \frac{n\pi x}{\ell} = 1$, тогда

$$z(x) = z_{\max} = f = A.$$

Следовательно, уравнение упругой линии сжатого стержня имеет вид

$$z = f \sin \frac{n\pi x}{\ell}. \quad (12)$$

График этой зависимости представлен на рис. 3.

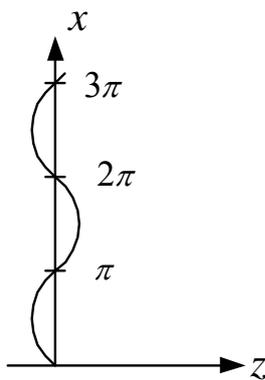


Рис. 3

Максимум $z(x)$ имеет место, если

$$\frac{dz}{dx} = f \frac{n\pi}{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell} = 0,$$

т. е. $\cos \frac{n\pi x}{\ell} = 0$.

Наименьшее значение аргумента будет в случае, когда

$$\frac{n\pi x}{\ell} = \frac{\pi}{2}$$

или

$$x = \frac{\ell}{2n}. \quad (13)$$

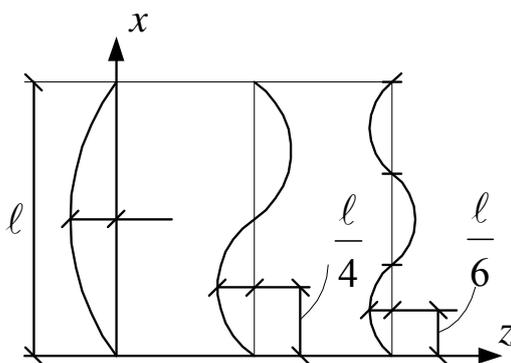


Рис. 4

Если $n = 1 \Rightarrow x = \frac{\ell}{2}$, то имеем основной случай. n – число полуволн синусоиды, располагающихся на длине изогнутого стержня.

4. Влияние условий закрепления концов стержня на величину критической силы

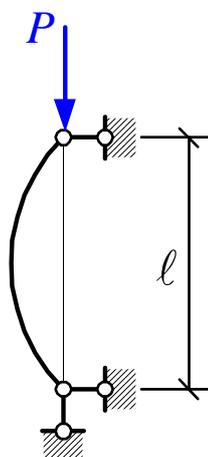


Рис. 5

$n = 1$ – основной случай (см. формулу (10))

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{\ell^2},$$

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\text{min}}}{(2\ell)^2} = \frac{\pi^2 EJ_{\text{min}}}{4\ell^2}, \quad (14)$$

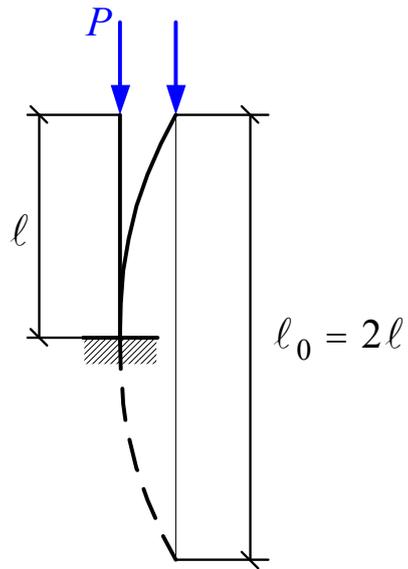


Рис. 6

$$P_{\text{кр}} = \frac{4\pi^2 EJ_{\text{min}}}{\ell^2}, \quad (15)$$

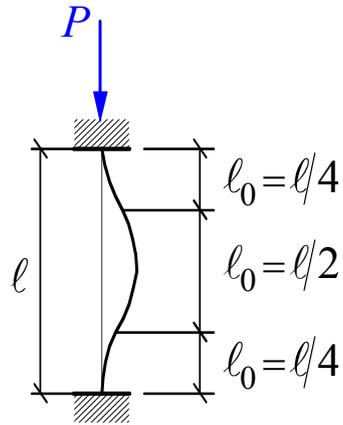


Рис. 7

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\text{min}}}{(0,7\ell)^2}, \quad (16)$$

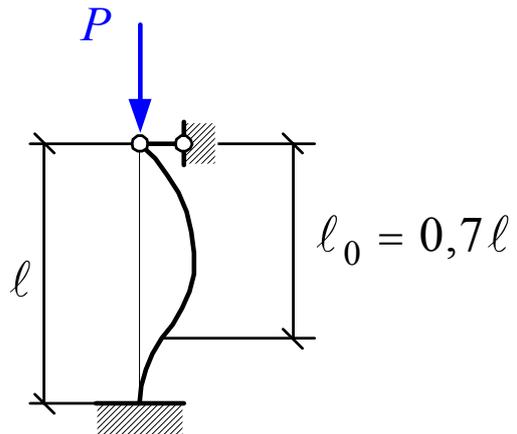


Рис. 8

Соотношения (10), (14) – (16) можно объединить в одну формулу

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\text{min}}}{(\nu\ell)^2}, \quad (17)$$

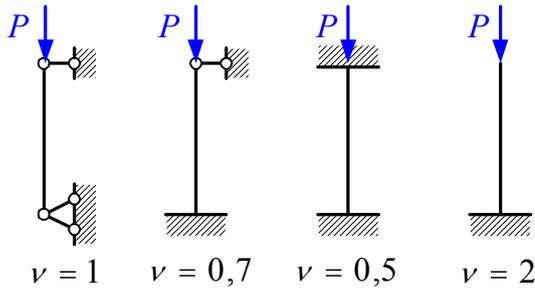


Рис. 9

где $\nu \ell = \ell_0$ – приведенная длина стержня; ν – коэффициент приведения длины.

Таким образом, различные случаи опирания и нагружения стержня приводятся к основному случаю введением в формулу для $P_{кр}$ так называемой приведенной длины $\ell_{пр} = \nu \ell$. Это понятие впервые было введено Ф. С. Ясинским*.

5. Критическое напряжение. Гибкость

Вывод формулы Эйлера основан на применении дифференциального уравнения упругой линии, если справедлив закон Гука, т. е.

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} \leq \sigma_{пц}. \quad (18)$$

Действительно, если прямолинейная форма стержня остается устойчивой и при напряжениях, превышающих предел пропорциональности, то дифференциальное уравнение (1), предполагающее справедливость закона Гука, уже непригодно.

Выведем формулу для критического напряжения $\sigma_{кр}$. В соответствии с выражениями (18) и (17)

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{F(\nu \ell)^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\nu \ell}{i}\right)^2}. \quad (19)$$

Здесь $i^2 = i_{\min}^2 = \frac{J_{\min}}{F}$.

Введя безразмерную величину

$$\lambda = \frac{\nu \ell}{i}, \quad (20)$$

называемую гибкостью стержня, окончательно получим

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (21)$$

т. е. критическое напряжение стержня зависит только от упругих свойств материала (E) и гибкости стержня (λ).

* Ясинский Феликс Станиславович (1856 – 1899), профессор, известный русский ученый в области устойчивости стержней и стержневых систем.

6. Пределы применимости формулы Эйлера

Функциональная зависимость (21) представляет собой видоизмененную формулу Эйлера. В системе координат $\sigma_{кр} - \lambda$ эта зависимость может быть представлена гиперболической кривой, называемой гиперболой Эйлера.

График показывает, что по мере возрастания гибкости стержня критическое напряжение стремится к нулю, и, наоборот, по мере приближения гибкости стержня к нулю критическое напряжение стремится к бесконечности.

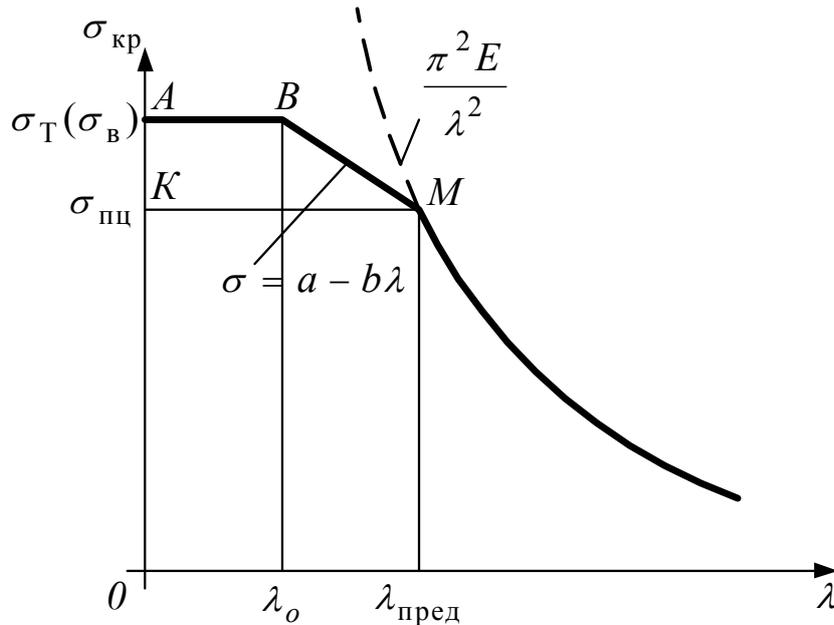


Рис. 10

Однако из условия (18) применимости формулы Эйлера в соответствии с зависимостью (21) имеем

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пц}$$

и, следовательно,

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}} = \lambda_{пред},$$

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}. \quad (22)$$

Значит, формула Эйлера становится непригодной для гибкости стержня, меньшей предельного значения $\lambda_{пред}$, зависящего только от свойств материала.

Если известны параметры материала, из которого изготовлен стержень, то величину $\lambda_{пред}$ можно вычислить по зависимости (22). То же можно получить и графически. Если на оси ординат ($\sigma_{кр}$) отложить величину предела пропорциональности ($\sigma_{пц}$) и провести из полученной точки K прямую, параллельную оси абсцисс, то она в пересечении с гиперболой Эйлера даст

точку M , абсцисса которой и есть $\lambda_{\text{пред}}$. Слева от точки M гипербола показана штриховой линией, так как здесь она дает значения напряжений, большие предела пропорциональности, т. е. не соответствующие условиям ее применимости.

7. Формула Ясинского

Формула Эйлера неприменима при $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$.

Однако явление продольного изгиба продолжает существовать и за пределом пропорциональности. Опытным путем установлено, что действительные критические напряжения для стержней средней и малой гибкости ($\lambda < \lambda_{\text{пред}}$) ниже определенных по формуле Эйлера. Таким образом, в этом случае формула Эйлера дает завышенные значения критической силы, т. е. всегда переоценивает действительную устойчивость стержня. Поэтому использовать формулы Эйлера для стержней, теряющих устойчивость за пределом пропорциональности, не только принципиально неправильно, но и крайне опасно по своим последствиям.

Теоретическое решение задачи об устойчивости за пределом пропорциональности очень сложное, поэтому обычно пользуются эмпирическими формулами, полученными в результате обработки большого количества опытных данных.

Ф. С. Ясинский собрал и обработал обширный опытный материал по продольному изгибу стержней, в результате чего составил таблицу критических напряжений в зависимости от гибкости для ряда материалов и предложил простую эмпирическую формулу для вычисления критических напряжений за пределом пропорциональности

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda. \quad (23)$$

Значения коэффициентов a и b приводятся в виде таблиц. По этим данным для каждого материала можно построить зависимости критических напряжений от гибкости стержня при $0 < \lambda < \lambda_{\text{пред}}$, точнее $\lambda_0 < \lambda < \lambda_{\text{пред}}$.

Поскольку при некотором значении гибкости (λ_0) величина $\sigma_{\text{кр}}$, вычисленная по формуле (23), становится равной предельному напряжению при сжатии (для пластичных материалов), то

$$\sigma_{\text{кр}} = \sigma_{\text{T}},$$

а для хрупких материалов

$$\sigma_{\text{кр}} = \sigma_{\text{в}}.$$

Стержни, у которых $\lambda < \lambda_0$, называют стержнями малой гибкости. Их рассчитывают только на прочность.

Что касается стержней средней гибкости $\lambda_o < \lambda < \lambda_{\text{пред}}$, наиболее широко применимых в конструкциях, то опытами было установлено, что потеря их несущей способности определяется нарушением устойчивости прямолинейной формы при напряжениях $\sigma_{\text{кр}}$, превышающих $\sigma_{\text{пл}}$, но меньших, чем σ^o (σ_{T} и $\sigma_{\text{в}}$) – опасное напряжение.

Таким образом, комбинируя формулу Эйлера с результатами опытов, можно построить полный график критических напряжений для стержней из разных материалов и найти значения $\sigma_{\text{кр}}$ при любой их гибкости.

8. Условие устойчивости сжатых стержней

Можно считать, что центрально сжатые стержни теряют свою несущую способность от потери устойчивости раньше, чем от потери прочности, так как критическое напряжение всегда меньше предела текучести или предела прочности:

$$\sigma_{\text{кр}} < \sigma^o,$$

где $\sigma^o = \sigma_{\text{T}}$ – для пластичных материалов; $\sigma^o = \sigma_{\text{в}}$ – для хрупких материалов.

Необходимо напомнить, что для стержней малой гибкости ($\lambda < \lambda_o$) не характерно явление потери устойчивости прямолинейной формы стержня, как это имеет место для стержней средней и большой гибкости. Несущая способность стержней малой гибкости определяется прочностью материала.

Критическое напряжение для центрально сжатых стержней средней и большой гибкости представляет, пожалуй, большую опасность, чем предел текучести для пластичных материалов или предел прочности для хрупких материалов при простом растяжении. Очевидно, что при практическом решении вопроса об устойчивости стержня нельзя допустить возникновения в нем критического напряжения, а следует принять соответствующий запас устойчивости.

Чтобы получить допускаемое напряжение на устойчивость, нужно выбрать коэффициент запаса $[n]_y$. Тогда

$$[\sigma]_y = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{[n]_y}. \quad (24)$$

Коэффициент запаса на устойчивость всегда принимают несколько больше основного коэффициента запаса на прочность ($[n]_y > n$). Это делается потому, что для центрально сжатых стержней ряд обстоятельств, неизбежных на практике (эксцентриситет приложения нагрузки, начальная кривизна и неоднородность стержня), способствуют продольному изгибу, в то время как при других деформациях эти обстоятельства почти не сказываются. Допускаемое напряжение на устойчивость и допускаемое напряжение на прочность при сжатии взаимно связаны:

$$[\sigma]_y = \varphi[\sigma]_c. \quad (25)$$

Здесь φ – коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения при расчете на устойчивость.

Составим условия устойчивости сжатых стержней:

$$\sigma \leq [\sigma]_y, \quad (26)$$

или

$$\sigma = \frac{N}{F_{бр}} \leq \varphi [\sigma]_c. \quad (27)$$

При расчете на устойчивость местные ослабления сечения практически не изменяют величину критической силы, поэтому в расчетные формулы вводится полная площадь $F_{бр}$ поперечного сечения.

9. Несущая способность элементов конструкции крыла

Несущая способность (НС) – предельная нагрузка, которую в состоянии выдержать элемент конструкции при определенном характере нагружения.

При растяжении НС ограничивается значениями нормальных напряжений

$$\sigma_{разр} = K \sigma_v. \quad (28)$$

$K = 0,8 \div 0,95$ – коэффициент, учитывающий концентрацию напряжений в местах установки заклепок и сварных швов и зависящий от материала.

При сжатии НС тонкостенных элементов конструкции определяется критическими напряжениями потери устойчивости.

Если сжимающие или касательные усилия, действующие в плоскости обшивки, превысят критические значения, то обшивка потеряет устойчивость и выпучится. Рассматривая элемент обшивки (рис. 11) как пластинку, закрепленную на нервюрах и стрингерах, критические напряжения в пределах упругости при сжатии и при сдвиге можно определить по формулам:

$$\sigma_{кр} = K \sigma^0; \quad (29)$$

$$\tau_{кр} = K \tau^0, \quad (30)$$

где

$$\sigma^0 = 0,9E \left(\frac{\delta}{b} \right)^2;$$

b – ширина пластинки; δ – толщина обшивки; K – коэффициент, зависящий от условий закрепления пластинки по контуру и отношения ее сторон.

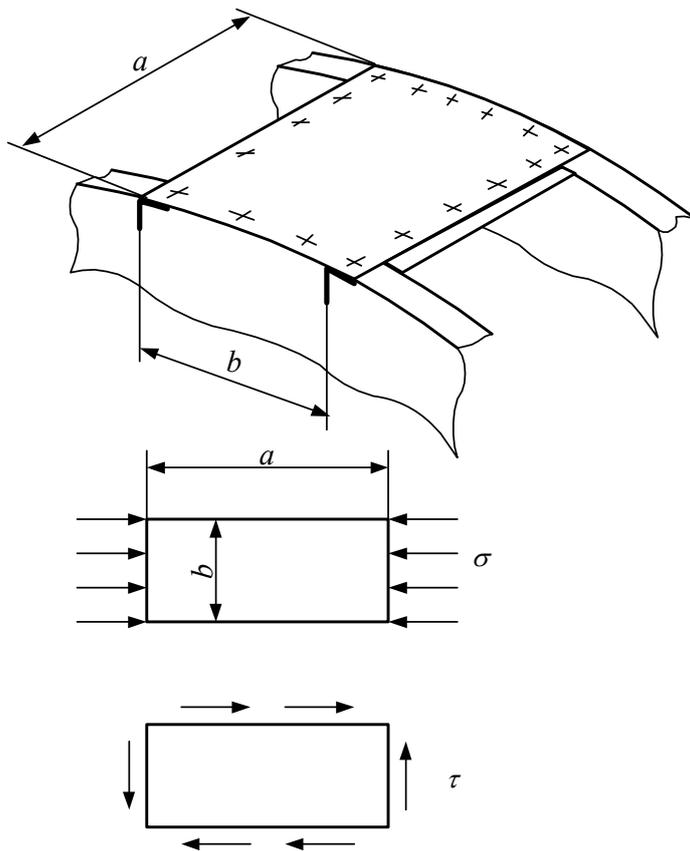


Рис. 11

При больших значениях $\lambda = \frac{b}{\delta}$ критические напряжения $\sigma_{кр}$ изменяются по закону гиперболы (гиперболы Эйлера). При $\lambda < \lambda_{пред}$ закон изменения $\sigma_{кр}$ становится более сложным и формулы (29) дают завышенные значения критических напряжений, которые могут отличаться значительно от действительных напряжений. Если критические напряжения обшивки меньше или равны пределу пропорциональности материала, то обшивку принято называть тонкой, а при $\sigma_{кр} > \sigma_{пл}$ — толстой. Определяя критические напряжения толстой обшивки, нужно учитывать нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями.

Приближенно критические напряжения за пределом упругости можно определить по следующим эмпирическим формулам:

в случае сжатия

$$\sigma'_{кр} = \sigma_B \frac{1 + \nu}{1 + \nu + \nu^2}, \quad (31)$$

где $\nu = \sigma_B / \sigma_{кр}$;

в случае сдвига

$$\tau'_{кр} = \tau_B \frac{1 + \nu}{1 + \nu + \nu^2}, \quad (32)$$

где $\nu = \tau_B / \tau_{кр}$; $\tau_B \approx 0,6\sigma_B$.

Здесь $\sigma_{кр}$ и $\tau_{кр}$ определяются по формулам (29) и (30).

Зависимости (31) и (32) дают вполне удовлетворительное приближение к действительным значениям критических напряжений.

При $\lambda < 5$ устойчивость не теряется и элемент разрушается от сжатия. Разрушающее напряжение сжатия на 30...50% выше σ_B , т. е.

$$\sigma_{разр} = 1,3...1,5\sigma_B.$$

10. Расчеты сжатых стержней на устойчивость (Условие устойчивости. Проверочный и проектировочный расчеты)

Для сжатых стержней должны быть проведены проверки:

на прочность –

$$\sigma = \frac{P}{F_{\text{нетто}}} \leq [\sigma]_c; [\sigma]_c = \frac{\sigma^0}{n^0}, \text{ в частности, } \sigma^0 = \sigma_T; n^0 = n_T;$$

на устойчивость –

$$\sigma = \frac{P}{F_{\text{брутто}}} \leq [\sigma]_y, [\sigma]_y = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{n_y}.$$

Установим взаимосвязь между $[\sigma]_c$ и $[\sigma]_y$:

$$\frac{[\sigma]_y}{[\sigma]_c} = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{n_y} \cdot \frac{n^0}{\sigma^0} \Rightarrow [\sigma]_y = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{\sigma^0} \cdot \frac{n^0}{n_y} [\sigma]_c.$$

Обозначим

$$\frac{\sigma_{\text{кр}}}{\sigma^0} \cdot \frac{n^0}{n_y} = \varphi \Rightarrow [\sigma]_y = \varphi [\sigma]_c,$$

где φ – коэффициент уменьшения основного допустимого напряжения на сжатие ($\varphi \leq 1$).

Коэффициент φ зависит от материала стержня и его гибкости и находится по таблицам.

Условие прочности –

$$\frac{P}{F_{\text{бр}}} \leq \varphi [\sigma]_c.$$

При расчете на устойчивость местные ослабления сечения не влияют на величину критической силы, и поэтому в расчет принимают $F_{\text{бр}}$.

Различают два вида расчета на устойчивость сжатых стержней: проверочный и проектировочный.

Проверочный расчет

1. Зная форму и размеры поперечного сечения, определить $F_{\text{бр}}$ и J_{min} .
2. Вычислить $i_{\text{min}} = \sqrt{\frac{J_{\text{min}}}{F}}$; $\lambda = \frac{\nu \ell}{i_{\text{min}}}$.
3. По таблице найти значение φ .
4. Проверить условие устойчивости $\frac{P}{F_{\text{бр}}} \leq \varphi [\sigma]_c$.

Проектировочный расчет

Условие устойчивости содержит две неизвестные величины F и φ , которые зависят одна от другой, поэтому задача решается методом последовательных приближений. Обычно в первом приближении назначают $\varphi_1 = 0,5 \div 0,6$, определяют F и находят фактическое значение φ'_1 . При большом отличии φ_1 от φ'_1 выполняется второе приближение $\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2}$. Если необходимо третье приближение, то $\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2}$ и т. д.

11.0 выборе материала и рациональной формы поперечного сечения сжатых стержней

Для стержней большой гибкости ($\lambda \geq \lambda_{\text{пред}}$), когда $\sigma_{\text{кр}} < \sigma_{\text{пц}}$, модуль упругости E является единственной механической характеристикой, определяющей сопротивление стержня потере устойчивости. В этом случае нецелесообразно применять сталь повышенной прочности, так как модуль E для всех сталей практически одинаков.

Для стержней малой гибкости применение высококачественных сталей целесообразно, так как в этом случае повышение предела текучести $\sigma_T (\sigma_g)$ увеличивает критические напряжения, а, следовательно, и запас устойчивости.

С экономической точки зрения наиболее рациональна такая форма поперечного сечения стержня, при которой значение i_{min} при определенной площади является наибольшим. Для оценки рациональности формы сечения используют безразмерную величину $\xi = \frac{i_{\text{min}}}{\sqrt{F}}$ – удельный радиус инерции.

Приведем значения ξ для некоторых сечений:

| | |
|--|--------------|
| кольцо ($\alpha = 0,95 \div 0,8$) | 2,25 ÷ 1,64; |
| ($\alpha = 0,7 \div 0,8$) | 1,2 ÷ 1,0; |
| <i>α – отношение внутреннего и наружного диаметров кольца;</i> | |
| уголок | 0,5 ÷ 0,3; |
| квадрат | 0,289; |
| круг | 0,283; |
| прямоугольник ($h = 2b$) | 0,204. |

Анализ показывает, что наиболее рациональны трубчатые кольцевые сечения. Однако при проектировании элементов конструкции с такими поперечными сечениями необходимо предусмотреть постановку диафрагм и ребер жесткости во избежание местной потери устойчивости.

При расчете сжатых стержней необходимо, чтобы они были равноустойчивы во всех направлениях. В этой связи нерационально применять двутавровые и прямоугольные сечения.

Основная задача проектировщиков заключается в том, чтобы сделать гибкости в главных плоскостях равными или хотя бы близкими между собой. Если не удастся сделать гибкости одинаковыми, то расчет следует провести по максимальной гибкости.

12. Продольно-поперечный изгиб

Рассмотрим деформации стержней малой гибкости.

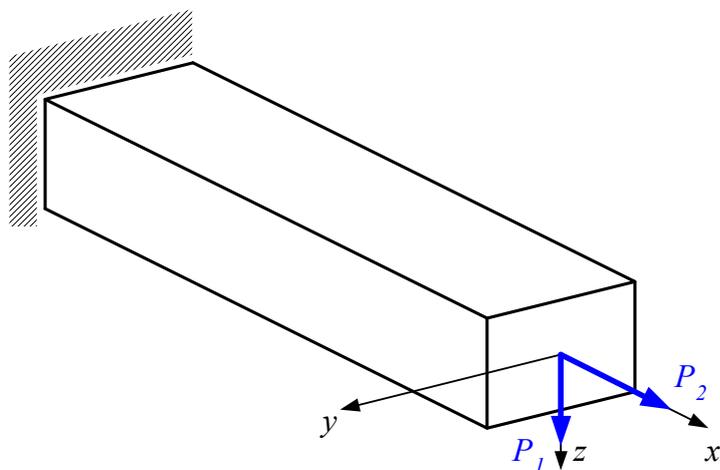


Рис. 12. Деформация – изгиб с растяжением

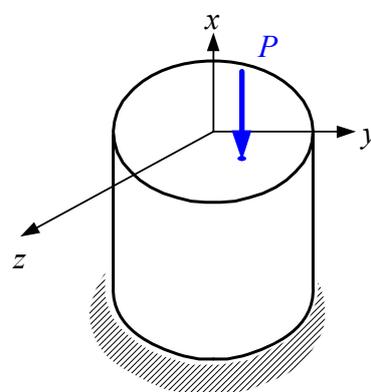


Рис. 13. Деформация – внецентренное сжатие

Используя принцип независимости действия сил, получим напряжения в произвольной точке сечения:

– для случая на рис. 12

$$\sigma_x = \frac{N}{F} \pm \frac{M_y}{J_y} z;$$

– для случая на рис. 13

$$\sigma_x = \frac{N}{F} \pm \frac{M_z}{J_z} y \pm \frac{M_y}{J_y} z.$$

При определении деформаций коротких жестких стержней также применяют принцип независимости действия сил, так как деформации малы и не зависят от последовательности приложения нагрузки. Расчет производится по недеформируемой схеме.

Рассмотрим нагружение стержня поперечной и продольной сжимающей нагрузкой.

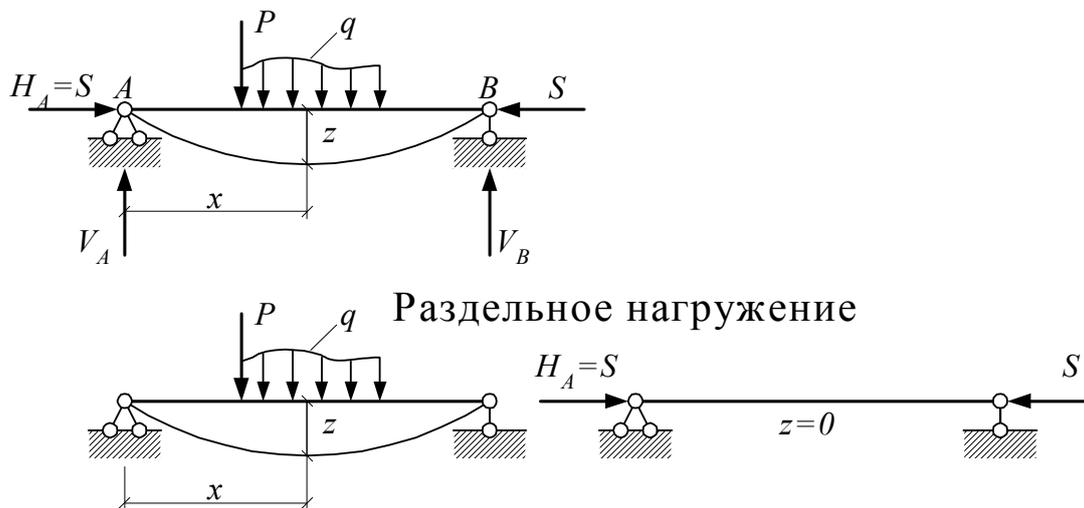


Рис. 14

Совершенно очевидно, что под воздействием этих нагрузок силы S будут вызывать дополнительный изгиб стержня, и поэтому полный прогиб будет больше суммы прогибов, возникающих при совместном действии поперечных и продольных сил. В этом случае принцип независимости действия сил неприменим, и расчет следует выполнить по деформируемой схеме. Изгибающий момент от сжимающей силы S необходимо определять с учетом прогибов балки.

Изгиб прямоугольного бруса, при котором в поперечных сечениях возникают изгибающие моменты как от поперечных, так и от продольных нагрузок, называется продольно-поперечным изгибом.

Изгибающий момент в поперечном сечении балки

$$M_n = M_0 + Sz, \quad (33)$$

где M_n – полный изгибающий момент в сечении; M_0 – изгибающий момент от поперечной нагрузки; Sz – дополнительный изгибающий момент.

Приближенное уравнение изогнутой оси балки при чистом изгибе имеет вид

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{M_n}{EJ}. \quad (34)$$

Подставим (33) в (34):

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{-M_0 - Sz}{EJ}. \quad (35)$$

Это – приближенное уравнение изогнутой оси балки при продольно-поперечном изгибе. Точное решение этого уравнения требует значительного объема вычислений и преобразований.

13. Приближенный способ расчета на прочность и жесткость при продольно-поперечном изгибе

Уравнение (35) представим в следующем виде:

$$EJ \frac{d^2 z}{dx^2} + M_0 = -Sz. \quad (36)$$

Пусть z - полный прогиб; z_0 - прогиб от поперечной нагрузки; $z - z_0$ - дополнительный прогиб от действия силы S .

Под действием поперечной нагрузки

$$\frac{d^2 z_0}{dx^2} = -\frac{M_0}{EJ} \text{ или } M_0 = -EJ \frac{d^2 z_0}{dx^2}. \quad (37)$$

Подставив (37) в (36), получим

$$EJ \frac{d^2 z}{dx^2} - EJ \frac{d^2 z_0}{dx^2} = -Sz$$

или

$$\frac{d^2(z - z_0)}{dx^2} = -\frac{Sz}{EJ}. \quad (38)$$

Предположим, что дополнительный прогиб изменяется по закону синуса

$$z - z_0 = f \sin \frac{\pi}{\ell} x, \quad (39)$$

где f - стрела прогиба.

В этом предположении и заключается приближенность решения.

Продифференцируем дважды выражение (39):

$$\frac{d(z - z_0)}{dx} = f \frac{\pi}{\ell} \cos \frac{\pi}{\ell} x,$$

$$\frac{d^2(z - z_0)}{dx^2} = -f \frac{\pi^2}{\ell^2} \sin \frac{\pi}{\ell} x = -\frac{\pi^2}{\ell^2} (z - z_0).$$

Подставив его в (38), получим

$$-\frac{\pi^2}{\ell^2} (z - z_0) = -\frac{Sz}{EJ}.$$

Найдем полный прогиб:

$$(z - z_0) = + \frac{Sz}{EJ \pi^2} \Rightarrow z - \frac{Sz}{\pi^2 EJ} = z_0 \Rightarrow$$

$$z \left(1 - \frac{Sz}{\pi^2 EJ} \right) = z_0 \Rightarrow z = \frac{z_0}{1 - \frac{S}{\frac{\pi^2 EJ}{\ell^2}}}. \quad (40)$$

Выражение $\frac{\pi^2 EJ}{\ell^2}$ подобно формуле Эйлера для критической нагрузки сжа-

того шарнирно опертого стержня, поэтому $\frac{\pi^2 EJ}{\ell^2} = P_3$ - эйлерова сила.

Тогда формула (40) запишется как

$$z = \frac{z_0}{1 - \frac{S}{P_3}} \quad (41)$$

– формула для определения прогибов при совместном действии продольных и поперечных нагрузок.

Эйлерова сила в формулу (41) введена формально. Различие между P_3 и $P_{кр}$ заключается в следующем:

1. Формула

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{\ell^2} \quad (42)$$

применима при условии, что гибкость стержня больше предельной ($\lambda > \lambda_{\text{пред}}$), т. е. для стержней большой гибкости. Для эйлеровой силы это ограничение неприменимо.

2. В формулу (42) входит J_{\min} , а при вычислении P_3 следует брать момент инерции относительно той из главных осей инерции, которая перпендикулярна плоскости действия поперечной нагрузки.

Приближенной формулой (41) для прогибов можно воспользоваться и при других способах закрепления концов стержня:

$$P_3 = \frac{\pi^2 EJ}{(\nu\ell)^2}. \quad (43)$$

Формула (41) не применима, если $\frac{S}{P_3} \approx 1$. Она используется при условии, что

$$0 \leq S \leq 0,8P_3.$$

Если $S \approx P_3$, то необходимо интегрировать точное дифференциальное уравнение упругой линии стержня:

$$\frac{d^2 z / dx^2}{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = -\frac{M_0 + Sz}{EJ}.$$

Отношение $\frac{S}{P_3}$ – критерий жесткости. При $\frac{S}{P_3} \approx 0$ – жесткая балка, при $\frac{S}{P_3} \approx 1$ – гибкая балка.

Наибольшие сжимающие напряжения в поперечных сечениях балки при продольно-поперечном изгибе находятся по зависимости

$$\sigma = \frac{S}{F} + \frac{M(x)}{W_z} = \frac{S}{F} + \frac{M_0}{W_z} + \frac{Sz}{W_z}.$$

Учитывая (41), имеем

$$\sigma = \frac{S}{F} + \frac{M_o}{W_y} + \frac{Sz_o}{W_y} \frac{1}{1 - \frac{S}{P_3}}. \quad (44)$$

Из зависимости (44) видно, что напряжения не пропорциональны нагрузке, они растут быстрее ее.

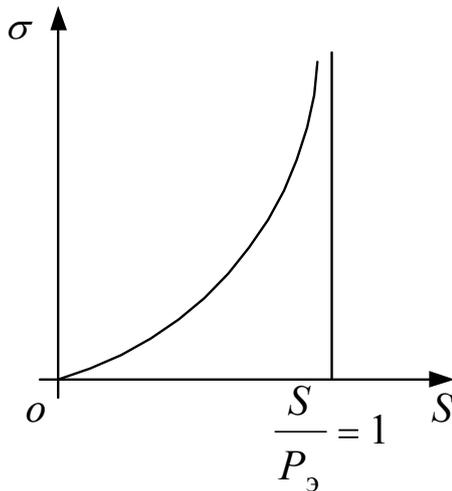


Рис. 15

Незначительное увеличение нагрузки может вызвать значительное увеличение напряжений и привести к разрушению балки. Поэтому расчет сжато-изогнутых балок следует вести не по допускаемым напряжениям, а по допустимой нагрузке. Условие прочности при этом запишется в виде

$$P_{\max} \leq [P],$$

где $[P] = \frac{P_{\text{разр}}}{[n]}$, $[n]$ – коэффициент запаса прочности.

14. Определение допустимой нагрузки при продольно-поперечном изгибе

Из условия прочности следует, что максимальные (предельные) напряжения не должны превышать текучести материала

$$\sigma_{\text{пред}} \leq \sigma_T \quad (45)$$

или

$$\frac{S_{\text{пред}}}{F} + \frac{M_{o \text{ пред}}}{W_y} + \frac{S_{\text{пред}} z_{\text{пред}}}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (46)$$

Здесь $S_{\text{пред}}$ – предельная сжимающая сила, ее нужно выразить через изгибающую силу

$$S_{\text{пред}} = K[P][n],$$

где K – коэффициент пропорциональности, $z_{\text{пред}}$ – предельный (максимально возможный) прогиб в сжатом сечении:

$$z_{\text{пред}} = \frac{z_{o \text{ пред}}}{1 - \frac{S_{\text{пред}}}{P_3}}.$$

15. Энергетический метод определения критической силы

Этот метод предназначен для определения критических нагрузок.

Рассмотрим стержень, сжатый силой $P = P_{кр}$. В этом случае он находится в состоянии безразличного равновесия (рис. 16).

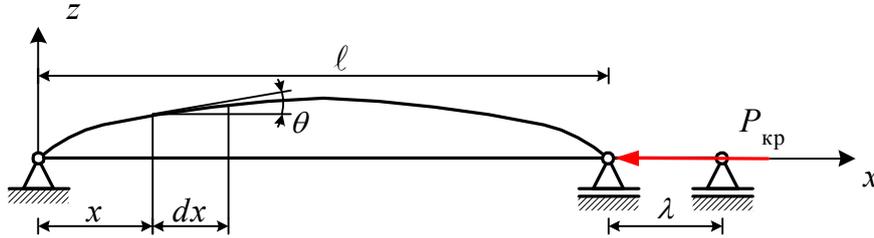


Рис. 16

Сжимающая сила $P_{кр}$ совершает работу $A = P_{кр} \cdot \lambda$, которая полностью переходит в потенциальную энергию деформации:

$$U_{изг} = A = P_{кр} \cdot \lambda. \quad (48)$$

Известно, что потенциальная энергия при изгибе определяется так:

$$U_{изг} = \int_0^{\ell} \frac{M_y^2}{2EJ} dx. \quad (49)$$

Учитывая, что $M_y = EJz''$, выражение (49) приводится к виду

$$U_{изг} = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} EJz''^2 dx. \quad (50)$$

Смещение точки приложения сжимающей силы $P_{кр}$ можно определить как разность между длиной стержня ℓ и проекцией изогнутой оси стержня на ось x . Учитывая малость угла θ и соответствие $\theta = z'$, легко установить, что элементарная данная разность

$$d\lambda = dx - dx \cdot \cos \theta = dx \cdot (1 - \cos \theta) = dx \cdot 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \approx 2 \cdot \frac{\theta^2}{4} \cdot dx = \frac{\theta^2}{2} \cdot dx = \frac{1}{2} z'^2 dx.$$

Интегрируя, получим

$$\lambda = \int_0^{\ell} d\lambda = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} z'^2 dx.$$

Подставив λ в выражение (48), определим

$$U_{изг} = P_{кр} \cdot \lambda = P_{кр} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\ell} z'^2 dx. \quad (51)$$

Приравнивая правые части (50) и (51), получим

$$\frac{1}{2} P_{кр} \int_0^{\ell} z'^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} EJz''^2 dx.$$

Отсюда следует значение критической силы

$$P_{кр} = \frac{\int_0^{\ell} EJz''^2 dx}{\int_0^{\ell} z'^2 dx}. \quad (52)$$

Если известно $z(x)$ (или если, исходя из каких-то соображений, задаться функцией $z(x)$), то нетрудно по формуле (52) определить критическую силу.

Так, например, при шарнирном креплении концов стержня (как было показано выше) $z = f \sin \frac{\pi}{\ell} x$.

Тогда

$$z' = f \frac{\pi}{\ell} \cos \frac{\pi}{\ell} x \text{ и } z'' = -f \frac{\pi^2}{\ell^2} \sin \frac{\pi}{\ell} x.$$

А критическая сила

$$P_{кр} = \frac{EJf^2 \frac{\pi^2}{\ell^2} \int_0^{\ell} \sin^2 \frac{\pi}{\ell} x dx}{f^2 \frac{\pi^2}{\ell^2} \int_0^{\ell} \cos^2 \frac{\pi}{\ell} x dx} = \frac{EJ\pi^2}{\ell^2}. \quad (53)$$

Это выражение в точности совпадает с формулой Эйлера.

Однако функция $z(x)$ не установлена до решения дифференциального уравнения упругой линии. Поэтому $z(x)$ часто задают приближенно, угадывая форму упругой линии из простых физических соображений.

Пусть, к примеру, нам не известно, что закрепленный шарнирно стержень изгибается по полуволне синусоиды. Примем, что упругая линия представляет собой дугу параболы:

$$z = f \cdot x \cdot (\ell - x).$$

При этом граничные условия будут соответствовать шарнирному опиранию:

$$x = 0 \Rightarrow z = 0, \quad x = \ell \Rightarrow z = 0.$$

Тогда производные функции $z(x)$

$$z' = f\ell - 2fx = f(\ell - 2x), \\ z'' = -2f.$$

Учитывая, что $\pi^2 = 9,8696$, относительно точного решения (53) получим погрешность $\delta = \left| \frac{9,8696 - 12}{9,8696} \right| \cdot 100\% = 21,6\%$.

Большая погрешность объясняется неудачным выбором функции $z(x)$, так как это приводит к $z'' = const$, т. е. к $M_y = const$. Выберем другую функцию, а именно:

$$z'' = f \cdot x \cdot (\ell - x).$$

В этом случае, интегрируя, получим

$$z' = f \cdot \left(\ell \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C \right).$$

Определим постоянную C из условия $z'\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0$:

$$0 = f \cdot \left(\ell \frac{\ell^2}{8} - \frac{\ell^3}{3 \cdot 8} + C \right) \Rightarrow C = -\frac{1}{12} \ell^3.$$

Окончательно имеем

$$z' = \frac{f}{12} (6\ell x^2 - 4x^3 - \ell^3).$$

Тогда критическая сила

$$P_{\text{кр}} = \frac{EJ \int_0^{\ell} f^2 x^2 (\ell - x)^2 dx}{\int_0^{\ell} \frac{f^2}{144} (6\ell x^2 - 4x^3 - \ell^3)^2 dx} = \frac{168}{17} \cdot \frac{EJ}{\ell^2} = 9,8824 \frac{EJ}{\ell^2}.$$

Напомним точное решение $P_{\text{кр}} = \pi^2 \frac{EJ}{\ell^2} = 9,8696 \frac{EJ}{\ell^2}$ и установим, что расхождение составит

$$\delta = \frac{9,8696 - 9,8824}{9,8696} \cdot 100\% = 0,129\%,$$

что вполне приемлемо.

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Задача П.1.1

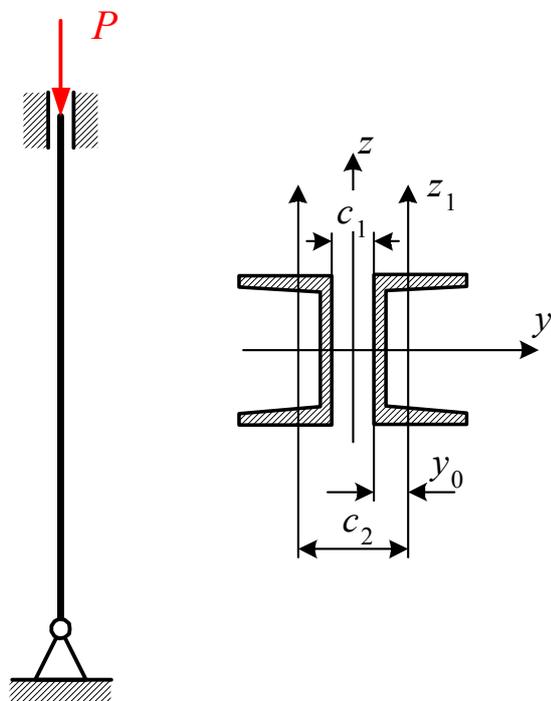


Рис. П.1.1

Дано: материал стержня сталь Ст. 5; $k_T = 2$; $P = 500$ кН; длина стержня $\ell = 12$ м.

Необходимо определить: номер швеллера; действительный коэффициент запаса устойчивости n_y ; загруженность стойки $\Delta\sigma$ %; длину a_B ветви колонны (рис. П.1.1) и обеспечить равноустойчивость стойки (колонны);

Решение

Из табл. П.4.1. выписываем механические характеристики материала сталь Ст. 5 для расчета на устойчивость: $\sigma_T = 280$ МПа; $\sigma_{шц} = 280$ МПа; $a = 350$ МПа; $b = 1,15$ МПа; $\lambda_{пред} = 92$; $\lambda_1 = 57$.

Определяем допускаемое напряжение на сжатие для данной стали:

$$[\sigma]_c = \frac{\sigma_T}{K_T} = \frac{280}{2} = 140 \text{ МПа}.$$
 Поскольку основной формулой при подборе сечения по единым нормам строительного проектирования является неравенство $F_{бр} \geq \frac{P}{\varphi[\sigma]_c}$, то у нас возникает неопределенность, связанная с зависимостью коэффициента φ от геометрических характеристик сечения. Используем метод последовательных приближений для определения номера швеллера. Так как местные ослабления сечения практически не влияют на величину критической силы, то $F_{бр} = 2F^{шв}$, где $F^{шв}$ – площадь поперечного сечения одного швеллера.

1. Определяем номер швеллера с учетом возможной равноустойчивости стойки (колонны) в двух главных направлениях.

I приближение

1) назначаем коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения на сжатие в диапазоне $\varphi = 0,5 \dots 0,6$. Выбираем $\varphi^I = 0,5$;

2) определяем площадь составного сечения стойки:

$$F_{\text{бр}}^I \geq \frac{P}{\varphi^I[\sigma]_c} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 140 \cdot 10^6} = 71,43 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

3) по сортаменту выбираем номер швеллера с учетом того, что $2F^{\text{шв}} = F_{\text{бр}}^I$, т.е. $F^{\text{шв}} \geq 35,715 \text{ см}^2$. Подходит швеллер №30: $F_1^{\text{шв}} = 40,5 \text{ см}^2$; $J_y^{\text{шв}} = 5810 \text{ см}^4$; $J_{z1}^{\text{шв}} = 327 \text{ см}^4$; $i_y^{\text{шв}} = 12 \text{ см}$; $i_{z1}^{\text{шв}} = 2,84 \text{ см}$; $y_0 = 2,52 \text{ см}$;

4) определяем гибкость стойки по формуле $\lambda_1 = \frac{\nu \cdot \ell}{i_{\text{min},1}}$, где

$$i_{\text{min},1} = \sqrt{\frac{J_{\text{min}}^{2-x \text{ шв}}}{2F^{\text{шв}}}} = \sqrt{\frac{2J_y^{\text{шв}}}{2F^{\text{шв}}}} = \sqrt{\frac{J_y^{\text{шв}}}{F^{\text{шв}}}} = i_y^{\text{шв}}, \text{ с учетом равноустойчивости стойки}$$

$$\text{в двух направлениях. Окончательно } \lambda_1 = \frac{\nu \cdot \ell}{i_{\text{min},1}} = \frac{0,7 \cdot 12}{12 \cdot 10^{-2}} = 70;$$

5) по табл. П.4.2 определяем коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения на сжатие для выбранного сечения $\varphi_1 = 0,74$;

6) проверяем оптимальность стойки данного сечения по коэффициенту φ : $\Delta\varphi\% = \left| \frac{\varphi^I - \varphi_1}{\varphi_1} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{0,5 - 0,74}{0,74} \right| \cdot 100\% = 32,4\% > 5\%$. Стойка недогружена на 32,4%.

II приближение

1) определяем φ^{II} по формуле $\varphi^{\text{II}} = \frac{\varphi^I + \varphi_1}{2} = \frac{0,5 + 0,74}{2} = 0,62$;

2) определяем площадь составного сечения стойки:

$$F_{\text{бр}}^I \geq \frac{P}{\varphi^I[\sigma]_c} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 140 \cdot 10^6} = 71,43 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

3) по сортаменту выбираем номер швеллера:

$$F^{\text{шв}} = \frac{F_{\text{бр}}^{\text{II}}}{2} \geq \frac{57,6}{2} = 28,8 \text{ см}^2; \text{ швеллер №22}^a: F_2^{\text{шв}} = 28,8 \text{ см}^2; J_y^{\text{шв}} = 2330 \text{ см}^4; J_{z1}^{\text{шв}} = 187 \text{ см}^4; i_y^{\text{шв}} = 8,99 \text{ см}; i_{z1}^{\text{шв}} = 2,55 \text{ см}; y_0 = 2,46 \text{ см};$$

4) определяем гибкость стойки: $\lambda_2 = \frac{\nu \cdot \ell}{i_y^{\text{шв}}} = \frac{0,7 \cdot 12}{8,99 \cdot 10^{-2}} = 93,44$;

5) по табл. П.4.2 определяем φ_2 с учетом линейной интерполяции:

$$\text{при } \lambda' = 90 \quad \varphi' = 0,59;$$

$$\text{при } \lambda'' = 100 \quad \varphi'' = 0,5,$$

$$\text{тогда } \varphi_2 = \varphi' - \frac{\varphi' - \varphi''}{\lambda'' - \lambda'} \cdot (\lambda_2 - \lambda') = 0,59 - \frac{0,59 - 0,5}{100 - 90} \cdot (93,44 - 90) = 0,559;$$

б) проверяем оптимальность стойки данного сечения по коэффициенту φ :

$$\Delta\varphi\% = \left| \frac{\varphi^{\text{II}} - \varphi_2}{\varphi_2} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{0,62 - 0,559}{0,559} \right| \cdot 100\% = 10,9\% > 5\%. \text{ Стойка перегружена на } 10,9\%.$$

III приближение

1) определяем φ^{III} по формуле $\varphi^{\text{III}} = \frac{\varphi^{\text{II}} + \varphi_2}{2} = \frac{0,62 + 0,559}{2} = 0,5895;$

2) определяем площадь составного сечения стойки:

$$F_{\text{бр}}^{\text{III}} \geq \frac{P}{\varphi^{\text{III}}[\sigma]_c} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,5895 \cdot 140 \cdot 10^6} = 60,58 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

3) по сортаменту выбираем номер швеллера: $F^{\text{шв}} = \frac{F_{\text{бр}}^{\text{III}}}{2} \geq \frac{60,58}{2} = 30,29 \text{ см}^2;$

швеллер №24: $F_3^{\text{шв}} = 30,6 \text{ см}^2; J_y^{\text{шв}} = 2900 \text{ см}^4; J_{z1}^{\text{шв}} = 208 \text{ см}^4; i_y^{\text{шв}} = 9,73 \text{ см}; i_{z1}^{\text{шв}} = 2,6 \text{ см}; y_0 = 2,42 \text{ см};$

4) определяем гибкость стойки: $\lambda_3 = \frac{\nu \cdot \ell}{i_y^{\text{шв}}} = \frac{0,7 \cdot 12}{9,73 \cdot 10^{-2}} = 86,33;$

5) по табл. П.4.2 определяем φ_3 с учетом линейной интерполяции:

$$\lambda' = 80 \quad \varphi' = 0,67;$$

$$\lambda'' = 90 \quad \varphi'' = 0,59;$$

$$\varphi_3 = \varphi' - \frac{\varphi' - \varphi''}{\lambda'' - \lambda'} \cdot (\lambda_3 - \lambda') = 0,67 - \frac{0,67 - 0,59}{90 - 80} \cdot (86,33 - 80) = 0,6194;$$

б) проверяем оптимальность стойки данного сечения по коэффициенту φ :

$$\Delta\varphi\% = \left| \frac{\varphi^{\text{III}} - \varphi_3}{\varphi_3} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{0,5895 - 0,6194}{0,6194} \right| \cdot 100\% = 4,82\% < 5\%. \text{ Стойка недогружена на } 4,82\%.$$

Расчет закончен, так как погрешность вычислений менее 5%. Для стоек из стандартного металлопроката можно останавливать расчет и в случае, когда погрешность по коэффициенту φ больше 5%, но в следующем приближении номер профиля повторяется или возникает ситуация повторения номеров двух ближайших профилей.

2. Определяем действительный коэффициент запаса устойчивости выбранной стойки. Так как $\lambda_1 < \lambda_3 < \lambda_{\text{пред}}$ (см. табл. П.4.1), то расчет критической силы производится с использованием формулы Ясинского. Окончательно

$$n_y = \frac{P_{\text{кр}}^{\text{Я}}}{P} = \frac{(a - b\lambda_3) \cdot 2F_3^{\text{шв}}}{P} = \frac{(350 - 1,15 \cdot 86,33) \cdot 2 \cdot 30,6 \cdot 10^{-4}}{500 \cdot 10^3} = 3,07.$$

Допустимый диапазон этого коэффициента для сталей составляет 1,8...3. Полученный коэффициент близок к верхнему пределу и незначительно (менее 5%) превышает его, что допустимо.

3. Определяем загруженность стойки по напряжениям:

3.1. Находим действующие напряжения в сечениях составной стойки:

$$\sigma_x = \frac{P}{2F_3^{\text{шв}}} = \frac{500 \cdot 10^3}{2 \cdot 30,6 \cdot 10^{-4}} = 81,7 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

3.2. Рассчитываем допускаемые напряжения на устойчивость выбранной стойки:

$$[\sigma]_y = \varphi_3 \cdot [\sigma]_c = 0,6194 \cdot 140 = 86,72 \text{ МПа}.$$

3.3. Вычисляем процент недогрузки стойки по напряжениям:

$$\Delta\sigma\% = \left| \frac{\sigma_x - [\sigma]_y}{[\sigma]_y} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{81,7 - 86,72}{86,72} \right| \cdot 100\% = 5,79\%.$$

4. Определяем расстояние, обеспечивающее равноустойчивость стойки в двух главных направлениях:

4.1. Из условия равноустойчивости стойки

$2 \cdot J_y^{\text{шв}} = J_z^{\text{шв}} = 2 \left[J_{z1}^{\text{шв}} + \left(\frac{c_2}{2} \right)^2 \cdot F_3^{\text{шв}} \right]$ в двух главных направлениях определяем расстояние c_2 между центрами двух швеллеров:

$$c_2 = 2 \sqrt{\frac{J_y^{\text{шв}} - J_{z1}^{\text{шв}}}{F_3^{\text{шв}}}} = 2 \sqrt{\frac{2900 - 208}{30,6}} = 18,76 \text{ см}.$$

4.2. Находим расстояние c_1 между стенками двух швеллеров:

$$c_1 = c_2 - 2 \cdot y_0 = 18,76 - 2 \cdot 2,42 = 13,92 \text{ см}.$$

5. Обеспечиваем работу колонны, состоящей из двух ветвей (швеллеров), как единого целого в сечении (рис. П.1.2):

5.1. Определяем длину a_B ветви колонны. Так как $P \leq [P]_K = 2[P]_B$, а $[P]_K = \varphi_K \cdot 2 \cdot F_3^{\text{шв}} \cdot [\sigma]_c$ и $[P]_B = \varphi_B \cdot 2 \cdot F_3^{\text{шв}} \cdot [\sigma]_c$, расстояние между стержнями-перемычками, соединяющими между собой швеллера в единое целое, т.е. a_B должно быть выбрано таким, чтобы $\varphi_B = \varphi_K$ и соответственно $\lambda_B = \lambda_K$.

Тогда $\frac{\nu_B \cdot a_B}{i_{\min, B}} = \frac{\nu_K \cdot a_K}{i_{\min, K}}$, где $\nu_B = 1$ по условиям опирания в упруго податливых

соединениях стержней и швеллеров; $i_{\min, K} = i_y^{\text{шв}}$ (показано в п. 1 этого примера); $i_{\min, B} = i_{z1}^{\text{шв}}$. Окончательно

$$a_B = \frac{\nu_K \cdot \ell}{i_y^{\text{шв}}} \cdot \frac{i_{z1}^{\text{шв}}}{\nu_B} = \lambda_3 \cdot \frac{i_{z1}^{\text{шв}}}{\nu_B} = 86,33 \cdot 2,6 = 224,5 \text{ см}.$$

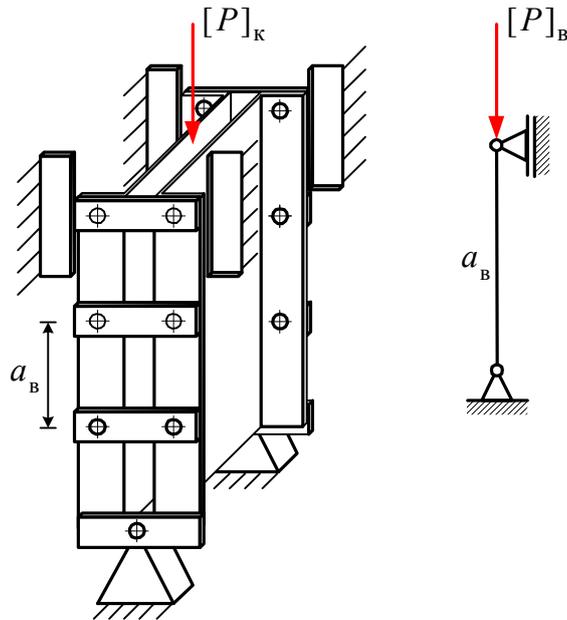


Рис. П.1.2

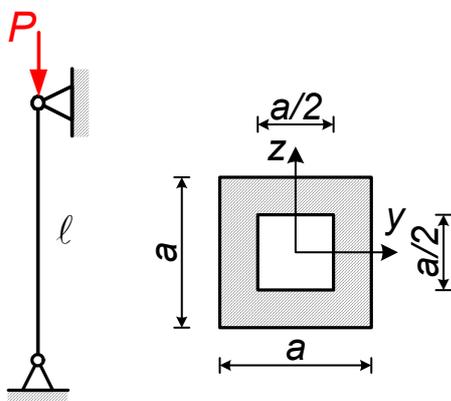
5.2. Определяем минимальное количество стержней-перемычек, соединяющих между собой полки швеллеров по одну сторону колонны, по формуле $n \geq \frac{\ell}{a_в}$, где n – ближайшее целое число:

$$\frac{\ell}{a_в} = \frac{1200}{224,5} = 5,345.$$

Принимаем $n = 6$. Тогда уточненное значение $a = \frac{\ell}{n} = \frac{1200}{6} = 200$ см.

Всего (по обе стороны колонны) потребуется установить 12 поперечных стержней-перемычек, которые могут быть выполнены из уголка или проката иной формы и будут работать только на растяжение-сжатие. В результате колонна будет иметь вид ферменной конструкции.

Задача П.1.2



Дано: $\ell = 3,5$ м; $P = 800$ кН; материал стойки сталь Ст3; $\sigma_T = 240$ МПа; $n_T = 1,5$; $E = 200$ ГПа.

Необходимо подобрать размеры поперечного сечения (рис. П.1.3), определить действительный коэффициент запаса n_y и загруженность стойки (перегрузку или недогруженность в %).

Рис. П.1.3

Расчет необходимо выполнить по единым нормам строительного проектирования с использованием коэффициента уменьшения основного допускаемого напряжения на сжатие φ . При этом проектировочная формула будет выглядеть так:

$$\frac{P}{F_{\text{бр}}} \leq \varphi \cdot [\sigma]_c,$$

где $[\sigma]_c = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{240}{1,5} = 160$ МПа; $F_{\text{бр}}$ – площадь поперечного сечения стойки

без учета местных ослаблений.

Так как коэффициент φ опосредованно через гибкость стержня λ зависит от геометрии ее сечения, то необходимо расчет производить циклически в несколько приближений, задавая в первом приближении $\varphi = 0,5 \dots 0,6$ и контролируя его сходимости в конце каждого цикла. Расчет останавливаем, когда расхождение между заданным коэффициентом φ и полученным в конце каждого цикла будет составлять около 5%.

Предварительно выразим гибкость через основной геометрический размер a заданного поперечного сечения:

$$F_{\text{бр}} = a^2 - (0,5a)^2 = 0,75a^2;$$

$$J_{\text{min}} = J_y = J_z = \frac{a^4}{12} - \frac{(0,5a)^4}{12} = 0,07813a^4;$$

$$i_{\text{min}} = \sqrt{\frac{J_{\text{min}}}{F_{\text{бр}}}} = \sqrt{\frac{0,07813a^4}{0,75a^2}} = 0,3228a;$$

$$\lambda = \frac{\nu \cdot \ell}{i_{\text{min}}} = \frac{1 \cdot 3,5}{0,3228a} = \frac{10,84}{a}.$$

Теперь рассмотрим задачу в обычном порядке.

I приближение

1. Назначаем $\varphi^I = 0,5$.
2. Определяем требуемую площадь поперечного сечения стойки:

$$F_{\text{бр}}^I \geq \frac{P}{\varphi^I [\sigma]_c} = \frac{800 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 100 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 100 \text{ см}^2.$$

3. Вычисляем характерный геометрический размер сечения стойки a_1 :

$$a_1 = \sqrt{\frac{F_{\text{бр}}^I}{0,75}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 10^4}{0,75}} = 0,1155 \text{ м}.$$

4. Рассчитываем гибкость полученной стойки $\lambda_1 = \frac{10,84}{0,1155} = 93,91$.

5. По справочной табл. П.4.2 определяем действительный коэффициент φ_1 для стойки с размером сечения a_1 , используя линейную интерполяцию его значений в заданных интервалах:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } \lambda' = 90: \quad \varphi' = 0,69 \\ \text{при } \lambda'' = 100: \quad \varphi'' = 0,60 \end{array} \right\} \quad \varphi_1 = \varphi' - \frac{\varphi' - \varphi''}{\lambda'' - \lambda'} (\lambda_1 - \lambda') =$$

$$= 0,69 - \frac{0,69 - 0,60}{10} (93,91 - 90) = 0,655.$$

6. Проверяем сходимость значений коэффициентов φ назначенного и полученного $\Delta\varphi\% = \left| \frac{\varphi_1 - \varphi^I}{\varphi_1} \right| \cdot 100\% = \frac{0,655 - 0,5}{0,655} \cdot 100\% = 23,66\% > 5\%$, поэтому расчет продолжаем.

II приближение

1. Усредняем значение коэффициента уменьшения основного допускаемого напряжения на сжатие: $\varphi^{\text{II}} = \frac{\varphi^I + \varphi_1}{2} = \frac{0,5 + 0,655}{2} = 0,578$.

2. Определяем новую требуемую площадь поперечного сечения:

$$F_{\text{бр}}^{\text{II}} \geq \frac{P}{\varphi^{\text{II}} [\sigma]_c} = \frac{800 \cdot 10^3}{0,578 \cdot 160 \cdot 10^6} = 86,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 86,6 \text{ см}^2.$$

3. Вычисляем характерный геометрический размер сечения стойки:

$$a_2 = \sqrt{\frac{F_{\text{бр}}^{\text{II}}}{0,75}} = \sqrt{\frac{86,6 \cdot 10^4}{0,75}} = 0,1074 \text{ м}.$$

4. Определяем гибкость полученной стойки $\lambda_2 = \frac{10,84}{0,1074} = 100,92$.

5. По справочной табл. П.4.2 находим действительный коэффициент φ_2 для стойки с размером сечения a_2 , используя линейную интерполяцию его значений в заданных интервалах:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda' = 100: \quad \varphi' = 0,60 \\ \lambda'' = 110: \quad \varphi'' = 0,52 \end{array} \right\} \quad \varphi_2 = \varphi' - \frac{\varphi' - \varphi''}{\lambda'' - \lambda'} (\lambda_2 - \lambda') =$$

$$= 0,6 - \frac{0,6 - 0,52}{10} (100,92 - 100) = 0,593.$$

6. Проверяем сходимость значений коэффициентов φ назначенного и полученного: $\Delta\varphi\% = \left| \frac{\varphi_2 - \varphi^{\text{II}}}{\varphi_2} \right| \cdot 100\% = \frac{0,593 - 0,578}{0,593} \cdot 100\% = 2,53\% < 5\%$.

Расчет в цикле останавливаем.

7. Округляя величину a_2 , принимаем $a = 108$ мм. При этом гибкость составит $\lambda = \frac{10,84}{0,108} = 100,4$. Определяем действительный коэффициент запаса $n_y = \frac{P_{\text{кр}}}{P}$, где $P_{\text{кр}}$ находим с учетом окончательной гибкости стойки исходя из диаграммы ус-

тойчивости. Так как $\lambda_{\text{пред}} = 100$ для стали Ст.3 (см. табл. П.4.1), то при $\lambda = 100,4$ мы находимся в зоне Эйлера и для определения $P_{\text{кр}}$ воспользуемся формулой Эйлера:

$$n_y = \frac{P_{\text{кр}}}{P} = \frac{\pi^2 EJ_{\text{min}}}{(\nu l)^2 \cdot P} = \frac{\pi^2 E \cdot 0,07813 \cdot a^4}{(\nu l)^2 \cdot P} =$$

$$= \frac{\pi^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 0,07813 \cdot (0,108)^4}{(0,7 \cdot 3) \cdot 800 \cdot 10^3} = 2,141.$$

8. Определяем процент загруженности полученной стойки. Сначала вычисляем действительные напряжения в сечении стойки, изготовленной из заданным сечением $a = 108$ мм:

$$\sigma_x = \frac{P}{F} = \frac{P}{0,75a^2} = \frac{800 \cdot 10^3}{0,75 \cdot 0,108^2} = 91,45 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

а затем, подсчитав коэффициент φ при $\lambda = 100,4$:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda' = 100: \quad \varphi' = 0,60 \\ \lambda'' = 110: \quad \varphi'' = 0,52 \end{array} \right\} \quad \varphi = \varphi' - \frac{\varphi' - \varphi''}{\lambda'' - \lambda'} (\lambda - \lambda') =$$

$$= 0,6 - \frac{0,6 - 0,52}{10} (100,4 - 100) = 0,598,$$

получим допускаемые напряжения для материала стойки:

$$[\sigma]_y = [\sigma]_c \cdot \varphi = 160 \cdot 0,598 = 95,63 \text{ МПа}.$$

При этом недогрузка составит

$$\Delta\sigma\% = \left| \frac{[\sigma]_y - \sigma_x}{[\sigma]_y} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{95,63 - 96,6}{95,63} \right| \cdot 100\% = 4,37\%.$$

Задача П.1.3

Дано: $\ell = 4$ м; $a = 120$ мм, $P = 100$ кН; материал стойки – сосна (дерево); $[\sigma]_c = 10$ МПа.

Необходимо проверить на устойчивость основную стойку.

Проверочный расчет необходимо выполнить по единым нормам строительного проектирования с использованием коэффициента уменьшения основного допускаемого напряжения на сжатие φ . При этом проверочная формула будет выглядеть так:

$$\frac{P}{F} \leq \varphi \cdot [\sigma]_c,$$

где F – площадь поперечного сечения стойки.

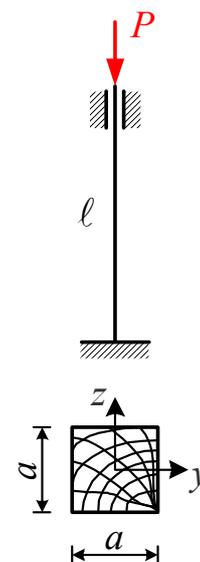


Рис. П.1.4

1. Коэффициент φ зависит от гибкости стержня λ . Вычислим гибкость стойки:

$$i_{\min} = i_y = i_z = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = \sqrt{\frac{a^4}{12 \cdot a^2}} = \frac{a}{\sqrt{12}} = \frac{12}{\sqrt{12}} = \sqrt{12} = 3,46 \text{ см};$$

$$\lambda = \frac{\nu \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 4}{3,46 \cdot 10^{-2}} = 58,8.$$

2. По справочной табл. П.4.2 определяем коэффициент φ для заданной стойки, используя линейную интерполяцию его значений в заданных интервалах:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda' = 50: \quad \varphi' = 0,80 \\ \lambda'' = 60: \quad \varphi'' = 0,71 \end{array} \right\} \quad \varphi = \varphi' - \frac{\varphi' - \varphi''}{\lambda'' - \lambda'} (\lambda - \lambda') =$$

$$= 0,8 - \frac{0,8 - 0,71}{10} (58,8 - 50) = 0,720.$$

3. Получаем допускаемые напряжения для материала стойки

$$[\sigma]_y = [\sigma]_c \cdot \varphi = 10 \cdot 0,72 = 7,2 \text{ МПа}.$$

4. Определяем действительные напряжения в сечении стойки:

$$\sigma_x = \frac{P}{F} = \frac{P}{a^2} = \frac{100 \cdot 10^3}{0,12^2} = 6,95 \cdot 10^6 \text{ Па} = 6,95 \text{ МПа}.$$

5. Сравниваем напряжения: $\sigma_x < [\sigma]_c$. Стойка устойчива. Недогруженность стойки составляет

$$\Delta\sigma\% = \frac{[\sigma]_y - \sigma_x}{[\sigma]_y} \cdot 100\% = \frac{7,2 - 6,95}{7,2} \cdot 100\% = 3,47\%.$$

Задача П.1.4.

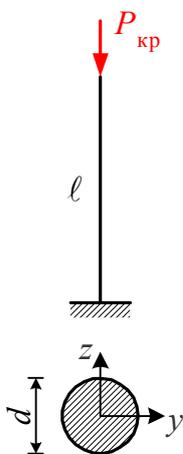


Рис. П.1.5

Дано: $\ell = 1$ м; $d = 4$ см, $E = 200$ ГПа; материал стойки – сталь Ст.3.

Необходимо определить критическую силу для данной стойки.

Для определения критической силы следует выяснить, какая у заданного стержня гибкость: малая, средняя или большая и с учетом этого воспользоваться соответствующей формулой для расчета (по напряжениям текучести, Ясинского или Эйлера).

1. Вычислим гибкость стойки λ :

$$J_{\min} = J_y = J_z; \quad i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{\pi \cdot d^4 \cdot 4}{64 \cdot \pi \cdot d^2}} = \frac{d}{4} = \frac{4}{4} = 1 \text{ см};$$

$$\lambda = \frac{\nu \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 10^{-2}} = 200.$$

2. По справочной табл. П.4.1 определяем для стали Ст.3 $\lambda_{\text{пред}} = 100$. Следовательно, стержень (стойка) большой гибкости и расчет критической силы необходимо проводить по формуле Эйлера.

3. Вычисляем величину критической силы:

$$P_{\text{кр}}^{\text{э}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{(\nu \cdot \ell)^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot \pi \cdot d^4}{64 \cdot (\nu \cdot \ell)^2} = \frac{\pi^3 \cdot E \cdot d^4}{64 \cdot (\nu \cdot \ell)^2} =$$

$$= \frac{\pi^3 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot (4 \cdot 10^{-2})^4}{64 \cdot (2 \cdot 1)^2} = 61,3 \cdot 10^3 \text{ Н} = 61,3 \text{ кН}.$$

Задача П.1.5.

Дано: $\ell = 6$ м. Стойка (рис. П.1.6) составлена из двух швеллеров №22 и двух листов 320×10 мм (рис. П.1.7). Материал стойки – сталь Ст.3 ($[\sigma]_c = 160$ МПа). Листы и швеллеры скреплены заклепками диаметром $d = 20$ мм.

Необходимо определить наибольшую допускаемую нагрузку для данной стойки.



Рис. П.1.6

1. По таблицам сортамента определяем геометрические характеристики швеллера № 22: $F^{\text{шв}} = 26,7 \text{ см}^2$; $J_y^{\text{шв}} = 2110 \text{ см}^4$; $J_z^{\text{шв}} = 151 \text{ см}^4$. Подсчитаем в сантиметрах эти же характеристики для всего составного сечения:

$$F = 2(F^{\text{шв}} + F^{\text{листа}}) = 2(26,7 + 32 \cdot 1) = 117,4 \text{ см}^2;$$

$$J_z = 2 \left[151 + 26,7 \cdot (16 - 8,2 + 2,21)^2 + \frac{1 \cdot 32^3}{12} \right] = 11110 \text{ см}^4;$$

$$J_y = 2 \left[2110 + \frac{32 \cdot 1^3}{12} + 32 \cdot 1 \cdot 11,5^2 \right] = 12690 \text{ см}^4.$$

Поскольку $J_z < J_y$, наименьший радиус инерции сечения стойки

$$i_{\min} = i_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}} = \sqrt{\frac{11110}{117,4}} = 9,73 \text{ см}.$$

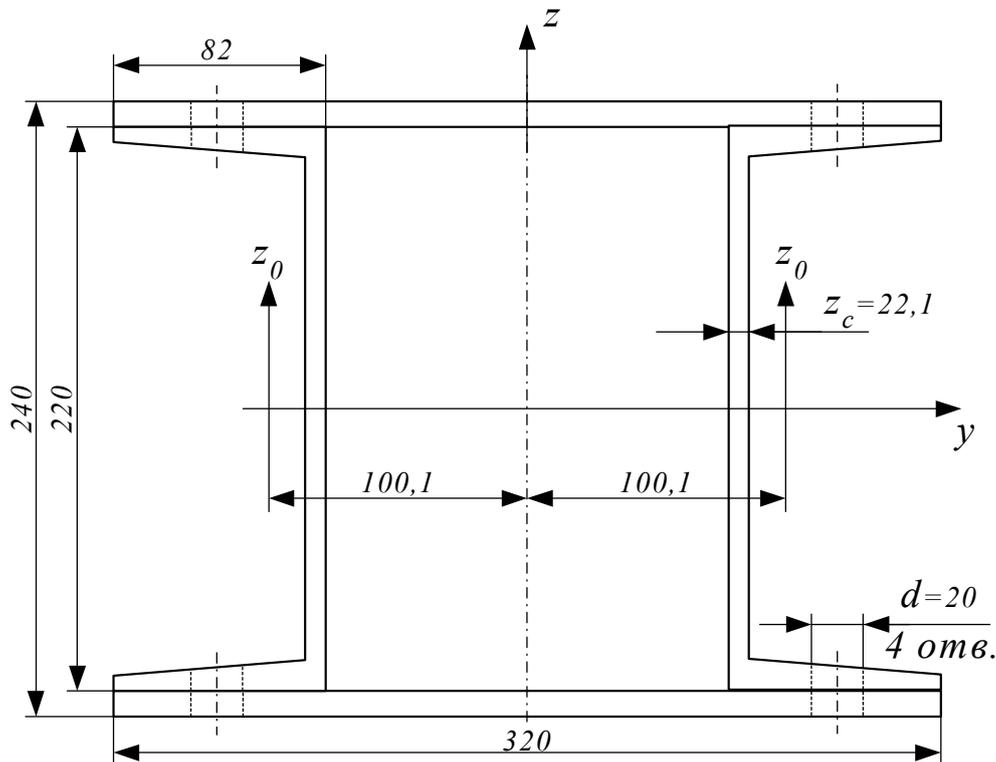


Рис. П.1.7

2. Определяем гибкость стойки: $\lambda = (\nu \cdot \ell) / i_{\min} = (1 \cdot 600) / 9,73 = 61,7$.

3. По справочной табл. П.4.2 вычисляем коэффициент φ для заданной стойки, используя линейную интерполяцию его значений в заданных интервалах:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda' = 60: \quad \varphi' = 0,86 \\ \lambda'' = 70: \quad \varphi'' = 0,81 \end{array} \right\} \quad \varphi = \varphi' - \frac{\varphi' - \varphi''}{\lambda'' - \lambda'} (\lambda - \lambda') =$$

$$= 0,86 - \frac{0,86 - 0,81}{10} (61,7 - 60) = 0,852.$$

4. Допускаемое усилие на стойку по условию устойчивости составит:

$$[P]_y = \varphi \cdot [\sigma]_c \cdot F = 0,852 \cdot 160 \cdot 10^6 \cdot 117,4 \cdot 10^{-4} = 1600 \cdot 10^3 \text{ Н} = 1600 \text{ кН}.$$

5. Ранее рассматривалось сечение стойки без учета наличия заклепок ($F = F_{\text{бр}}$), поэтому необходимо произвести расчет по условию прочности на сжатие для нетто-сечения ($F_{\text{н}}$), ослабленного четырьмя отверстиями под заклепки. Для определения $F_{\text{н}}$ воспользуемся таблицами сортамента, где толщина полки для швеллера № 22 равна 0,95 см:

$$F_{\text{н}} = F_{\text{бр}} - 4 \cdot d \cdot (t^{\text{листа}} + t^{\text{шв}}) = 117,4 - 4 \cdot 2 \cdot (1 + 0,95) = 101,8 \text{ см}^2.$$

Из условия прочности $\sigma_{\max} = \frac{P}{F_{\text{н}}} \leq [\sigma]_c$ следует, что

$$[P]_c = [\sigma]_c \cdot F_{\text{н}} = 160 \cdot 10^6 \cdot 101,8 \cdot 10^{-4} = 1629 \cdot 10^3 \text{ Н} = 1629 \text{ кН}.$$

6. Таким образом, поскольку $[P]_c > [P]_y$, допускаемое сжимающее усилие на стойку должно быть назначено по условию устойчивости $[P] = 1600 \text{ кН}$.

Задание «Проектировочный расчет продольно сжатых стержней по единым нормам строительного проектирования»

С использованием коэффициентов уменьшения основного допускаемого напряжения на сжатие φ определить: размеры поперечного сечения, действительный коэффициент запаса n_y и процент загрузки стержня $\Delta\sigma$ %. Принять коэффициент запаса по текучести $n_T = 2,0$.

Исходные данные содержатся в табл. П.2.1 – П.2.5.

Таблица П.2.1

Длина стержня

| Вариант | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|----------|-----|---|-----|-----|-----|-----|-----|
| Длина, м | 1,5 | 3 | 1,0 | 2,0 | 2,5 | 3,5 | 4,0 |

Таблица П.2.2

Материал стержня

| Вариант | 1 | 2 | 3 | 4 |
|----------|-------------|-------------|------------|------------------|
| Материал | Сталь Ст. 3 | Сталь Ст. 5 | Сталь 15ГС | Дюралюминий Д16Т |

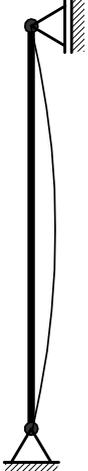
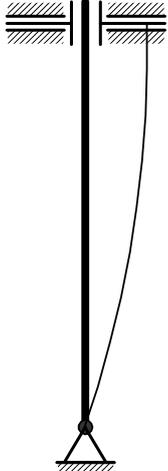
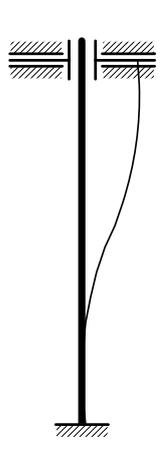
Таблица П.2.3

Сжимающая сила

| Вариант | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| P , кН | 100 | 400 | 150 | 200 | 300 | 350 | 200 |

Таблица П.2.4

Условия закрепления стержня

| Вариант | | | | | | |
|---|---|---|---|--|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Схемы закрепления стержня | | | | | | |
|  |  |  |  |  |  |  |
| Коэффициент учета закрепления опор | | | | | | |
| $\nu = 1$ | $\nu = 0,7$ | $\nu = 2$ | $\nu = 2$ | $\nu = 0,7$ | $\nu = 0,5$ | $\nu = 1$ |

Формы поперечных сечений

| Вариант | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---------------|------|----------------------------|---------|---------|---------|----------------------|
| Форма сечения | Круг | Кольцо $\alpha=d/D=0,8$ | Квадрат | Швеллер | Двутавр | Равнобокий уголок |

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

**Пример выполнения задания «Проектировочный расчет
продольно сжатых стержней
по единым нормам строительного проектирования»**



Рис. П.3.1

Дано: $l = 3$ м; $P = 200$ кН; материал стойки – сталь Ст3; $\sigma_T = 240$ МПа; $n_T = 1,5$; $E = 200$ ГПа.

Необходимо подобрать номер швеллера, определить действительный коэффициент запаса n_y и загруженность стойки (перегрузка или недогруженность, %).

Расчет необходимо выполнить по единым нормам строительного проектирования с использованием коэффициента уменьшения основного допускаемого напряжения на сжатие φ . При этом проектировочная формула будет выглядеть так:

$$\frac{P}{F_{бр}} \leq \varphi \cdot [\sigma]_c,$$

где $[\sigma]_c = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{240}{1,5} = 160$ МПа; $F_{бр}$ – площадь поперечного сечения стойки без учета местных ослаблений.

Так как коэффициент φ опосредовано через гибкость стержня λ зависит от геометрии ее сечения, то необходимо расчет производить циклически в несколько приближений, задавая в первом приближении $\varphi = 0,5 \dots 0,6$ и контролируя его сходимость в конце каждого цикла. Расчет останавливаем, когда расхождение между коэффициентами φ заданным и полученным в конце каждого цикла будет составлять около 5%. Для стандартных профилей эта цифра может оказаться больше.

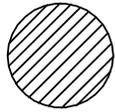
I приближение

1. Назначаем $\varphi^I = 0,5$.
2. Определяем требуемую площадь поперечного сечения стойки:

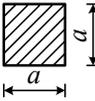
$$F_{бр}^I \geq \frac{P}{\varphi^I [\sigma]_c} = \frac{200 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 25 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 25 \text{ см}^2.$$

3. По сортаменту выбираем швеллер № 20а, у которого $F_1 = 25,2 \text{ см}^2$ и $i_{\min,1} = 2,35 \text{ см}$.

Замечание.: Если рассматривается простое сечение, то прежде всего необходимо выразить i_{\min} основной геометрический размер поперечного сечения через площадь сечения, а также установить зависимость i_{\min} от этого размера. Поступают следующим образом:

1) круг  диаметром $d = 2\sqrt{\frac{F_{\text{бпр}}}{\pi}} \rightarrow i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{\pi \cdot d^4 \cdot 4}{64 \cdot \pi \cdot d^2}} = \frac{d}{4}$;

2) кольцо  $\alpha = \frac{d}{D}$, $F_{\text{бпр}} = \frac{\pi \cdot D^2}{4} (1 - \alpha^2) \rightarrow D = 2\sqrt{\frac{F_{\text{бпр}}}{\pi \cdot (1 - \alpha^2)}} \rightarrow$
 $i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{\pi \cdot D^4 \cdot (1 - \alpha^4) \cdot 4}{64 \cdot \pi \cdot D^2 \cdot (1 - \alpha^2)}} = \frac{D}{4} \sqrt{1 + \alpha^2}$;

3) квадрат  $a = \sqrt{F_{\text{бпр}}} \rightarrow i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{a^4}{12 \cdot a^2}} = \frac{a}{2 \cdot \sqrt{3}}$.

4. Определяем гибкость полученной стойки: $\lambda_1 = \frac{\nu \cdot \ell}{i_{\min,1}} = \frac{0,7 \cdot 3}{2,35 \cdot 10^{-2}} = 89,36$.

5. По справочной табл. П.4.2 вычисляем действительный коэффициент φ_1 для стойки из швеллера №20а, используя линейную интерполяцию его значений в заданных интервалах:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda' = 80: \quad \varphi' = 0,75 \\ \lambda'' = 90: \quad \varphi'' = 0,69 \end{array} \right\} \quad \varphi_1 = \varphi' - \frac{\varphi' - \varphi''}{\lambda'' - \lambda'} (\lambda_1 - \lambda') =$$

$$0,75 - \frac{0,75 - 0,69}{10} (89,36 - 80) = 0,694.$$

6. Проверяем сходимость значений коэффициентов φ (назначенного и полученного) $\Delta\varphi\% = \left| \frac{\varphi_1 - \varphi^I}{\varphi_1} \right| \cdot 100\% = \frac{0,694 - 0,5}{0,694} \cdot 100\% = 27,95\% > 5\%$, поэтому расчет продолжаем.

II приближение

1. Усредняем значение коэффициента уменьшения основного допускаемого напряжения на сжатие: $\varphi^{\text{II}} = \frac{\varphi^I + \varphi_1}{2} = \frac{0,5 + 0,694}{2} = 0,597$.

2. Определяем новую требуемую площадь поперечного сечения:

$$F_{\text{бр}}^{\text{II}} \geq \frac{P}{\varphi^{\text{II}}[\sigma]_c} = \frac{200 \cdot 10^3}{0,597 \cdot 160 \cdot 10^6} = 20,93 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 20,93 \text{ см}^2.$$

3. По сортаменту выбираем швеллер №18, у которого $F_2 = 20,7 \text{ см}^2$ и $i_{\text{min},2} = 2,04 \text{ см}$.

Замечание. Так как площадь поперечного сечения стандартных профилей меняется скачкообразно, то при выборе номера профиля допускается брать ближайший меньший по размеру площади сечения.

4. Рассчитываем гибкость полученной стойки: $\lambda_2 = \frac{\nu \cdot \ell}{i_{\text{min},2}} = \frac{0,7 \cdot 3}{2,04 \cdot 10^{-2}} = 103$.

5. По справочной табл. П.4.2 определяем действительный коэффициент φ_2 для стойки из швеллера №18, используя линейную интерполяцию его значений в заданных интервалах:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda' = 100: \quad \varphi' = 0,60 \\ \lambda'' = 110: \quad \varphi'' = 0,52 \end{array} \right\} \varphi_2 = \varphi' - \frac{\varphi' - \varphi''}{\lambda'' - \lambda'} (\lambda_1 - \lambda') =$$

$$0,6 - \frac{0,6 - 0,52}{10} (103 - 100) = 0,576.$$

6. Проверяем сходимость значений коэффициентов φ назначенного и полученного: $\Delta\varphi\% = \left| \frac{\varphi_2 - \varphi^{\text{II}}}{\varphi_2} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{0,576 - 0,597}{0,576} \right| \cdot 100\% = 3,65\% < 5\%$.

Расчет в цикле останавливаем.

Замечание. Если условие сходимости коэффициента φ не выполняется, то расчет в представленном цикле продолжают.

7. Определяем действительный коэффициент запаса $n_y = \frac{P_{\text{кр}}}{P}$, где $P_{\text{кр}}$ рассчитывают с учетом окончательной гибкости стойки исходя из диаграммы устойчивости. Так как $\lambda_{\text{пред}} = 100$ для стали Ст.3, то при $\lambda_2 = 103$ мы находимся в зоне Эйлера и для определения $P_{\text{кр}}$ воспользуемся формулой Эйлера:

$$n_y = \frac{P_{\text{кр}}^3}{P} = \frac{\pi^2 E J_{\text{min}}}{(\nu \ell)^2 \cdot P} = \frac{\pi^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 86 \cdot 10^{-8}}{(0,7 \cdot 3) \cdot 200 \cdot 10^3} = 1,925,$$

где $J_{\text{min}} = 86 \text{ см}^4$ для швеллера №18.

8. Определяем процент загруженности полученной стойки. Сначала определяем действительные напряжения в сечении стойки, изготовленной из швеллера № 18:

$$\sigma_x = \frac{P}{F_2} = \frac{200 \cdot 10^3}{20,7 \cdot 10^{-4}} = 96,6 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

а затем – допускаемые напряжения для материала полученной стойки:

$$[\sigma]_y = [\sigma]_c \cdot \varphi_2 = 160 \cdot 0,576 = 92,16 \text{ МПа}.$$

При этом перегрузка составит

$$\Delta\sigma\% = \left| \frac{[\sigma]_y - \sigma_x}{[\sigma]_y} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{92,16 - 96,6}{92,16} \right| \cdot 100\% = 4,32\%.$$

Примечание. Если в начале проделанных расчетов (I приближение) гибкость стержня превышает 200 единиц, то следует вдвое уменьшить величину назначаемого коэффициента φ (если 400 единиц – вчетверо, и т.д.).

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Справочные данные для различных материалов

Таблица П.4.1

Механические характеристики материалов для расчета на устойчивость

| Материал | σ_T | $\sigma_{\text{Щ}}$ | a | b | $\lambda_{\text{ПРЕД}}$ | λ_0 |
|---|------------|---------------------|------|-------|-------------------------|-------------|
| | МПа | | | | | |
| Сталь Ст2 | 220 | 190 | 264 | 0,7 | 105 | 62 |
| Сталь Ст3 | 240 | 200 | 310 | 1,14 | 100 | 61 |
| Сталь 20, Ст4 | 260 | 220 | 328 | 1,11 | 96 | 60 |
| Сталь 25, Ст5, 35Л | 280 | 240 | 350 | 1,15 | 92 | 57 |
| Сталь 35, 45Л | 320 | 270 | 398 | 1,43 | 90 | 55 |
| Сталь 45 | 360 | 305 | 449 | 1,67 | 85 | 52 |
| Сталь 50, 55Л | 380 | 320 | 473 | 1,87 | 82 | 50 |
| Сталь 14ХГС, 15ГС, 14Г2, 10Г2СД, 15ХСНД | 350 | 300 | 429 | 1,52 | 83 | 50 |
| Сталь 30ХМА, 35МФА, 30ХГСА, 40ХНМА | 850 | 700 | 1000 | 5,57 | 55 | 28 |
| Дюралюминий Д16Т | 320 | 255 | 406 | 2,83 | 53 | 30 |
| Дюралюминий Д6Т | 280 | 220 | 300 | 1,43 | 57 | 15 |
| Сосна, ель | - | - | 29,3 | 0,194 | 70 | - |

Таблица П.4.2

Значения коэффициента уменьшения основного допускаемого напряжения на сжатие (φ)

| Гибкость λ | Сталь марок | | | Чугун марок | | Дюралюминий Д16Т | Дерево (сосна, ель) |
|-----------------------|-------------|------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------|---------------------|------------------------|
| | Ст3, Ст4 | Ст5 | 14Г2, 15ГС, 10ГС2С, 10Г2СД, 15ХСНД | СЧ12-28, СЧ15-32, СЧ18-36, СЧ21-40 | СЧ24-44, СЧ28-48 | | |
| 0 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 |
| 10 | 0,99 | 0,98 | 0,98 | 0,97 | 0,95 | 0,999 | 0,99 |
| 20 | 0,97 | 0,96 | 0,95 | 0,91 | 0,87 | 0,998 | 0,97 |
| 30 | 0,95 | 0,93 | 0,92 | 0,81 | 0,75 | 0,835 | 0,93 |
| 40 | 0,92 | 0,90 | 0,89 | 0,69 | 0,60 | 0,700 | 0,87 |
| 50 | 0,89 | 0,85 | 0,84 | 0,57 | 0,43 | 0,568 | 0,80 |
| 60 | 0,85 | 0,80 | 0,78 | 0,44 | 0,32 | 0,455 | 0,71 |
| 70 | 0,81 | 0,74 | 0,71 | 0,34 | 0,23 | 0,353 | 0,61 |
| 80 | 0,75 | 0,67 | 0,63 | 0,26 | 0,18 | 0,269 | 0,49 |
| 90 | 0,69 | 0,59 | 0,54 | 0,20 | 0,14 | 0,212 | 0,38 |
| 100 | 0,60 | 0,50 | 0,46 | 0,16 | 0,12 | 0,172 | 0,31 |
| 110 | 0,52 | 0,43 | 0,39 | - | - | 0,142 | 0,25 |
| 120 | 0,45 | 0,37 | 0,33 | - | - | 0,119 | 0,22 |
| 130 | 0,40 | 0,32 | 0,29 | - | - | 0,101 | 0,18 |
| 140 | 0,36 | 0,28 | 0,25 | - | - | 0,087 | 0,16 |
| 150 | 0,32 | 0,25 | 0,23 | - | - | 0,075 | 0,14 |
| 160 | 0,29 | 0,23 | 0,21 | - | - | - | 0,12 |
| 170 | 0,26 | 0,21 | 0,19 | - | - | - | 0,11 |
| 180 | 0,23 | 0,19 | 0,17 | - | - | - | 0,10 |
| 190 | 0,21 | 0,17 | 0,15 | - | - | - | 0,09 |
| 200 | 0,19 | 0,15 | 0,13 | - | - | - | 0,08 |
| 210 | 0,17 | 0,14 | 0,12 | - | - | - | - |
| 220 | 0,16 | 0,13 | 0,11 | - | - | - | - |

Библиографический список

1. Алфатов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем / Н. А. Алфатов. – М: Машиностроение, 1978. – 312 с.
2. Барданов Ю. М., Расчет сжатых стержней на устойчивость / Ю. М. Барданов, М. А. Вильга, Н. Ф. Какосимиди. – Одесса: Одес. политех. ин-т, 1979. – 94 с.
3. Сопротивление материалов: учеб. под ред. акад. АН УССР Г. С. Писаренко – 5-е изд. – К.: Вища шк., 1986. – 775 с.
4. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем / С. П. Тимошенко. – М.-Л.: Гостехиздат, 1946. – 532 с.
5. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М.: Изд-во МГТУ, 2000. – 591 с.

Содержание

| | |
|--|----|
| Введение | 3 |
| 1. Понятие о продольном изгибе | 3 |
| 2. Формула Эйлера | 4 |
| 3. Уравнение изогнутой оси стержня | 5 |
| 4. Влияние условий закрепления концов стержня на величину критической силы | 6 |
| 5. Критическое напряжение. Гибкость | 8 |
| 6. Пределы применимости формулы Эйлера | 9 |
| 7. Формула Ясинского | 10 |
| 8. Условие устойчивости сжатых стержней | 11 |
| 9. Несущая способность элементов конструкции крыла | 12 |
| 10. Расчеты сжатых стержней на устойчивость (Условие устойчивости. Проверочный и проектировочный расчет) | 14 |
| 11. О выборе материала и рациональной формы поперечного сечения сжатых стержней | 15 |
| 12. Продольно-поперечный изгиб | 16 |
| 13. Приближенный способ расчета на прочность и жесткость при продольно-поперечном изгибе | 17 |
| 14. Определение допускаемой нагрузки при продольно-поперечном изгибе | 20 |
| 15. Энергетический метод определения критической силы | 21 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Примеры расчета на устойчивость | 24 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Задание. «Проектировочный расчет продольно сжатых стержней по единым нормам строительного проектирования» | 35 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Пример выполнения задания «Проектировочный расчет продольно сжатых стержней по единым нормам строительного проектирования» | 36 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Справочные данные для различных материалов | 39 |
| Библиографический список | 41 |

Дибир Александр Геннадиевич
Макаров Олег Владимирович
Пекельный Николай Иванович

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОДОЛЬНО СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Редактор Л. В. Ескевич

Св. план, 2008

Подписано в печать

Формат 60×84 1/16. Бум офс. № 2. Офс. печ.

Усл. печ. л. 2,5. Уч.-изд. л. 2,50. Т. 100 экз. Заказ Цена свободная

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского
«Харьковский авиационный институт»
61070, Харьков-70, ул. Чкалова, 17
<http://www.khai.edu>

Издательский центр «ХАИ»
61070, Харьков-70, ул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu

