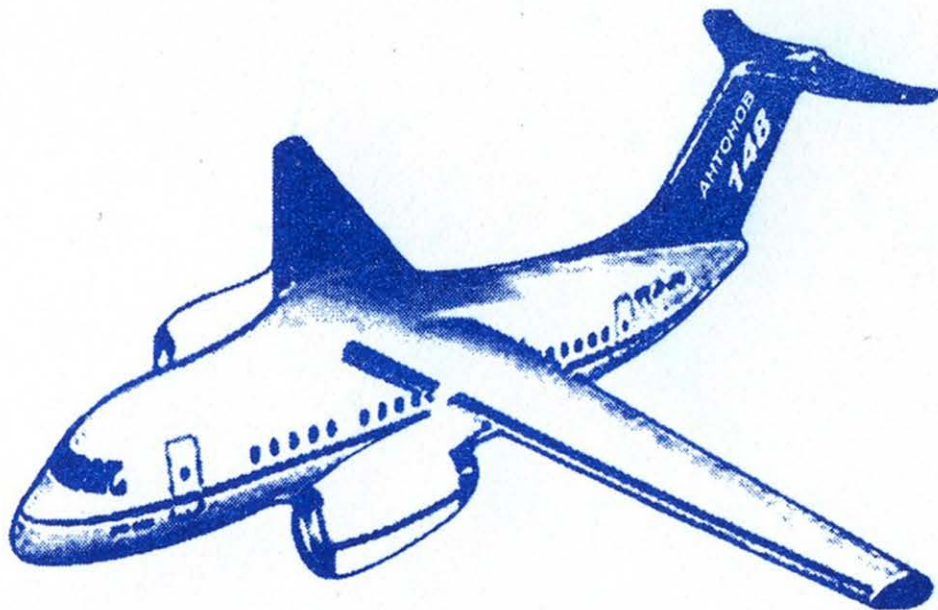




М. Н. Гребенников, Н. И. Пекельный

# ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ



2016

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского  
«Харьковский авиационный институт»

М. Н. Гребенников, Н. И. Пекельный

**ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ.  
СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ**

Учебное пособие

Харьков «ХАИ» 2016

УДК 539.3/6 (075.8)

ББК 30.121я73

Г79

Розглянуто основні теорії міцності. Викладено методику розрахунку на міцність елементів конструкцій, що знаходяться в складному напруженому стані. Описано окремі випадки складного опору – позацентрове розтягнення-стиснення і косий згин. Наведено таблиці довідкових даних, приклади розв'язання задач і рекомендації до виконання домашнього завдання з даної теми.

Для студентів, які вивчають курси «Опір матеріалів» і «Механіка матеріалів і конструкцій» при самостійній роботі.

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. С. А. Бычков,  
канд. техн. наук, доц. Е. Т. Василевский

**Гребенников, М. Н.**

Г79 Теории прочности. Сложное сопротивление [Текст]: учеб. пособие / М. Н. Гребенников, Н. И. Пекельный. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «Харьк. авиац. ин-т», 2016. – 140 с.

ISBN 978-966-662-503-1

Рассмотрены основные теории прочности. Изложена методика расчета на прочность элементов конструкций, находящихся в сложном напряженном состоянии. Описаны частные случаи сложного сопротивления – внецентренное растяжение-сжатие и косой изгиб. Приведены таблицы справочных данных, примеры решения задач и рекомендации к выполнению домашнего задания по данной теме.

Для студентов, изучающих курсы «Сопротивление материалов» и «Механика материалов и конструкций» при самостоятельной работе.

Ил. 128. Табл. 9. Библиогр.: 8 назв.

**УДК 539.3/6 (075.8)**

**ББК 30.121я73**

© Гребенников М. Н., Пекельный Н. И., 2016

© Национальный аэрокосмический  
университет им. Н. Е. Жуковского

ISBN 978-966-662-503-1

«Харьковский авиационный институт», 2016

## Основные обозначения

- $\alpha, \beta, \gamma$  – угол, числовой коэффициент;  
 $\varepsilon$  – относительная деформация;  
 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  – относительные деформации в системе главных осей;  
 $\mu$  – коэффициент Пуассона;  
 $\sigma$  – нормальное напряжение;  
 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – главные напряжения;  
 $[\sigma]$  – допускаемое нормальное напряжение;  
 $\sigma_B$  – предел прочности;  
 $\sigma_T$  – предел текучести;  
 $\sigma_{\text{ЭКВ}}$  – эквивалентные напряжения;  
 $\tau$  – касательное напряжение;  
 $[\tau]$  – допускаемое касательное напряжение;  
 $a, b, c, d, l$  – длины участков, пролетов;  
 $a$  – длина стороны квадрата;  
 $b, h$  – ширина и высота прямоугольника;  
 $d$  – диаметр;  
 $E$  – модуль продольной упругости;  
 $F$  – площадь поперечного сечения;  
 $I_\rho$  – полярный момент инерции поперечного сечения;  
 $I_y, I_z$  – осевые моменты инерции поперечного сечения;  
 $I_{yz}$  – центробежный момент инерции поперечного сечения;  
 $i_y, i_z$  – радиусы инерции поперечного сечения;  
 $n$  – коэффициент запаса;  
 $M$  – сосредоточенный момент;  
 $M_x, M_k$  – крутящий момент;  
 $M_y, M_z$  – изгибающие моменты относительно осей  $y$  и  $z$ ;  
 $N_x$  – продольная сила;  
 $P$  – сосредоточенная сила;  
 $Q_y, Q_z$  – поперечные силы;  
 $q$  – распределенная нагрузка;  
 $R$  – реакция;  
 $U$  – энергия деформации;  
 $V$  – объем;  
 $W_\rho$  – полярный момент сопротивления сечения;  
 $W_y, W_z$  – момент сопротивления поперечного сечения;  
 $x, y, z$  – прямоугольные координаты.

# 1. ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

## 1.1. Постановка вопроса и основные определения

### 1.1.1. Понятие о предельном напряженном состоянии

Важнейшей задачей инженерного расчета является оценка прочности конструктивного элемента по известному напряженному состоянию.

Напряженное состояние в точке полностью определяется:

- при линейном (одноосном) напряженном состоянии одним главным напряжением,
- при плоском (двуосном) – двумя,
- при объемном (трехосном) – тремя.

Если внешние нагрузки не превышают некоторой величины, зависящей от материала и вида напряженного состояния, то материал находится в упругом состоянии. При увеличении внешней нагрузки главные напряжения также будут возрастать, и при некотором определенном их значении могут обнаруживаться заметные остаточные деформации или местные трещины. Такое напряженное состояние называется *предельным*.

Таким образом, под *предельным* понимают такое *сложное напряженное состояние*, при котором происходит следующее:

- а) в пластичном материале начинают развиваться остаточные (пластические) деформации;
- б) в хрупком материале начинается разрушение.

### 1.1.2. Необходимость создания теорий прочности и их назначение

Если известно предельное напряженное состояние, то расчет на прочность сводится к *определению напряженного состояния в опасной точке* (или всех потенциально опасных точках) исследуемого тела и *сравнению его с предельным*.

В случае *простого напряженного состояния* (линейного) определить *предельное напряженное состояние* экспериментально достаточно просто – испытанием на растяжение или сжатие. В качестве предельного значения принимают:

- предел текучести пластичного материала ( $\sigma_{пред} = \sigma_T$ );
- предел прочности хрупкого материала ( $\sigma_{пред} = \sigma_B$ ).

В этих случаях коэффициенты запаса прочности

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma}; \quad n_B = \frac{\sigma_B}{\sigma},$$

где  $\sigma$  – напряжение, действующее в опасной точке.

При **сложном напряженном состоянии** (плоском и объемном) практически невозможно провести испытания **для всех возможных соотношений** между  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ , поскольку:

- 1) число возможных соотношений между компонентами сложного напряженного состояния бесконечно, поэтому и количество опытов по определению предельных состояний, соответствующих этим комбинациям главных напряжений, бесконечно;
- 2) для многих видов сложного напряженного состояния технически трудно, а иногда невозможно реализовать эксперимент по определению предельного напряженного состояния, т.е. техника проведения эксперимента в настоящее время не располагает возможностями реализации испытаний для большинства видов сложного напряженного состояния.

Такие испытания, требующие использования исключительно сложной техники как нагружающей образец, так и регистрирующей его поведение при нагружении, в настоящее время проведены в научно-исследовательских лабораториях для очень ограниченного числа видов сложного напряженного состояния.

Трактовка (расшифровка) результатов таких экспериментов весьма затруднена и часто противоречива, так как при проведении этих испытаний практически не удается выполнить важнейшее требование к таким экспериментам – **обеспечить однородность напряженно-деформированного состояния базы образца**.

Поэтому и возникает необходимость создания **теорий прочности (гипотез прочности, теорий предельного состояния)**, т.е. общих методов расчета на прочность при любом виде сложного напряженного состояния, на основе механических характеристик материалов, полученных в результате проведения ограниченного количества простейших механических испытаний.

**Теории прочности** предназначены для выполнения расчетов на прочность при **сложном напряженном состоянии**.

### 1.1.3. Понятие о равноопасных (равнопрочных) напряженных состояниях

Теории прочности основаны на предположении о том, что два напряженных состояния считаются равнопрочными, если они при пропорциональном увеличении главных напряжений одновременно становятся предельными. Тогда коэффициент запаса прочности для обоих напряженных состояний будет одинаковым.

Два напряженных состояния называются *равноопасными (равнопрочными)*, если они имеют *одинаковый запас прочности*.

*Коэффициентом запаса* прочности называется число, показывающее, во сколько раз следует *одновременно* увеличить все компоненты сложного напряженного состояния, чтобы оно стало предельным.

**Рассмотрим пример.** Пусть для двух одинаковых элементов из одного и того же материала реализованы линейное напряженное состояние для первого и сложное напряженное состояние для второго (рис. 1.1).

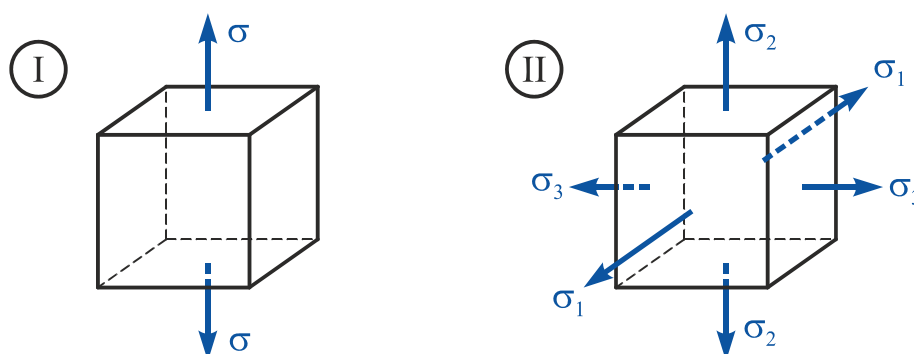


Рис. 1.1

Допустим, что элемент **I** начал пластически деформироваться (или разрушаться, если он хрупкий) при  $\sigma = 280 \text{ МПа}$ .

Это значение  $\sigma$  и следует считать *предельным* при линейном (одноосном) напряженном состоянии:

$$\sigma_{\text{пред}} = 280 \text{ МПа}.$$

Элемент **II** начал пластически деформироваться (или хрупко разрушаться) при

$$\sigma_1 = 170 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = 110 \text{ МПа}; \quad \sigma_3 = 60 \text{ МПа}.$$

Эту *комбинацию напряжений* и следует считать *предельным напряженным состоянием* для заданного соотношения между  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , т.е.

$$\sigma_{1 \text{ пред}} = 170 \text{ МПа}; \quad \sigma_{2 \text{ пред}} = 110 \text{ МПа}; \quad \sigma_{3 \text{ пред}} = 60 \text{ МПа}.$$

Допустим, что для элементов **I** и **II** необходимо обеспечить *одинаковый запас прочности* с коэффициентом запаса  $n = 2$ .

Тогда линейное растяжение при

$$\sigma = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{n} = \frac{280}{2} = 140 \text{ МПа}$$

и объемное напряженное состояние при

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{1 \text{ пред}}}{n} = \frac{170}{2} = 85 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{2 \text{ пред}}}{n} = \frac{110}{2} = 55 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_{3 \text{ пред}}}{n} = \frac{60}{2} = 30 \text{ МПа}$$

являются *равноопасными*, или *равнопрочными*.

### 1.1.4. Понятие об эквивалентном напряжении

Сравнение напряженных состояний для заданного материала можно выполнять по эквивалентным напряжениям  $\sigma_{\text{ЭКВ}}$ .

**Эквивалентное напряжение** ( $\sigma_{\text{ЭКВ}}$ ) – такое напряжение, которое следует создать в *растянутом образце* (т.е. при линейном (одноосном) напряженном состоянии), чтобы его напряженное состояние было *равноопасно заданному сложному напряженному состоянию* (т.е. имело одинаковый коэффициент запаса).

Задача и назначение всех теорий прочности – связать эквивалентные напряжения в двух равнопрочных состояниях определенной зависимостью, основанной на анализе причин разрушения или перехода в предельное состояние материала, т.е. определить вид функции

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3). \quad (1.1)$$

Таким образом, с помощью теорий прочности осуществляется переход от сложного напряженного состояния к равноопасному линейному, т.е. определяется эквивалентное напряжение, которое и сравнивают с результатами простейших механических испытаний, делая таким образом вывод об уровне исчерпания прочности при сложном напряженном состоянии.



## 1.2. Основные теории прочности

Все теории (критерии, гипотезы) прочности можно разделить на два вида:

а) теории, построенные на гипотезах, т.е. на логически обоснованных предположениях;

б) теории, основанные на феноменологическом подходе, т.е. базирующиеся на логической систематизации результатов экспериментальных исследований.

### 1.2.1. Теория наибольших нормальных напряжений (первая теория прочности)

По исторической традиции теорию (гипотезу) наибольших нормальных напряжений называют первой теорией прочности. Она была сформулирована в 1638 г. Г. Галилеем<sup>1</sup>. Сторонниками этой теории были Г. Лейбниц, Г. Ляме, А. Клебш, М. Ренкин. В англо-американской литературе она носит название теории Ренкина.

Эта теория базируется на следующем предположении (гипотезе):

прочность элемента, находящегося в сложном напряженном состоянии считается исчерпанной (т.е. наступает его предельное напряженное состояние), если величина **наибольшего из главных напряжений** достигнет **предельного значения**, определенного из опытов на простое растяжение или сжатие.

Таким образом, условие исчерпания прочности имеет вид

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = \sigma_{пред\ p} \quad \text{или} \quad \sigma_{max} = |\sigma_3| = \sigma_{пред\ c}, \quad (1.2)$$

где  $\sigma_{пред\ p}$  и  $\sigma_{пред\ c}$  – предельные напряжения, определенные по результатам испытаний на растяжение и сжатие соответственно.

Условие обеспечения прочности с запасом  $n$  имеет вид

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^I = \sigma_1 \leq [\sigma]_p \quad \text{или} \quad \sigma_{\text{ЭКВ}}^I = |\sigma_3| \leq [\sigma]_c, \quad (1.3)$$

---

<sup>1</sup> **Галилéo Галилэй** (итал. *Galileo Galilei*; 15 февраля 1564, Пиза – 8 января 1642, Арчетри) – итальянский физик, механик, астроном, философ и математик, оказавший значительное влияние на науку своего времени. Он первым использовал телескоп для наблюдения небесных тел и сделал ряд выдающихся астрономических открытий. Галилей – основатель экспериментальной физики, заложил фундамент классической механики.

где  $[\sigma]_p = \frac{\sigma_{пред\ p}}{n}$  и  $[\sigma]_c = \frac{\sigma_{пред\ c}}{n}$  – допускаемые напряжения на растяжение и сжатие соответственно.

Как показала экспериментальная проверка, эта теория прочности:

- а) не отражает условий перехода материала в пластическое состояние, т.е. не может быть использована для расчета на прочность деталей из пластичных материалов;
- б) позволяет получить удовлетворительные результаты для хрупких материалов (кварца, скальных пород, керамики, инструментальных сталей и т.д.) при очень ограниченном числе видов напряженного состояния.

В настоящее время применяется редко.

### 1.2.2. Теория наибольших линейных деформаций (вторая теория прочности)

Теория наибольших линейных деформаций предложена Э. Мариоттом<sup>2</sup> в 1682 г. Сторонниками этой теории были Л. Навье и В. Сен-Венан.

Она основана на следующей гипотезе:

прочность элемента, находящегося в сложном напряженном состоянии, считается исчерпанной (т.е. наступает его предельное напряженное состояние), если **величина наибольшего относительного удлинения** этого элемента достигнет **предельного значения**, определенного из опытов на простое растяжение или сжатие.

Таким образом, исчерпание прочности наступит при выполнении условия

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_1 = \varepsilon_{пред\ p} \quad \text{или} \quad \varepsilon_{max} = |\varepsilon_3| = |\varepsilon_{пред\ c}|, \quad (1.4)$$

где  $\varepsilon_{пред\ p}$  и  $\varepsilon_{пред\ c}$  – величины наибольших относительных удлинений, определенные по результатам испытаний на растяжение и сжатие соответственно.

---

<sup>2</sup> Эдм Мариотт (фр. *Edme Mariotte*; 1620, Дижон (Бургундия) – 12 мая 1684, Париж) – французский физик XVII века, один из основателей (1666 г.) и первых членов Парижской академии наук. Научные работы относятся к механике, теплоте, оптике. Был настоятелем монастыря Святого Мартина близ Дижона.

В соответствии с обобщенным законом Гука при сложном напряженном состоянии

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)].$$

При линейном напряженном состоянии

$$\varepsilon_{\text{пред } p} = \frac{\sigma_{\text{пред } p}}{E}; \quad \varepsilon_{\text{пред } c} = \frac{\sigma_{\text{пред } c}}{E}.$$

Это дает возможность переписать уравнение предельного состояния (1.4) в напряжениях:

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_{\text{пред } p}; \quad \sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2) = \sigma_{\text{пред } c}. \quad (1.5)$$

Прочность с запасом  $n$  будет обеспечена при условии

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = \frac{\sigma_{\text{пред } p}}{n} = [\sigma]_p; \quad \sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{\sigma_{\text{пред } c}}{n} = [\sigma]_c.$$

Тогда условие прочности по второй теории прочности окончательно будет иметь вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{II}} &= \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]_p; \\ \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{II}} &= \sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2) \leq [\sigma]_c, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где  $[\sigma]_p = \frac{\sigma_{\text{пред } p}}{n}$  и  $[\sigma]_c = \frac{\sigma_{\text{пред } c}}{n}$  – допускаемые напряжения на растяжение и сжатие соответственно.

Экспериментальная проверка этой теории прочности привела к результатам, аналогичным данным проверки первой теории прочности.

Таким образом, первая и вторая теории прочности представляют скорее исторический, чем практический интерес.

### 1.2.3. Теория наибольших касательных напряжений (третья теория прочности)

Теория наибольших касательных напряжений предложена Ш. Кулоном<sup>3</sup> в 1773 г. Этой теории посвящены работы Дж. Геста, А. Треска, И. Баушингера.

---

<sup>3</sup> **Шарль Огюстен де Кулон** (фр. *Charles-Augustin de Coulomb*, 14 июня 1736 – 23 августа 1806) – французский военный инженер и учёный-физик, исследователь электромагнитных и механических явлений; член Парижской Академии наук.

Она основана на следующей гипотезе:

прочность элемента, находящегося в сложном напряженном состоянии, считается исчерпанной (т.е. наступает его предельное напряженное состояние), если величина **наибольшего касательного напряжения** достигает **предельного значения**, определенного из опытов на простое растяжение.

Следовательно, условие исчерпания прочности имеет вид

$$\tau_{max} = \tau_{пред}. \quad (1.7)$$

При сложном напряженном состоянии (рис. 1.2, а)

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

При линейном напряженном состоянии (рис. 1.2, б)

$$\sigma_3 = 0 \quad \text{и} \quad \tau_{max} = \frac{\sigma_1}{2},$$

следовательно,

$$\tau_{пред} = \frac{\sigma_{пред}}{2}.$$

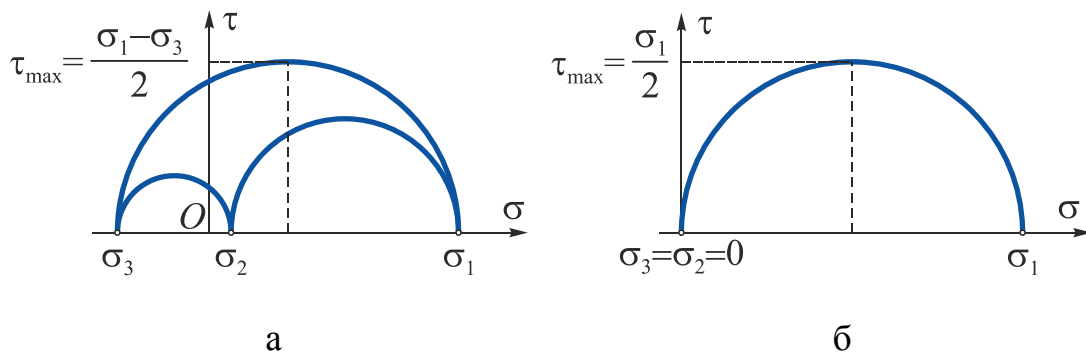


Рис. 1.2

Это дает возможность представить условие исчерпания прочности (1.7) в главных напряжениях:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{пред}.$$

Прочность с запасом  $n$  будет обеспечена при условии

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\sigma_{пред}}{n} = [\sigma].$$

Условие прочности по этой теории прочности приобретает вид

$$\sigma_{экв}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma], \quad (1.8)$$

где  $[\sigma] = \frac{\sigma_{пред}}{n}$  – допускаемое напряжение.

Эта теория прочности подтверждается опытом как теория перехода материала в пластическое состояние, т.е. по существу является теорией пластичности и широко используется для расчета на прочность деталей из пластичных материалов, т.е. материалов, которые одинаково сопротивляются растяжению и сжатию.

Недостатком третьей теории прочности является то, что в ней не учитывается среднее по величине главное напряжение  $\sigma_2$ , которое, как показывают эксперименты, также оказывает, хотя и незначительное, влияние на прочность материалов (расхождение результатов теоретических расчетов и опытных данных достигает 10-15 %).

#### **1.2.4. Энергетическая теория прочности (четвертая теория прочности, гипотеза энергии формоизменения)**

В 1885 г. итальянский математик Бельтрами предположил, что удельная потенциальная энергия деформации ( $U_0$ ) ответственна за исчерпание прочности. Однако опыты не подтвердили этого предположения.

Поэтому в 1904 г. М. Т. Губером<sup>4</sup> было предложено разделить  $U_0$  на две части: удельную потенциальную энергию изменения объема ( $U_{0об}$ ) и удельную потенциальную энергию изменения формы ( $U_{0ф}$ ). Он сделал предположение, что только энергия формоизменения ответственна за исчерпание прочности.

Дальнейшее развитие эта теория предельного состояния получила в работах Р. Э. Мизеса<sup>5</sup> (1913 г.), Г. Генки (1925 г.).

Четвертая теория прочности чаще всего называется критерием Мизеса.

Она основана на следующей гипотезе:

прочность элемента, находящегося в сложном напряженном состоянии, считается исчерпанной (т. е. наступает предельное напряженное состояние), если **удельная потенциальная энергия его формоизменения достигла предельного значения**, определенного из опытов на простое растяжение.

---

<sup>4</sup> **Максимилиан Титус Губер** (польск. *Maksymilian Tytus Huber*, 4 января 1872 – 9 декабря 1950) – польский ученый в области теоретической и прикладной механики, основатель польской школы механики.

<sup>5</sup> **Рихард Эдлер фон Мизес** (нем. *Richard Edler von Mises*, 19 апреля 1883, Лемберг, Австро-Венгрия (ныне Львов, Украина) – 14 июля 1953, Бостон, США) – математик и механик австрийского происхождения; работы посвящены аэродинамике, прикладной механике, механике жидкостей, аэронавтике, статистике и теории вероятностей.

Таким образом, условие исчерпания прочности имеет вид

$$U_{0\phi} = U_{0\phi \text{ пред}}, \quad (1.9)$$

где  $U_{0\phi}$  – удельная потенциальная энергия, затраченная на изменение формы элемента при достижении заданного сложного напряженного состояния;

$U_{0\phi \text{ пред}}$  – предельное значение удельной потенциальной энергии формоизменения, определенное из опыта на простое растяжение, т.е. при линейном напряженном состоянии.

### Определение потенциальной энергии деформации элементарного объема

В идеальном упругом материале потенциальная энергия, накопленная в элементарном объеме при его деформировании, численно равна сумме работ сил, приложенных к граням этого объема.

В каждом из координатных направлений на грани бесконечно малого объема  $dV = dxdydz$  (рис. 1.3) действуют нормальные усилия:

$$dP_1 = \sigma_1 dydz;$$

$$dP_2 = \sigma_2 dxdz;$$

$$dP_3 = \sigma_3 dxdy.$$

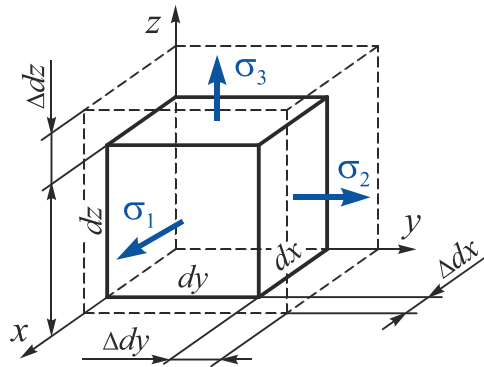


Рис. 1.3

Приложение этих усилий приводит к развитию главных деформаций:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta dx}{dx}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\Delta dy}{dy}; \quad \varepsilon_3 = \frac{\Delta dz}{dz}. \quad (1.10)$$

Тогда перемещения точек приложения усилий:

$$\Delta dx = \varepsilon_1 dx; \quad \Delta dy = \varepsilon_2 dy; \quad \Delta dz = \varepsilon_3 dz.$$

В силу справедливости закона Гука (прямо пропорциональная зависимость между усилиями и перемещениями) суммарная работа этих элементарных сил на соответствующих перемещениях  $\Delta dx$ ,  $\Delta dy$ ,  $\Delta dz$  может быть определена по формуле

$$dA = dU = \frac{1}{2}(\sigma_1 dydz)\Delta dx + \frac{1}{2}(\sigma_2 dxdz)\Delta dy + \frac{1}{2}(\sigma_3 dydx)\Delta dz. \quad (1.11)$$

Здесь  $dU$  – элементарная потенциальная энергия упругой деформации, накопленная в элементарном объеме  $dV$ .

Введем понятие удельной потенциальной энергии упругой деформации, т.е. энергии, накопленной в единичном объеме:

$$\frac{dU}{dV} = \frac{dU}{dxdydz} = U_0.$$

Разделив левую и правую части уравнения (1.11) на  $dV$ , получим

$$U_0 = \frac{1}{2} \left( \sigma_1 \frac{\Delta dx}{dx} + \sigma_2 \frac{\Delta dy}{dy} + \sigma_3 \frac{\Delta dz}{dz} \right) \quad (1.12)$$

или с учетом выражений (1.10)

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3). \quad (1.13)$$

Подставим в (1.13) значения  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  из обобщенного закона Гука:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{cases}$$

и после несложных преобразований получим

$$U_0 = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)]. \quad (1.14)$$

Накопленная упругим телом потенциальная энергия расходуется на изменение его формы и объема. Представим удельную потенциальную энергию  $U_0$  в виде суммы удельной потенциальной энергии изменения объема и удельной потенциальной энергии изменения формы:

$$U_0 = U_{0об} + U_{0ф}, \quad (1.15)$$

где  $U_{0ф}$  – удельная потенциальная энергия, затраченная на изменение формы;

$U_{0об}$  – удельная потенциальная энергия, затраченная на изменение объема.

Используя принцип суперпозиции, преобразуем исходное напряженное состояние (рис. 1.4) и разделим  $U_0$  на два слагаемых в соответствии с выражением (1.15).

Из рис. 1.4 видно, что

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= P + \sigma'_1 \\ \sigma_2 &= P + \sigma'_2 \\ \sigma_3 &= P + \sigma'_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \sigma'_1 &= \sigma_1 - P \\ \sigma'_2 &= \sigma_2 - P \\ \sigma'_3 &= \sigma_3 - P \end{aligned} \right\}. \quad (1.16)$$

Из этого следует, что первое слагаемое фактически определяет *только изменение объема*, т.е. описывает деформацию всестороннего растяжения. Второе слагаемое дополняет это напряженное состояние до заданного.

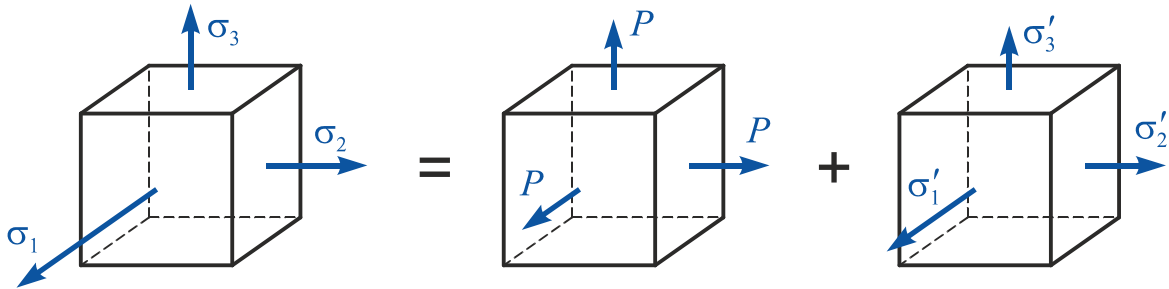


Рис. 1.4

Найдем величины напряжений  $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$  из условия, что эта часть напряженного состояния не участвует в изменении объема, т.е.

$$\varepsilon_V = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3) = 0.$$

Так как  $\frac{1 - 2\mu}{E} \neq 0$ , то  $\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 = 0$ .

Подставив в это выражение значения  $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$  из формулы (1.16), получим

$$P = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}, \quad (1.17)$$

где  $P$  – среднее нормальное напряжение в точке.

Таким образом, величину  $P$  всегда можно определить однозначно и так, что во втором напряженном состоянии не произойдет изменения объема.

Поскольку при таком разделении исходного напряженного состояния взаимные работы отсутствуют, то такое деление справедливо.

Определим удельную потенциальную энергию, затраченную на изменение объема  $U_{0об}$ .

Для этого подставим в (1.14) значение  $P$  вместо  $\sigma_1, \sigma_2$  и  $\sigma_3$ . В результате получим



$$U_{0_{об}} = \frac{1}{2E} (3P^2 - 2\mu 3P^2) = \frac{1-2\mu}{2E} 3P^2. \quad (1.18)$$

Подставим в это выражение значение  $P$  из (1.17). Получим окончательно

$$U_{0_{об}} = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \quad (1.19)$$

Вычтя из  $U_0$  (1.14) значение  $U_{0_{об}}$  (1.19), после выполнения преобразований получим

$$U_{0_{\phi}} = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (1.20)$$

При линейном напряженном состоянии это соотношение примет вид

$$U_{0_{\phi \text{ пред}}} = \frac{1+\mu}{6E} \cdot 2\sigma_{\text{пред}}^2. \quad (1.21)$$

Подставив значение  $U_{0_{\phi}}$  из уравнения (1.20) и  $U_{0_{\phi \text{ пред}}}$  из выражения (1.21) в условие исчерпания прочности (1.9), получим

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_{\text{пред}}^2,$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_{\text{пред}}.$$

Прочность с запасом  $n$  будет обеспечена при условии

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{n} = [\sigma].$$

Условие прочности окончательно примет вид

$$\sigma_{\text{экв}}^{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq [\sigma], \quad (1.22)$$

где  $[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{n}$  – допускаемое напряжение.

Четвертая теория прочности, как и третья, хорошо подтверждается экспериментально как теория перехода материала в пластическое состояние и наряду с третьей теорией прочности широко используется для расчета на прочность деталей из пластичных материалов.

Появление малых пластических деформаций в материале по четвертой теории прочности определяется более точно, чем по третьей.

### 1.2.5. Теория прочности Мора<sup>6</sup> (пятая теория прочности)

Теория Мора в отличие от изложенных выше теорий базируется не на гипотезах, а строится на основе логической систематизации результатов экспериментальных исследований.

Основным допущением при построении этой теории является предположение о том, что исчерпание прочности определяется только величинами  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  и не зависит от величины  $\sigma_2$ , что достаточно хорошо подтверждается экспериментом.

Зависимость между прочностными свойствами материала и видом напряженного состояния выведена и обоснована с помощью кругов Мора.

Предположим, что у нас есть возможность испытать образцы из какого-либо материала при любом виде сложного напряженного состояния. Выберем напряженное состояние с фиксированным соотношением между  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  и, пропорционально увеличивая эти компоненты напряженного состояния, доведем образец до разрушения или до перехода в пластическое состояние. Это напряженное состояние и будет предельным. Вычертим на плоскости  $\sigma$ ,  $\tau$  наибольший из трех кругов Мора. Далее проведем аналогичное испытание образцов из того же материала при других соотношениях между  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ . Каждому такому соотношению будет соответствовать свой предельный круг Мора. Далее построим огибающую всех предельных кругов Мора. Эта огибающая фактически является **механической характеристикой материала при сложном напряженном состоянии**, равно как при линейном напряженном состоянии основными прочностными механическими характеристиками являются предел текучести  $\sigma_T$  или предел прочности  $\sigma_B$ , определяемые испытанием на растяжение или сжатие (рис. 1.5).

Если огибающая предельных кругов Мора для некоторого материала получена экспериментально, то для выяснения является ли напряженное состояние, характеризующееся главными напряжениями  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ , предельным и для оценки прочности материала следует построить круг напряжений для  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  в

---

<sup>6</sup> **Кристиан Отто Мор** (нем. *Christian Otto Mohr*; 8 октября 1835, Вессельбурен – 2 октября 1918, Дрезден) – немецкий инженер и учёный в области теоретической механики и сопротивления материалов. Учился в Ганноверской политехнической школе. С 1855 года работал над сооружением железных дорог и мостов в Ганновере и Ольденбурге. С 1867 года профессор сначала в Штутгарте, затем в Дрездене. Занимался проблемами сопротивления материалов и, в частности, их графическим представлением. В 1882 году разработал графический метод анализа напряжений, известный под названием «круг Мора».

опасной точке. Прочность будет обеспечена, если он целиком лежит внутри области огибающей. Для нахождения коэффициента запаса следует определить, во сколько раз необходимо одновременно увеличить  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ , чтобы наибольший круг Мора коснулся предельной огибающей. Число, показывающее, во сколько раз увеличены значения  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ , и будет равно коэффициенту запаса прочности.

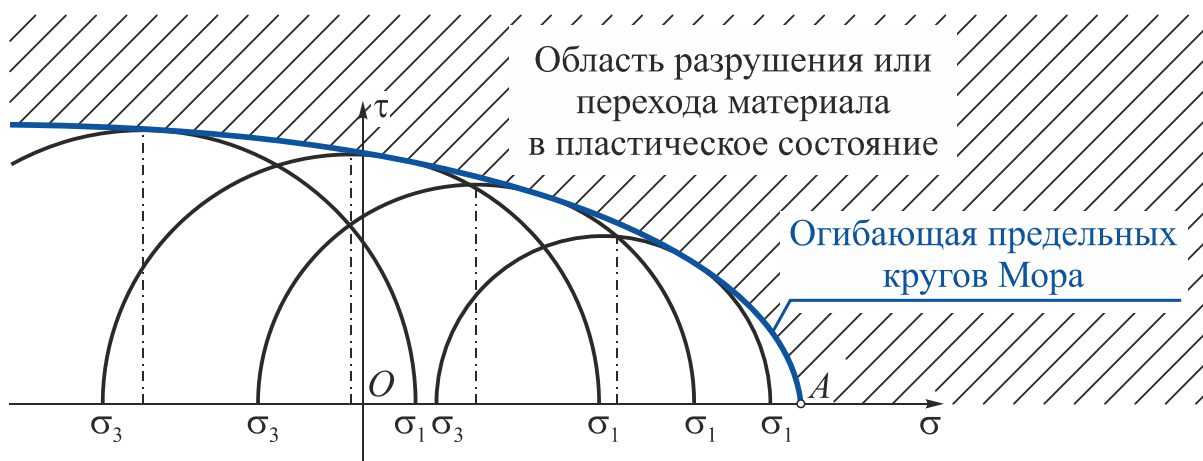


Рис. 1.5

Для построения действительной огибающей предельных кругов Мора потребовалось бы опытным путем исследовать всевозможные напряженные состояния. Это неосуществимая задача, поэтому возникает вопрос, как построить огибающую предельных кругов Мора при ограниченном числе достаточно простых испытаний, техническая реализация которых возможна. Три таких предельных круга могут быть построены достаточно просто (рис. 1.6):

- 1-й круг – испытанием на простое растяжение;
- 2-й круг – испытанием на простое сжатие;
- 3-й круг – испытанием на кручение тонкостенной трубки, при котором во всех точках испытуемого образца (трубки) реализуется чистый сдвиг.

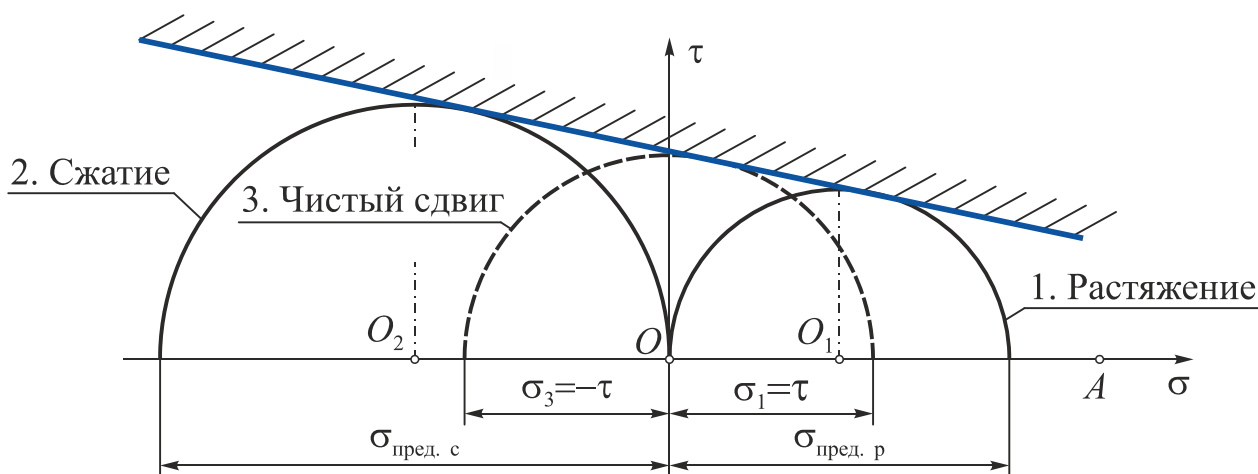


Рис. 1.6

Для пластичных материалов (см. рис. 1.6)

$$\sigma_{\text{пред.р}} = |\sigma_{\text{пред.с}}| = \sigma_{\text{Т.р}} = \sigma_{\text{Т.с}};$$

для хрупких материалов

$$\sigma_{\text{пред.р}} = \sigma_{\text{в.р}}; \quad \sigma_{\text{пред.с}} = \sigma_{\text{в.с}}.$$

Точка *A* характеризует на круговой диаграмме состояние всестороннего равноосного растяжения.

Для получения соотношений, которые можно было бы использовать при проведении практических расчетов на прочность, огибающую предельных кругов Мора аппроксимируют касательной к круговым диаграммам растяжения и сжатия. Этот вариант аппроксимации позволяет получить достаточно точные результаты, если центр круговой диаграммы напряжений лежит между точками  $O_1$  (центром круга чистого растяжения) и  $O_2$  (центром круга чистого сжатия) (рис. 1.7),

где  $\sigma_{\text{пред.р}}$  и  $\sigma_{\text{пред.с}}$  – предельные напряжения, полученные по результатам испытаний на чистое растяжение и чистое сжатие соответственно. При выводе будем использовать абсолютное значение  $\sigma_{\text{пред.с}}$ ;

$\sigma_1$  и  $\sigma_3$  – главные напряжения сложного напряженного состояния, круг Мора при которых становится предельным.

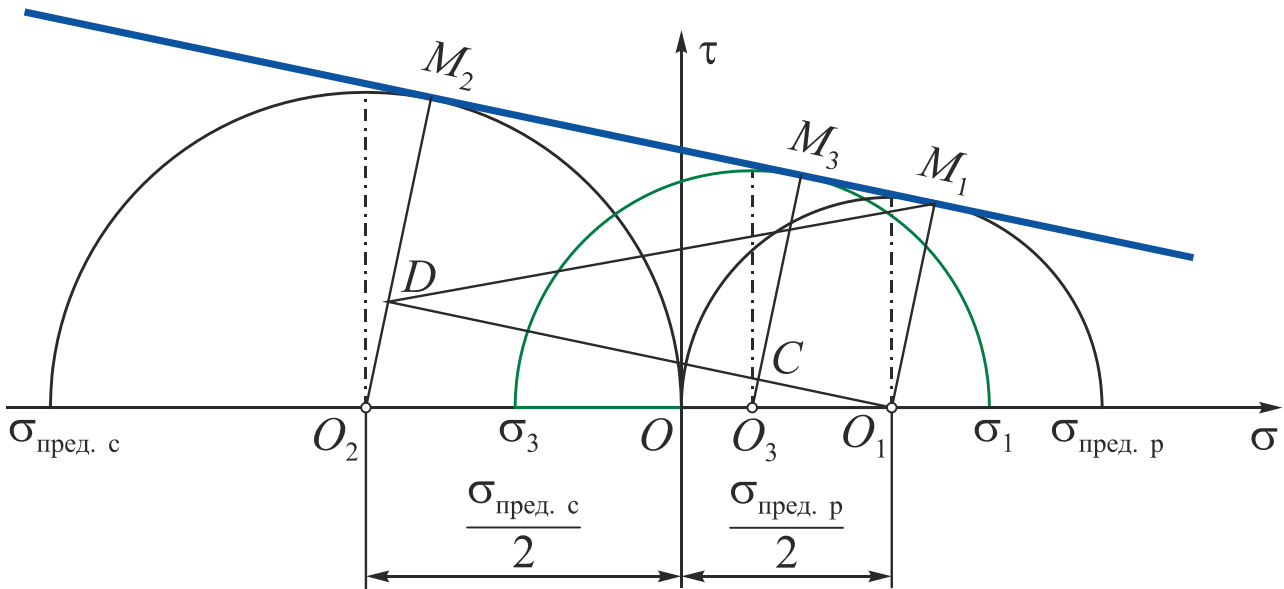


Рис. 1.7

Из геометрических соотношений получим условие прочности для промежуточного напряженного состояния с главными напряжениями  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  и предельным кругом Мора в точке  $O_3$  (рис. 1.7).

Проведем прямые  $O_1M_1$ ,  $O_2M_2$ ,  $O_3M_3$ , соединяющие центры предельных кругов Мора и точки их касания с предельной прямой, а также прямую  $OD$ , параллельную  $M_1M_2$ . Так как треугольники  $O_1O_3C$  и  $O_1O_2D$  подобны, то

$$\frac{O_3C}{O_2D} = \frac{O_1O_3}{O_1O_2},$$

где

$$O_3C = O_3M_3 - O_1M_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_{\text{пред п}}}{2};$$

$$O_2D = O_2M_2 - O_1M_1 = \frac{\sigma_{\text{пред с}}}{2} - \frac{\sigma_{\text{пред п}}}{2};$$

$$O_1O_3 = OO_1 - OO_3 = \frac{\sigma_{\text{пред п}}}{2} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2};$$

$$O_1O_2 = OO_1 + OO_2 = \frac{\sigma_{\text{пред п}}}{2} + \frac{\sigma_{\text{пред с}}}{2}.$$

Тогда

$$\frac{(\sigma_1 - \sigma_3) - \sigma_{\text{пред п}}}{\sigma_{\text{пред с}} - \sigma_{\text{пред п}}} = \frac{\sigma_{\text{пред п}} - (\sigma_1 + \sigma_3)}{\sigma_{\text{пред п}} + \sigma_{\text{пред с}}}.$$

Разделим числитель и знаменатель последнего выражения на  $\sigma_{\text{пред с}}$  и, введя обозначение

$$k = \frac{\sigma_{\text{пред п}}}{\sigma_{\text{пред с}}}, \quad (1.23)$$

получим

$$\frac{\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{\sigma_{\text{пред с}}} - k}{1 - k} = \frac{k - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{\sigma_{\text{пред с}}}}{1 + k}.$$

Преобразуем это равенство к виду

$$\sigma_1 - k\sigma_3 = k\sigma_{\text{пред с}}.$$

Окончательно с учетом выражения (1.23) получим условие исчерпания прочности (запас прочности равен единице)

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^M = \sigma_1 - k\sigma_3 = \sigma_{\text{пред п}}.$$

Прочность с запасом  $n$  будет обеспечена при условии

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^M = \sigma_1 - k\sigma_3 \leq [\sigma] \quad (1.24)$$

или

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^M = \sigma_1 - \frac{\sigma_{\text{пред п}}}{\sigma_{\text{пред с}}} \sigma_3 \leq [\sigma], \quad (1.25)$$

где  $[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{n}$  – допускаемое напряжение;  
 $k = \sigma_{\text{Tp}}/\sigma_{\text{Tc}}$  – для пластичных материалов;  
 $k = \sigma_{\text{Bp}}/\sigma_{\text{Bc}}$  – для хрупких материалов.

Для пластичных материалов в силу

$$\sigma_{\text{предp}} = \sigma_{\text{Tp}} = \sigma_{\text{предc}} = \sigma_{\text{Tc}}$$

это соотношение вырождается в условие прочности по теории наибольших касательных напряжений (третья теория прочности).

Теорию прочности Мора можно считать основной теорией, которую рекомендуется использовать при расчете деталей из хрупких и хрупко-пластичных материалов, т.е. материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию ( $[\sigma]_p \neq [\sigma]_c$ ).

В настоящее время область применения теории прочности Мора ограничена потому, что практически отсутствуют экспериментальные данные в области всестороннего растяжения (при  $\sigma_1 > 0$  и  $\sigma_3 > 0$ ) и в области всестороннего сжатия (при  $\sigma_1 < 0$  и  $\sigma_3 < 0$ ). Однако такого вида напряженные состояния встречаются достаточно редко. Теория прочности Мора позволяет получить наилучшие результаты для смешанных напряженных состояний (при  $\sigma_1 > 0$  и  $\sigma_3 < 0$ ).

### 1.2.6. Условие прочности по третьей и четвертой теориям прочности при плоском напряженном состоянии частного вида

Рассмотрим плоское напряженное состояние частного вида.

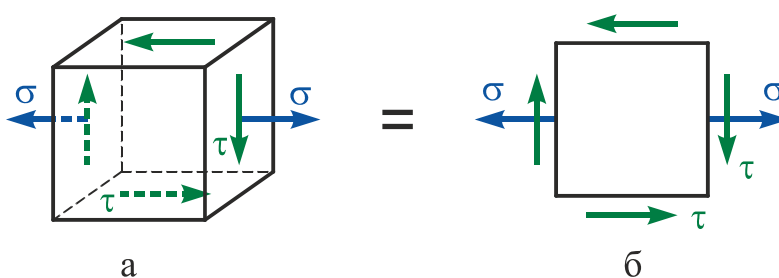


Рис. 1.8

Этот вид плоского напряженного состояния наиболее часто реализуется в опасных точках деталей типа брус при совместном изгибе с кручением, а также при деформации «плоский поперечный изгиб». На рис. 1.8 показаны два варианта этого вида плоского напряженного состояния. В расчетной практике чаще всего используется более простой вариант (рис. 1.8, б). Напряжения на рис. 1.8 показаны без индексов, так как конкретные задачи можно рассматривать в самых различных системах координат.

Главные напряжения для этого вида плоского напряженного состояния определяют из соотношений

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}; \\ \sigma_2 &= 0; \\ \sigma_3 &= \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.\end{aligned}\tag{1.26}$$

Индексы главным напряжениям присвоены таким образом потому, что независимо от знака  $\sigma$

$$\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} < 0$$

при любом отличном от нуля значении  $\tau$ .

Рассмотрим условия прочности:

**а) по третьей теории прочности**

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

Подставив в это выражение значения  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  из уравнения (1.26), получим

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} - \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Таким образом, окончательно

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma];\tag{1.27}$$

**б) по четвертой теории прочности** при  $\sigma_2 = 0$  соотношение (1.22) примет вид

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3} \leq [\sigma].$$

Подставив в это выражение значения  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  из уравнения (1.26), получим

$$\begin{aligned}&\sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + 2\frac{\sigma}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} + \frac{1}{4}(\sigma^2 + 4\tau^2) +} \\ &+ \frac{\sigma^2}{4} - 2\frac{\sigma}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} + \frac{1}{4}(\sigma^2 + 4\tau^2) - \left(\frac{\sigma^2}{4} - \frac{1}{4}(\sigma^2 + 4\tau^2)\right) = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}.\end{aligned}$$

Таким образом, окончательно

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].\tag{1.28}$$

**Замечание**

Соотношения (1.27) и (1.28) в зависимости от того, какая из теорий прочности принята в качестве рабочей, позволяют провести проверку прочности в характерных точках поперечного сечения балки при поперечном изгибе.

### 1.3. Примеры решения задач

#### Пример 1.1

Сравнить эквивалентные напряжения для напряженных состояний, приведенных на рис. 1.9 а, б. Эквивалентные напряжения вычислить по четвертой (энергетической) теории прочности. Значения напряжений указаны в МПа.

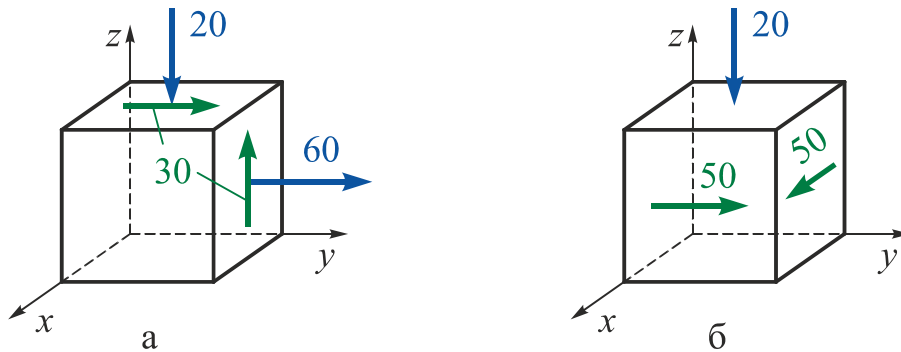


Рис. 1.9

#### Решение

Определим главные напряжения для первого варианта:

$$\sigma_{1,2,(3)} = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2} = \frac{60 - 20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{60 + 20}{2}\right)^2 + 30^2} = 20 \pm 50;$$

$$\sigma_1 = 70 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -30 \text{ МПа}.$$

Эквивалентное напряжение по четвертой теории прочности

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ЭКВ}}^{IV} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(70 - 0)^2 + (0 - (-30))^2 + (-30 - 70)^2} = 88,9 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Определим главные напряжения для второго варианта:

$$\sigma_{\text{max, min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{0 - 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0 + 0}{2}\right)^2 + 50^2} = 0 \pm 50;$$

$$\sigma_1 = 50 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = -20 \text{ МПа}; \quad \sigma_3 = -50 \text{ МПа}.$$

Эквивалентное напряжение по четвертой теории прочности

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ЭКВ}}^{IV} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(50 + 20)^2 + (-20 - (-50))^2 + (-50 - 50)^2} = 88,9 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Таким образом, заданные напряженные состояния равноопасны.



## Пример 1.2

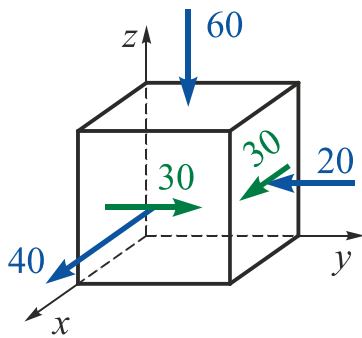


Рис. 1.10

В опасном сечении детали, выполненной из серого чугуна СЧ20 ( $\sigma_{B_p} = 200$  МПа;  $\sigma_{B_c} = 750$  МПа;  $\mu = 0,25$ ), выделен элемент, по граням которого действуют напряжения (в МПа), как показано на рис. 1.10. Необходимо проверить прочность элемента.

## Решение

Обозначим напряжения, показанные на рис. 1.9, согласно координатной системе  $xuz$ :

$$\sigma_x = 40 \text{ МПа}; \quad \sigma_y = -20 \text{ МПа}; \quad \sigma_z = -60 \text{ МПа};$$

$$\tau_{yx} = 30 \text{ МПа}; \quad \tau_{xy} = -30 \text{ МПа}.$$

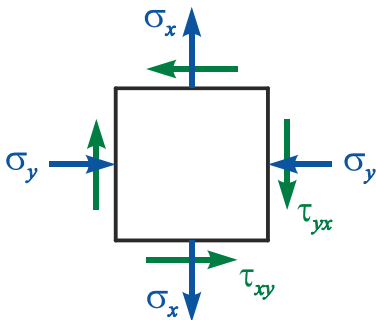


Рис. 1.11

Площадка, нормаль к которой параллельна оси  $z$ , – главная, поскольку касательные напряжения на ней отсутствуют.

Покажем напряженное состояние на двух других площадках в плоскости  $xOy$  (рис. 1.11).

Определим главные напряжения:

$$\sigma_{max, min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{40 - 20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{40 - (-20)}{2}\right)^2 + 30^2};$$

$$\sigma_{max} = 10 + 31,46 = 41,46 \text{ МПа}; \quad \sigma_{min} = 10 - 31,46 = -21,46 \text{ МПа}.$$

Присвоим индексы главным напряжениям в соответствии с условием  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ :

$$\sigma_1 = 41,46 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = -21,46 \text{ МПа}; \quad \sigma_3 = -60 \text{ МПа}.$$

Проверим результаты расчета с использованием свойства инвариантности нормальных напряжений:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = const;$$

$$40 - 20 - 60 = 41,46 - 21,46 - 60 = -40.$$

Проверим прочность элемента. Назначим допускаемые напряжения, выбрав коэффициент запаса прочности  $[n] = 3$ , рекомендуемый для хрупких материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию:

$$[\sigma]_p = \frac{\sigma_{B_p}}{n} = \frac{200}{3} = 66,67 \text{ МПа}; \quad [\sigma]_c = \frac{\sigma_{B_c}}{n} = \frac{750}{3} = 250 \text{ МПа}.$$

Согласно *первой теории прочности*

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^I = \sigma_1 = 41,46 \text{ МПа} \leq [\sigma]_p = 66,67 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^I = |\sigma_3| = 60 \text{ МПа} \leq [\sigma]_c = 250 \text{ МПа}.$$

Прочность обеспечена.

Согласно *второй теории прочности*

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{II}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]_p;$$

$$41,46 - 0,25(-21,46 - 60) = 61,825 \text{ МПа} \leq 66,67 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{II}} = \sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2) \leq [\sigma]_c;$$

$$|-60 - 0,25(41,46 - 21,46)| = 65 \text{ МПа} \leq 250 \text{ МПа}.$$

Прочность обеспечена.

Согласно *третьей теории прочности*

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 41,46 - (-60) = 100,46 \text{ МПа} \geq [\sigma]_p = 66,67 \text{ МПа}.$$

Прочность недостаточна.

Согласно *четвертой теории прочности*

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq [\sigma]_p;$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(41,46 - (-21,46))^2 + (-21,46 - (-60))^2 + (-60 - 41,46)^2} = \\ = 102,2 \text{ МПа} \geq [\sigma]_p = 66,67 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Прочность недостаточна.

Согласно *теории прочности Мора*

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{M}} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{B_p}}{\sigma_{B_c}} \sigma_3 = 41,46 - \frac{200}{750} (-60) = 51,46 \text{ МПа} \leq [\sigma]_p = 66,67 \text{ МПа}.$$

Прочность обеспечена.

В примере рассмотрены варианты использования различных теорий прочности при выполнении проверочного расчета элемента из хрупкого материала. Использование третьей и четвертой теорий прочности, применяемых для пластичных материалов, привело к отрицательному результату.

## 2. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНО НАГРУЖЕННЫХ ЛОМАНЫХ БРУСЬЕВ

### 2.1. Эпюры и основные правила их построения

В поперечных сечениях элементов ломаного бруса могут действовать все шесть внутренних силовых факторов:  $N_x$ ,  $Q_z$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_z$ . Все правила построения эпюр в балках и плоских рамах применимы и при построении эпюр для ломаного бруса.

**Эпюры** (фр. *epure* – чертёж) – графики, показывающие изменение внутренних силовых факторов, действующих в поперечном сечении бруса, вдоль его продольной оси.

Графический способ представления функции отличается высокой наглядностью, т. е. дает возможность легко оценить все ее особенности. В курсе механики материалов и конструкций это означает возможность определить опасное сечение. В этом и состоит цель построения эпюр.

#### Основные правила построения эпюр

1. Ось эпюры проводят параллельно продольной оси бруса. Если ось бруса криволинейна (ломана), то криволинейна (ломана) и ось эпюры.
2. Значение внутреннего силового фактора, действующего в поперечном сечении бруса, **откладывают в масштабе по нормали к оси эпюры** в точке, соответствующей данному поперечному сечению.
3. В эпюрах должны быть указаны название внутреннего силового фактора, единицы его измерения, знаки, цифровые значения в характерных точках и нанесена штриховка перпендикулярно оси эпюры.

#### Правила разбиения конструкционного элемента на участки

1. В пределах одного участка остается неизменным закон прикладывания внешней нагрузки (в том числе и опорные реакции), т.е. границами участков являются сечения, в которых приложены сосредоточенные силы ( $P$ ) и сосредоточенные пары сил ( $M$ ), начинается или обрывается действие распределенной внешней нагрузки ( $q$ ).
2. В пределах участков не изменяется геометрия поперечного сечения, или границами участка являются сечения, в которых площадь меняется скачкообразно.

- Границами участков в раме и ломаном брусе являются узловые точки (точки излома).
- В пределах участка не изменяется материал, из которого изготовлен брус.

### Правила знаков при построении эпюр

#### 1. Продольная сила $N_x$

Внешняя сила, действующая по любую сторону от сечения  $n - n$ , дает положительный вклад в величину продольной силы  $N_x$ , если она вызывает растяжение (направлена от рассматриваемого сечения), и отрицательной, если вызывает сжатие (направлена к рассматриваемому сечению) (рис. 2.1).

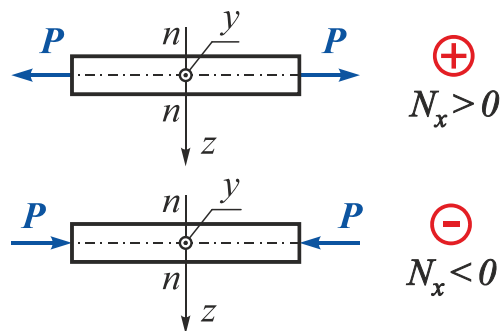


Рис. 2.1

#### 2. Крутящий момент $M_x$

При построении эпюр крутящих моментов пользуются произвольным правилом знаков. В дальнейшем будем применять следующее правило: крутящий момент внешних сил, действующий по любую сторону от сечения  $n - n$ , дает положительный вклад в величину крутящего момента  $M_x$ , если смотря со стороны внешней нормали на рассматриваемое сечение, видеть его направленным против часовой стрелки, и отрицательный – если по часовой стрелке (рис. 2.2).

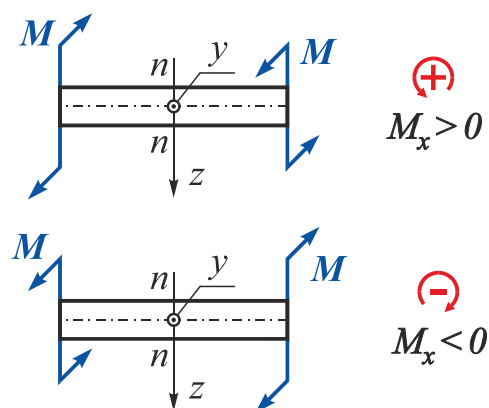


Рис. 2.2

#### 3. Поперечные силы $Q_z$ и $Q_y$

Внешняя сила, действующая по любую сторону от сечения  $n - n$ , дает положительный вклад в величину поперечной силы  $Q_z$  (или  $Q_y$ ), действующей в данном сечении, если пытаются повернуть рассматриваемую часть по часовой стрелке относительно главной центральной оси инерции сечения  $y$  (или  $z$ ) и отрицательный – если против часовой стрелки (рис. 2.3).

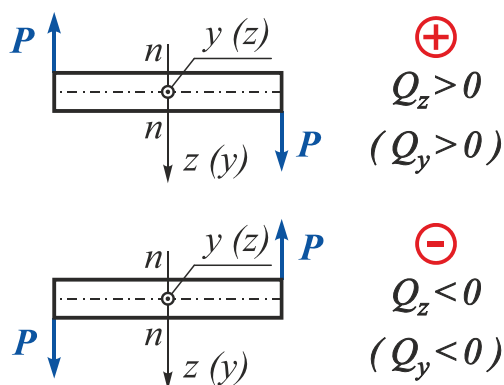


Рис. 2.3

#### 4. Изгибающие моменты $M_y$ и $M_z$

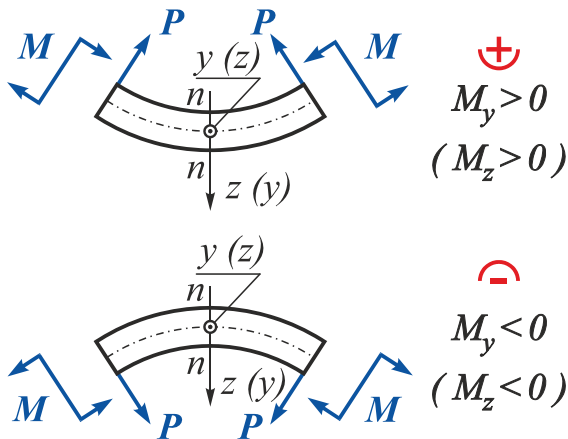


Рис. 2.4

Внешняя сила или сосредоточенный момент, действующие по любую сторону от сечения  $n - n$ , дает положительный вклад в величину изгибающего момента ( $M_y$  (или  $M_z$ )), действующего в данном сечении, если эта внешняя сила или сосредоточенный момент приводит к сжатию верхних и растяжению нижних слоев балки (вызывает изгиб выпуклостью вниз), и отрицательный, если приводит к растяжению верхних и сжатию нижних слоев балки (вызывает изгиб выпуклостью вверх) (рис. 2.4).

Эпюры  $M_y$  и  $M_z$  строят со стороны растянутых волокон бруса.

## 2.2. Построение эпюр внутренних силовых факторов для плоско-пространственного ломаного бруса

**Плоско-пространственным** называют ломаный брус, все элементы которого жестко соединены в узлах и расположены в одной плоскости, а внешние усилия действуют в произвольных направлениях.

При построении эпюр внешние силы представляют *в виде проекций* на принятые *координатные направления*.

В расчетной практике используют два метода решения задач по построению эпюр внутренних силовых факторов для ломаного бруса.

### 2.2.1 Первый метод построения эпюр

Суть данного метода: после определения внутренних силовых факторов на первом участке все внешние силовые факторы (сосредоточенные силы и моменты, распределенные нагрузки), действующие в пределах первого участка, приводят в соответствии с теоремами статики к начальному сечению второго участка. После определения внутренних силовых факторов на втором участке все внешние усилия, действующие в пределах второго участка, приводят к начальному сечению третьего участка и т.д. При таком подходе каждый участок ломаного бруса рассматривают как консоль.

### Пример 2.1

Построить эпюры внутренних силовых факторов для заданного ломаного бруса (рис. 2.5).

**Дано:**  $P_1 = 15 \text{ кН}$ ;  $P_2 = 20 \text{ кН}$ ;  $P_3 = 10 \text{ кН}$ ;  
 $a = 2 \text{ м}$ ;  $b = 3 \text{ м}$ ;  $c = 4 \text{ м}$ .

**Необходимо** построить эпюры

$$N_x, Q_z, Q_y, M_x, M_y, M_z.$$

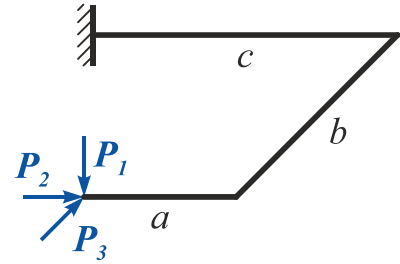


Рис. 2.5

### Решение

1. Начертим ломаный брус в масштабе и разобьем его на участки I, II, III.

В произвольном сечении каждого участка на расстоянии  $x$  от его начала расположим систему координат  $xuz$  так, чтобы ось  $x$  совпала с продольной осью бруса, ось  $z$  была направлена вниз, а горизонтальная ось  $y$  составила бы с двумя первыми правый ортогональный базис (рис. 2.6).

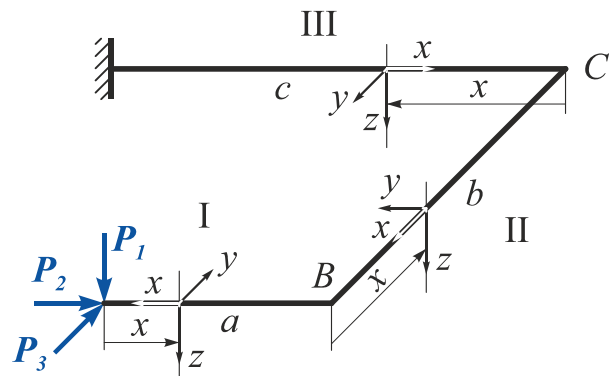


Рис. 2.6

**Замечание** | Если разогнуть ломаный брус по кратчайшему угловому расстоянию в одну линию, направления осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  на всех участках должны совпасть.

2. Используя метод сечений, запишем уравнения внутренних силовых факторов на каждом участке.

Рассмотрим **участок I** (рис. 2.7) ( $0 \leq x \leq a$ ,  $a = 2 \text{ м}$ ).

$$N_x^I = -P_2 = -20 \text{ кН};$$

$$Q_z^I = P_1 = 15 \text{ кН};$$

$$Q_y^I = -P_3 = -10 \text{ кН};$$

$$M_x^I = 0;$$

$$M_y^I = -P_1 x = 15x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=a=2} = -30 \text{ кНм};$$

$$M_z^I = -P_3 x = -10x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=a=2} = -20 \text{ кНм}.$$

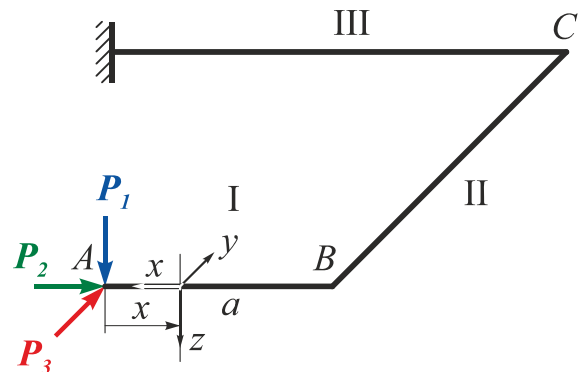


Рис. 2.7

**Замечание**

Момент, создаваемый отличным от нуля усилием относительно некоторой оси, равен нулю, если линия действия усилия пересекает эту ось или параллельна этой оси.

Рассмотрим **участок II** ( $0 \leq x \leq b$ ,  $b = 3$  м).

Приведем усилия  $P_1$ ,  $P_2$ , и  $P_3$  к начальному сечению участка II (точка  $B$ ) (рис. 2.8).

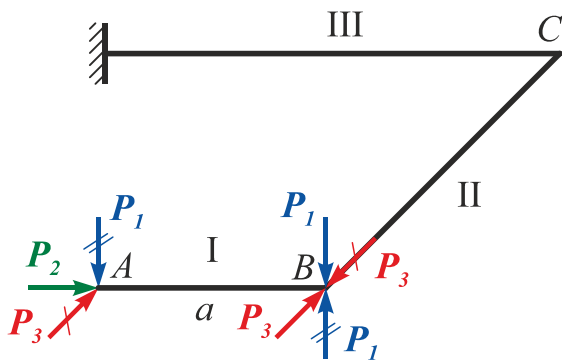


Рис. 2.8

Так как **линия действия** силы  $P_2$  **проходит** через точку  $B$ , то по законам статики точку приложения силы  $P_2$  можно просто перенести в точку  $B$ .

Для приведения силы  $P_1$  к точке  $B$  приложим в этой точке статический нуль, т.е. две равные  $P_1$  противоположно направленные силы, линии действия которых совпадают.

Таким образом, действие силы  $P_1$ , приложенной в точке  $A$ , и действие силы  $P_1$  и момента  $P_1 a$ , приложенных в точке  $B$ , статически эквивалентны.

Аналогичным образом перенесем силу  $P_3$ .

Расчетная схема участка II показана на рис. 2.9.

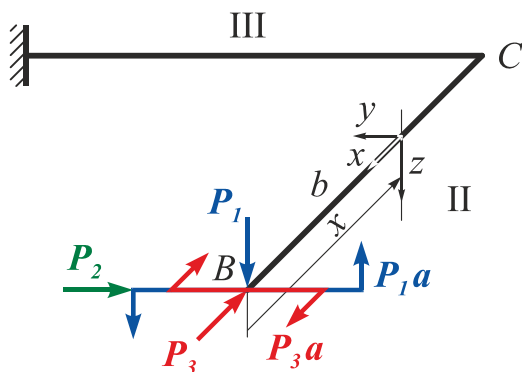


Рис. 2.9

$$N_x^{II} = -P_3 = -10 \text{ кН};$$

$$Q_z^{II} = P_1 = 15 \text{ кН};$$

$$Q_y^{II} = P_2 = 20 \text{ кН};$$

$$M_x^{II} = P_1 a = 15 \cdot 2 = 30 \text{ кНм};$$

$$M_y^{II} = -P_1 x = -15x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=b=3} = -45 \text{ кНм};$$

$$M_z^{II} = -P_3 a + P_2 x = -10 \cdot 2 + 20x \quad \Big|_{x=0} = -20 \text{ кНм} \quad \Big|_{x=b=3} = 40 \text{ кНм}.$$

Рассмотрим **участок III** ( $0 \leq x \leq c$ ,  $c = 4 \text{ м}$ ).

Приведем систему внешних сил, действующих на участке II, к начальному сечению участка III (точка C) аналогично рассмотренному выше.

Расчетная схема участка III показана на рис. 2.10.

**Замечание** Момент, как показано в статике, представляет собой свободный силовой фактор, и его можно переносить в плоскости и в параллельных плоскостях, не изменяя направления и величины.

$$N_x^{III} = P_2 = 20 \text{ кН};$$

$$Q_z^{III} = P_1 = 15 \text{ кН};$$

$$Q_y^{III} = P_3 = 10 \text{ кН};$$

$$M_x^{III} = P_1 b = 15 \cdot 3 = 45 \text{ кНм};$$

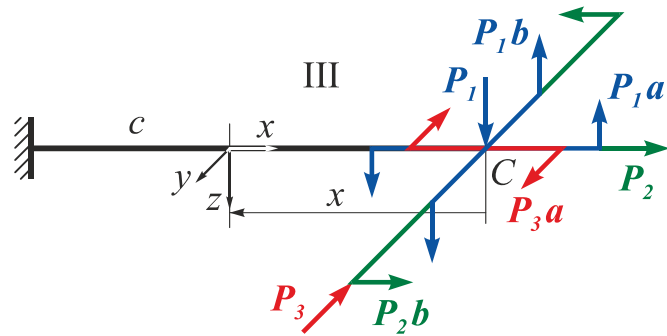


Рис. 2.10

$$M_y^{III} = P_1 a - P_1 x = 15 \cdot 2 - 15x \quad \Big|_{x=0} = 30 \text{ кНм} \quad \Big|_{x=c=4} = -30 \text{ кНм};$$

$$M_z^{III} = P_2 b - P_3 a + P_3 x = 20 \cdot 3 - 10 \cdot 2 + 10x \quad \Big|_{x=0} = 40 \quad \Big|_{x=c=4} = 80 \text{ кНм}.$$

**Замечания**

1. Для правильного определения знака продольной силы  $N_x$ , создаваемой внешним усилием  $P_2$  ( $P_3$ ) в сечениях участка II (III), необходимо считать эту силу приложенной в том же направлении в начальном сечении этого участка (рис. 2.6 – 2.10).
2. Для правильного определения знака поперечной силы  $Q_z$  ( $Q_y$ ), создаваемой внешним усилием  $P_1$  ( $P_2$  и  $P_3$ ) в сечениях участков II и III, необходимо считать эту силу приложенной в том же направлении в начальном сечении участков II и III (рис. 2.6 – 2.10).

3. Построим эпюры (рис. 2.11).

**Замечание** При построении эпюр внутренних силовых факторов для ломаного бруса необходимо учитывать следующее:

- а) эпюры  $N_x$  и  $M_x$  можно строить в любой плоскости;
- б) эпюры  $Q_z$ ,  $Q_y$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  необходимо строить только **в плоскостях их действия**;
- в) эпюры  $M_y$  и  $M_z$  строят со стороны **растянутых волокон** бруса.



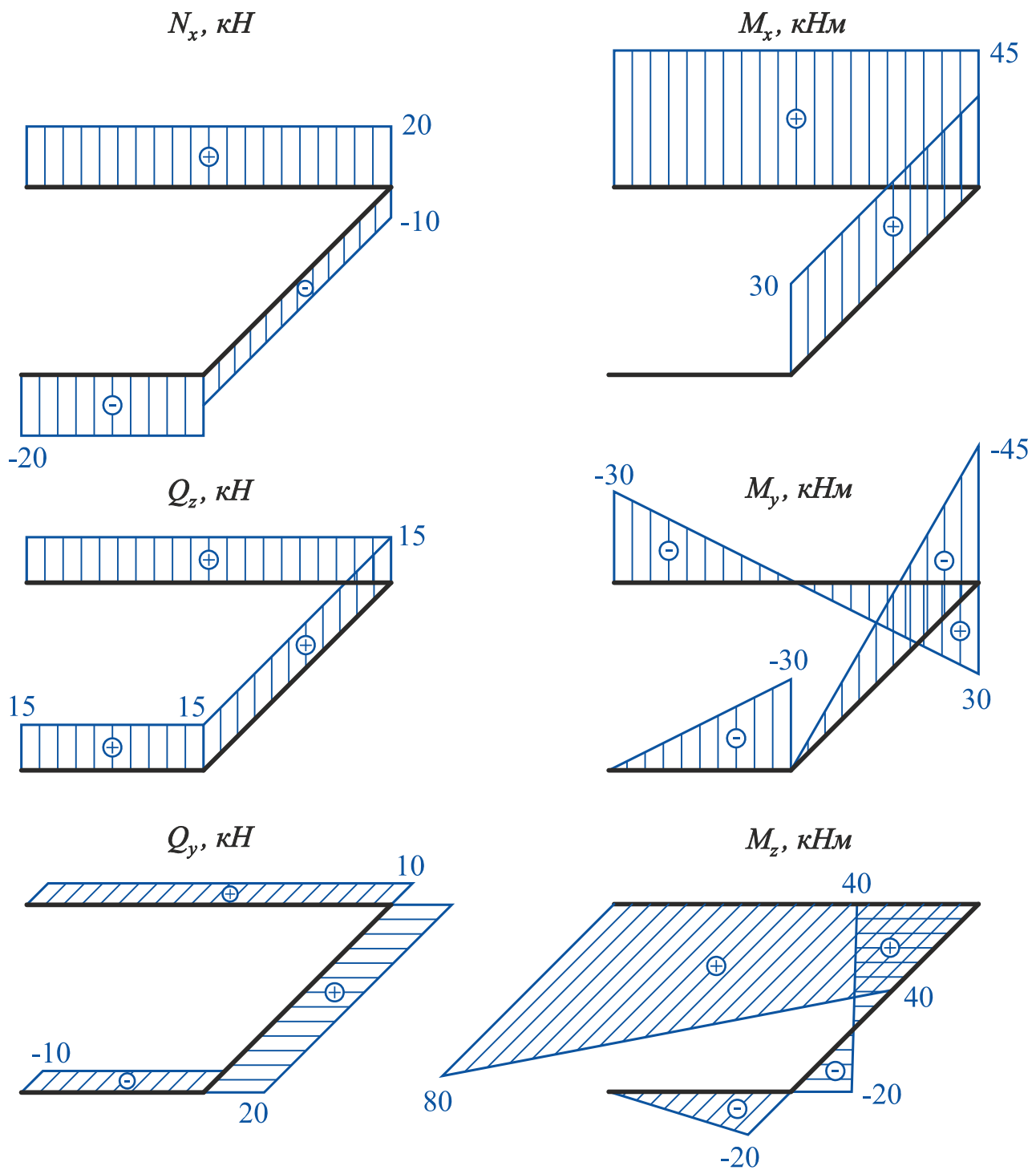


Рис. 2.11

4. Проверим правильность построения эпюр.

Для этого выделим бесконечно малые элементы ломаного бруса в местах сочленения его частей (узлы  $B$  и  $C$ ) и рассмотрим их равновесие под действием внутренних усилий и внешних сил, приложенных в пределах этих узлов (рис. 2.12).

На рис. 2.12 все внутренние усилия показаны с учетом их действительных направлений.

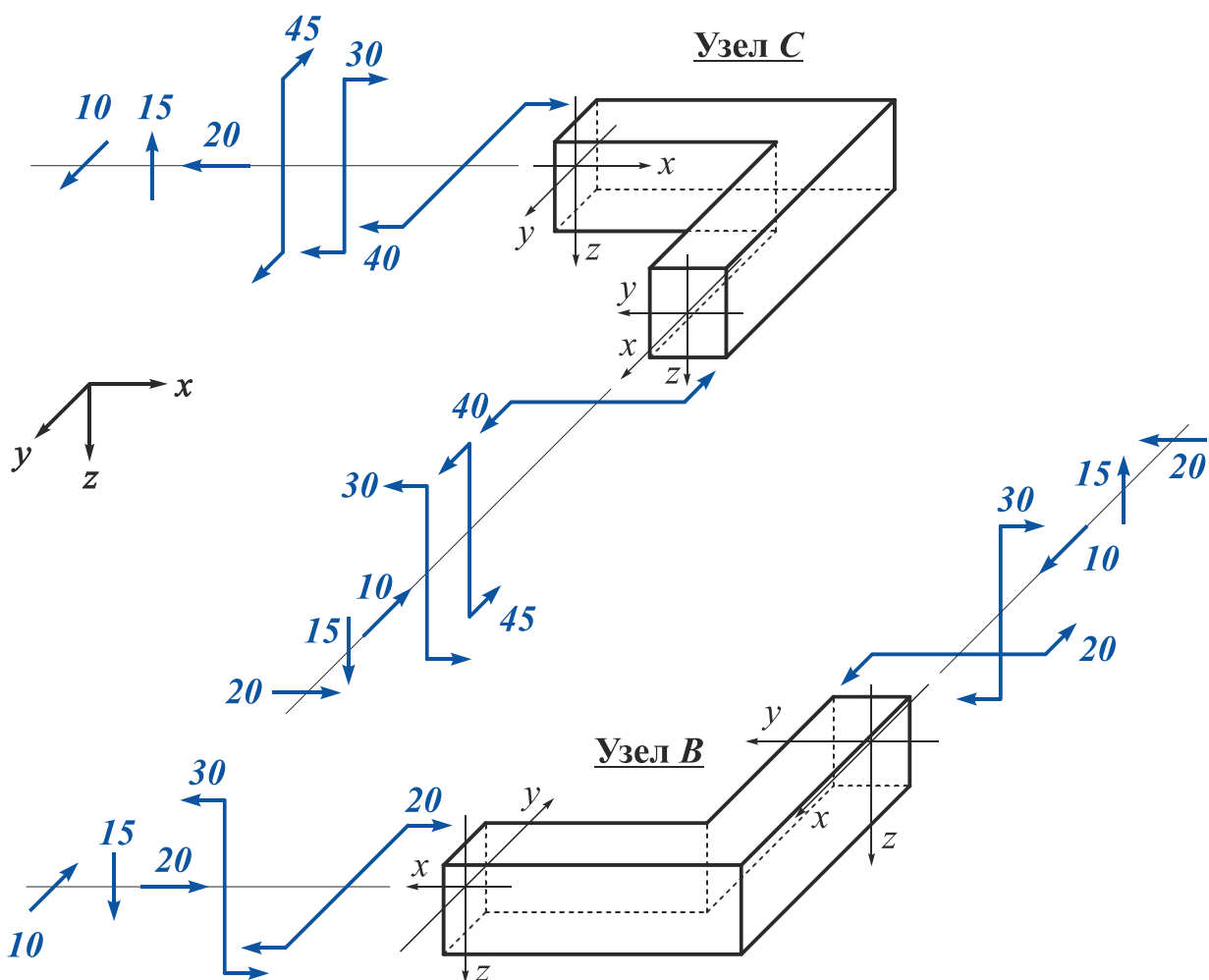


Рис. 2.12

Уравнения равновесия узла *B*:

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 20 - 20 = 0; & \sum P_y &= 10 - 10 = 0; & \sum P_z &= 15 - 15 = 0; \\ \sum M_x &= 0; & \sum M_y &= 30 - 30 = 0; & \sum M_z &= 20 - 20 = 0. \end{aligned}$$

Уравнения равновесия узла *C*:

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 20 - 20 = 0; & \sum P_y &= 10 - 10 = 0; & \sum P_z &= 15 - 15 = 0; \\ \sum M_x &= 45 - 45 = 0; & \sum M_y &= 30 - 30 = 0; & \sum M_z &= 40 - 40 = 0. \end{aligned}$$

**Замечание**

При построении эпюр внутренних силовых факторов для ломаного бруса необходимо каждый его элемент рассматривать как стержень, работающий на растяжение-сжатие, как вал, работающий на кручение, и как балку, работающую в условиях поперечного изгиба в двух плоскостях. При этом сохраняются все правила знаков, принятые при определении  $N_x$ ,  $Q_z$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ , и все правила построения эпюр.

### Пример 2.2

Построить эпюры внутренних силовых факторов для заданного ломаного бруса (рис. 2.13).

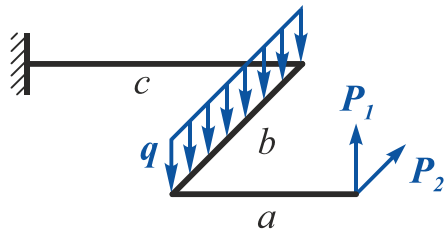


Рис. 2.13

*Дано:*  $P_1 = 20 \text{ кН}$ ;  $P_2 = 10 \text{ кН}$ ;  $q = 15 \text{ кН/м}$ ;  
 $a = 2 \text{ м}$ ;  $b = 2 \text{ м}$ ;  $c = 3 \text{ м}$ .

*Необходимо* построить эпюры  
 $N_x$ ,  $Q_z$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ .

### Решение

1. Начертим ломаный брус в масштабе и разобьем его на участки **I**, **II**, **III**.

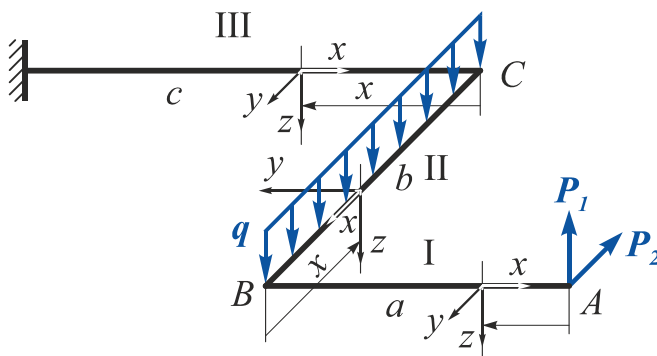


Рис. 2.14

В произвольном сечении каждого участка на расстоянии  $x$  от его начала расположим систему координат  $xuz$  (рис. 2.14).

2. Используя метод сечений, запишем уравнения внутренних силовых факторов на каждом участке.

Рассмотрим **участок I** (рис. 2.15) ( $0 \leq x \leq a$ ,  $a = 2 \text{ м}$ ).

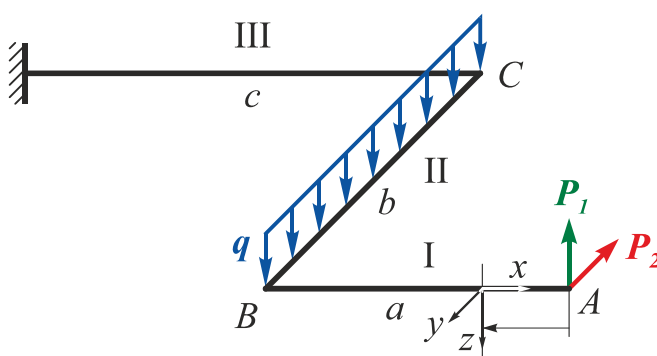


Рис. 2.15

$$\begin{aligned} N_x^I &= 0; \\ Q_z^I &= -P_1 = -20 \text{ кН}; \\ Q_y^I &= P_2 = 10 \text{ кН}; \\ M_x^I &= 0; \\ M_y^I &= P_1 x = 20x \quad \Big|_{x=0} = \\ &= 0 \quad \Big|_{x=a=2} = 40 \text{ кНм}; \end{aligned}$$

$$M_z^I = P_2 x = 10x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=a=2} = 20 \text{ кНм}.$$

Рассмотрим **участок II** ( $0 \leq x \leq b$ ,  $b = 2$  м).

Приведем усилия  $P_1$  и  $P_2$  к начальному сечению участка II (точка B) (рис. 2.16).

$$N_x^{II} = -P_2 = -10 \text{ кН};$$

$$Q_z^{II} = qx - P_1 = 15x - 20 \quad \Big|_{x=0} = -20 \text{ кН} \quad \Big|_{x=b=2} = 10 \text{ кН}.$$

Так как в пределах участка II  $Q_z$  изменяет знак, то необходимо определить  $x_3$ , при котором  $Q_z^{II} = 0$ :

$$qx_3 - P_1 = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{P_1}{q} = \frac{20}{15} = 1,33 \text{ м};$$

$$Q_y^{II} = 0;$$

$$M_x^{II} = P_1 a = 20 \cdot 2 = 40 \text{ кНм};$$

$$M_y^{II} = P_1 x - \frac{qx^2}{2} = 20x - \frac{15x^2}{2} \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=b=2} = 10 \text{ кНм} \quad \Big|_{x=x_3=1,33} = 13,33 \text{ кНм};$$

$$M_z^{II} = P_2 a = 10 \cdot 2 = 20 \text{ кНм}.$$

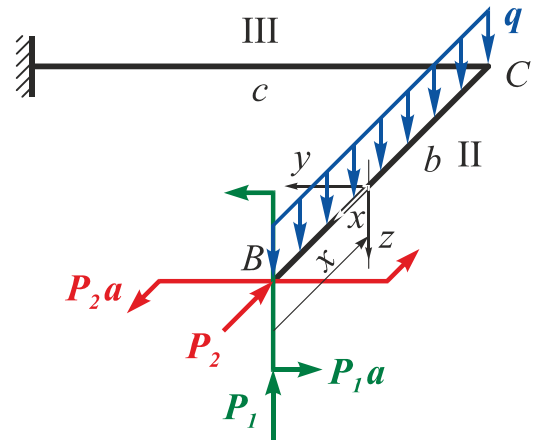


Рис. 2.16

Рассмотрим **участок III** ( $0 \leq x \leq c$ ,  $c = 3$  м).

Заменим распределенную нагрузку, действующую в пределах второго участка, равнодействующей (рис. 2.17) и приведем систему внешних сил на участке II к начальному сечению участка III (точка C).

Расчетная схема участка III показана на рис. 2.18.

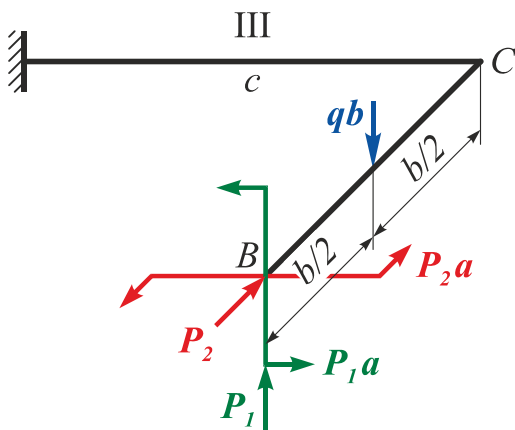


Рис. 2.17

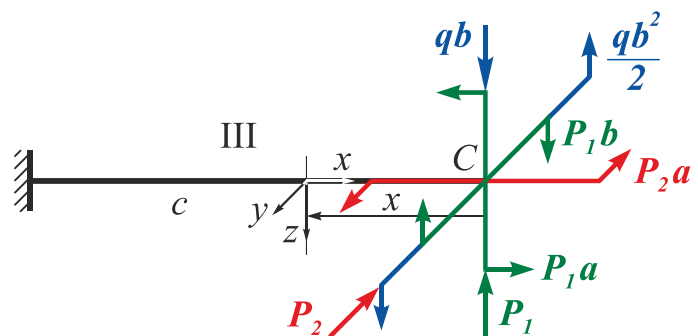


Рис. 2.18

$$N_x^{III} = 0;$$

$$Q_z^{III} = -P_1 + qb = -20 + 15 \cdot 2 = 10 \text{ кН};$$

$$Q_y^{III} = P_2 = 10 \text{ кН};$$

$$M_x^{III} = -P_1 b + \frac{qb^2}{2} = -20 \cdot 2 + \frac{15 \cdot 2^2}{2} = -10 \text{ кНм};$$

$$M_y^{III} = P_1 a + P_1 x - qbx = 20 \cdot 2 + 20x - 15 \cdot 2x \Big|_{x=0} = 40 \text{ кНм} \Big|_{x=c=3} = 10 \text{ кНм};$$

$$M_z^{III} = P_2 x + P_2 a = 10 \cdot x + 10 \cdot 2 \Big|_{x=0} = 20 \text{ кНм} \Big|_{x=c=3} = 50 \text{ кНм}.$$

3. Построим эпюры (рис. 2.19).

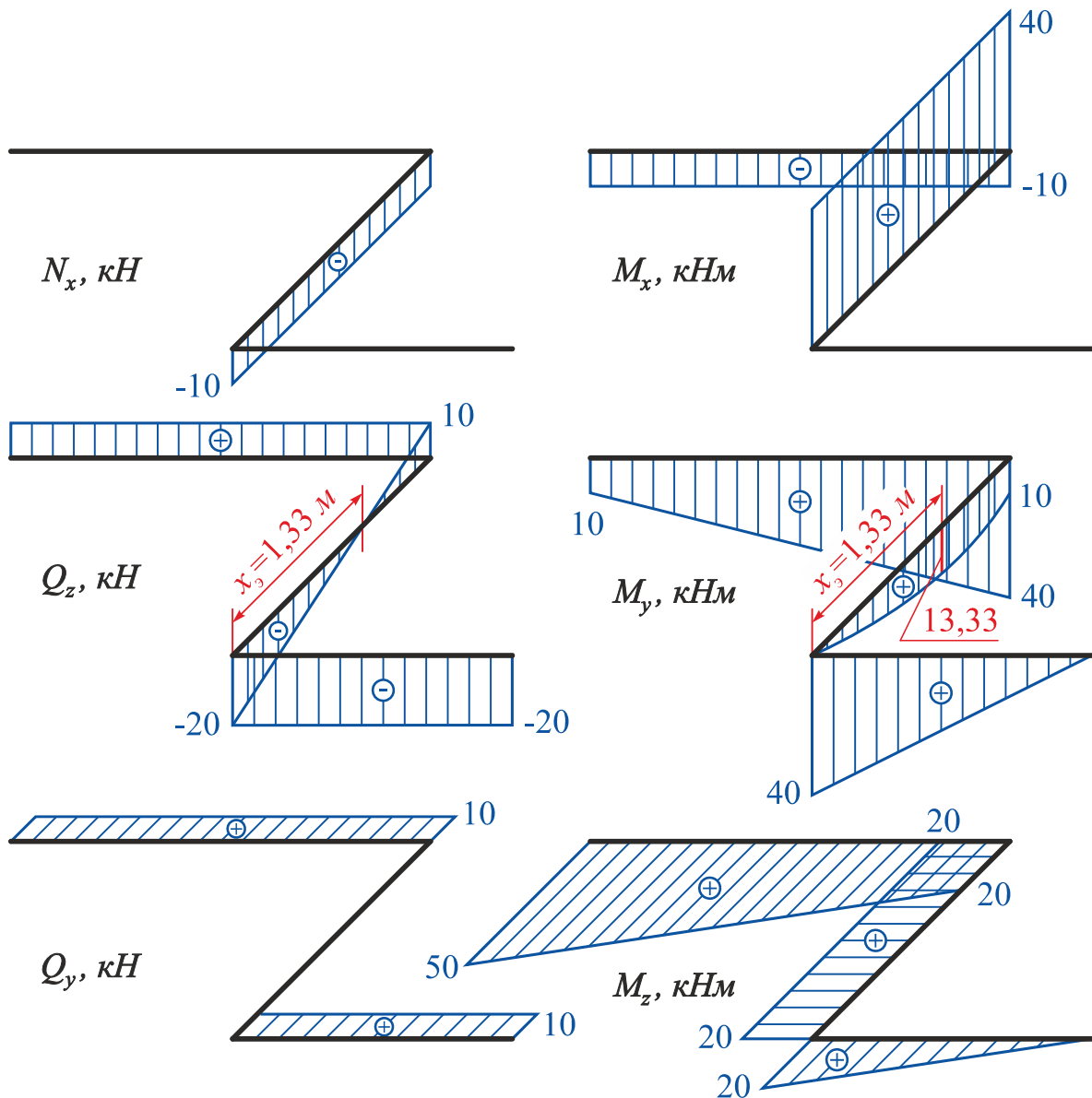


Рис. 2.19

4. Проверим правильность построения эпюр.

Для этого выделим бесконечно малые элементы ломаного бруса в местах сочленения его частей (узлы *B* и *C*) и рассмотрим их равновесие под действием внутренних усилий и внешних сил, приложенных в пределах этих узлов (рис. 2.20).

На рис. 2.20 все внутренние усилия показаны с учетом их действительных направлений.

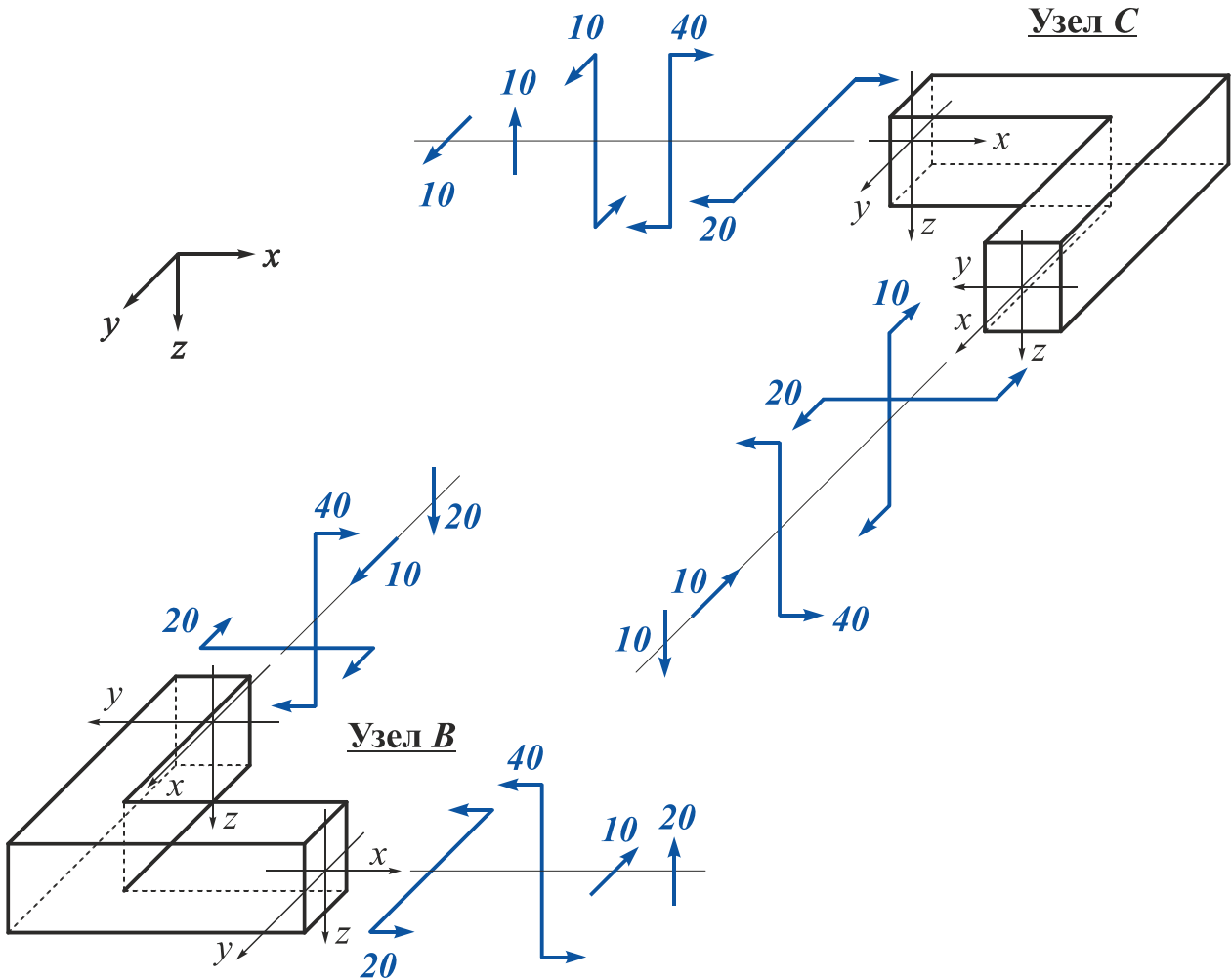


Рис. 2.20

Уравнения равновесия узла *B*:

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 0; & \sum P_y &= 10 - 10 = 0; & \sum P_z &= 20 - 20 = 0; \\ \sum M_x &= 0; & \sum M_y &= 40 - 40 = 0; & \sum M_z &= 20 - 20 = 0. \end{aligned}$$

Уравнения равновесия узла *C*:

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 0; & \sum P_y &= 10 - 10 = 0; & \sum P_z &= 10 - 10 = 0; \\ \sum M_x &= 10 - 10 = 0; & \sum M_y &= 40 - 40 = 0; & \sum M_z &= 20 - 20 = 0. \end{aligned}$$

## 2.2.2. Второй метод построения эпюр

При использовании второго метода исключается операция приведения системы внешних усилий, действующих на рассмотренный участок, к начальному сечению следующего участка, что позволяет сделать решение более компактным.

### Пример 2.3

Построить эпюры внутренних силовых факторов для заданного ломаного бруса (рис. 2.21).

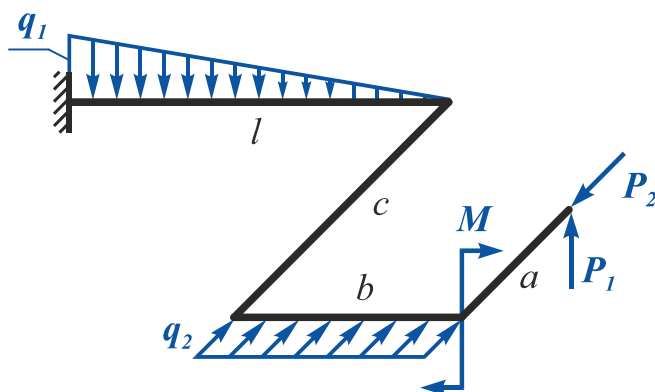


Рис. 2.21

*Дано:*  $P_1 = 5 \text{ кН}$ ;  $P_2 = 30 \text{ кН}$ ;  
 $q_1 = 15 \text{ кН/м}$ ;  $q_2 = 20 \text{ кН/м}$ ;  
 $M = 20 \text{ кНм}$ ;  $a = 3 \text{ м}$ ;  
 $b = 2 \text{ м}$ ;  $c = 2 \text{ м}$ ;  $l = 3 \text{ м}$ .

*Необходимо* построить эпюры

$N_x$ ,  $Q_z$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ .

### Решение

1. Начертим ломаный брус в масштабе и разобьем его на участки. В произвольном сечении каждого участка на расстоянии  $x$  от его начала расположим систему координат  $xuz$  так, чтобы ось  $x$  совпала с продольной осью бруса, ось  $z$  была направлена вниз, а горизонтальная ось  $y$  составила бы с двумя первыми правый ортогональный базис (рис. 2.22).

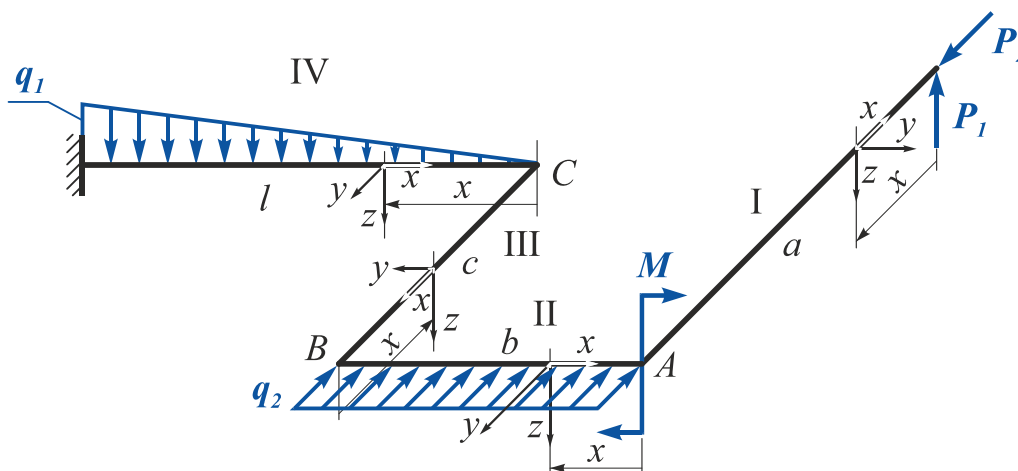


Рис. 2.22

**Замечания**

1. Чтобы получить на всех участках формально упорядоченную систему знаков для внутренних силовых факторов, желательно систему координат на участке II найти простым перемещением, т.е. поворотом относительно оси  $z$  на  $90^\circ$  системы координат на участке I и т.д.

2. Если разогнуть ломаный брус по кратчайшему расстоянию в одну линию, направления осей  $x, y, z$  на всех участках должны совпасть.

2. Используя метод сечений, запишем уравнения внутренних силовых факторов на каждом участке.

**Участок I** ( $0 \leq x \leq a, a = 3 \text{ м}$ ).

$$N_x^I = -P_2 = -30 \text{ кН}; \quad Q_z^I = -P_1 = -5 \text{ кН}; \quad Q_y^I = 0;$$

$$M_x^I = 0;$$

$$M_y^I = P_1 x = 5 \cdot x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=a=3} = 15 \text{ кНм};$$

$$M_z^I = 0.$$

**Участок II** ( $0 \leq x \leq b, b = 2 \text{ м}$ ).

$$N_x^{II} = 0;$$

$$Q_z^{II} = -P_1 = -5 \text{ кН};$$

$$Q_y^{II} = q_2 x - P_2 = 20 \cdot x - 30 \quad \Big|_{x=0} = -30 \text{ кН} \quad \Big|_{x=b=2} = 10 \text{ кН}.$$

Так как в пределах участка II  $Q_y$  изменяет знак, то необходимо определить  $x_3$ , при котором  $Q_y^{II} = 0$ :

$$q_2 x_3 - P_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{P_2}{q_2} = \frac{30}{20} = 1,5 \text{ м};$$

$$M_x^{II} = P_1 a = 5 \cdot 3 = 15 \text{ кНм};$$

$$M_y^{II} = P_1 x - M = 5 \cdot x - 20 = \quad \Big|_{x=0} = -20 \text{ кНм} \quad \Big|_{x=b=2} = -10 \text{ кНм};$$

$$M_z^{II} = \frac{q_2 x^2}{2} - P_2 x = \frac{20x^2}{2} - 30 \cdot x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=b=2} =$$

$$= -20 \text{ кНм} \quad \Big|_{x=x_3=1,5} = -22,5 \text{ кНм}.$$



**Участок III** ( $0 \leq x \leq c$ ,  $c = 2$  м).

Построим отдельную расчетную схему, заменив распределенную нагрузку, действующую в пределах второго участка, равнодействующей (рис. 2.23).

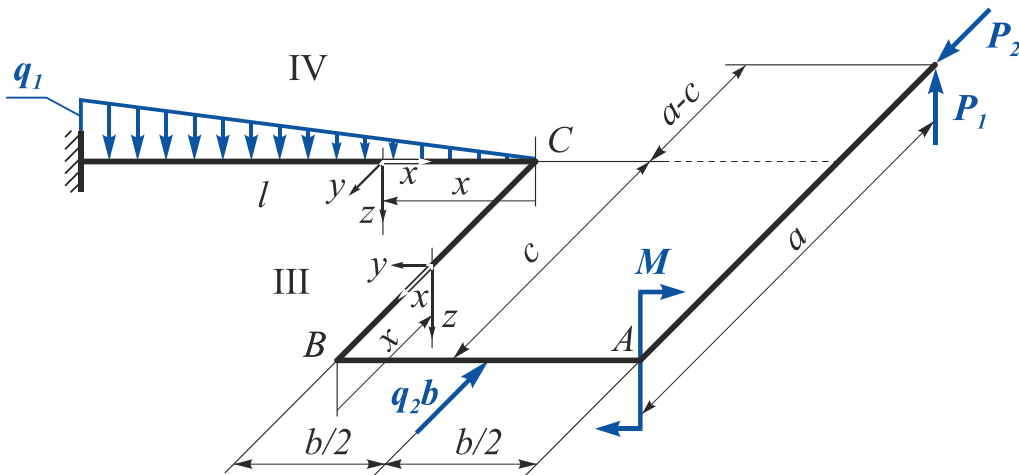


Рис. 2.23

$$N_x^{III} = P_2 - q_2 b = 30 - 20 \cdot 2 = -10 \text{ кН};$$

$$Q_z^{III} = -P_1 = -5 \text{ кН};$$

$$Q_y^{III} = 0;$$

$$M_x^{III} = -M + P_1 b = -20 + 5 \cdot 2 = -10 \text{ кНм};$$

$$M_y^{III} = P_1(x - a) = 5(x - 3) \quad \Big|_{x=0} = -15 \text{ кНм} \quad \Big|_{x=c=2} = -5 \text{ кНм};$$

$$M_z^{III} = q_2 b \frac{b}{2} - P_2 b = 20 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} - 30 \cdot 2 = -20 \text{ кНм}.$$

**Участок IV** ( $0 \leq x \leq l$ ,  $l = 3$  м).

$$N_x^{IV} = 0;$$

$$Q_z^{IV} = \frac{q_1 x^2}{2l} - P_1 = \frac{15x^2}{2 \cdot 3} - 5 \quad \Big|_{x=0} = -5 \text{ кН} \quad \Big|_{x=l=3} = 17,5 \text{ кН}.$$

Так как в пределах участка IV  $Q_z$  изменяет знак, то необходимо определить  $x_3$ , при котором  $Q_z^{IV} = 0$ :

$$\frac{q_1 x_3^2}{2l} - P_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \sqrt{\frac{2P_1 l}{q_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \cdot 3}{15}} = 1,414 \text{ м};$$

$$Q_y^{IV} = q_2 b - P_2 = 20 \cdot 2 - 30 = 10 \text{ кН};$$

$$M_x^{IV} = P_1(a - c) = 5 \cdot (3 - 2) = 5 \text{ кНм};$$

$$\begin{aligned}
M_y^{IV} &= P_1(b+x) - \frac{q_1 x^3}{6l} - M = 5 \cdot (2+x) - \frac{15 \cdot x^3}{6 \cdot 3} - 20 = \\
&= \left|_{x=0} = -10 \text{ кНм} \quad \left|_{x=l=3} = -17,5 \text{ кНм} \quad \left|_{x=x_3=1,414} = -9,998 \text{ кНм}; \right. \\
M_z^{IV} &= q_2 b \left( \frac{b}{2} + x \right) - P_2(b+x) = 20 \cdot 2 \cdot (1+x) - 30 \cdot (2+x) = \\
&= \left|_{x=0} = -20 \text{ кНм} \quad \left|_{x=l=3} = 10 \text{ кНм}. \right.
\end{aligned}$$

3. Построим эпюры (рис. 2.24).

### Замечания

1. При построении эпюр внутренних силовых факторов для ломаного бруса необходимо каждый его элемент рассматривать как стержень, работающий на растяжение-сжатие, как вал, работающий на кручение, и как балку, работающую в условиях поперечного изгиба в двух плоскостях. При этом сохраняются все правила знаков, принятые при определении  $N_x$ ,  $Q_z$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  и все правила построения эпюр:

- а) эпюры  $N_x$  и  $M_x$  можно строить в любой плоскости;
- б) эпюры  $Q_z$ ,  $Q_y$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  необходимо строить только **в плоскостях их действия**;
- в) эпюры  $M_y$  и  $M_z$  строят со стороны **растянутых волокон** бруса.

2. На прямых углах плоского ломаного бруса происходит взаимный «переход»  $M_x$  в  $M_y$ , а также  $N_x$  в  $Q_y$  и наоборот.

3. Для **параллельных участков** плоско-пространственного ломаного бруса при отсутствии в узловых точках этих участков сосредоточенных моментов, действующих перпендикулярно плоскости ломаного бруса, верны следующие правила:

- а) при **одинаковых направлениях обхода** (см. рис. 2.22, участки II и IV) значение  $M_y$  в конце одного участка (участок II) должно быть равно значению  $M_y$  в начале следующего участка (участок IV) (см. рис. 2.24);
- б) при **противоположных (встречных) направлениях обхода** (см. рис. 2.22, участки I и III) значение  $M_y$  в конце одного участка (участок I) должно быть равно по модулю и противоположно по знаку значению  $M_y$  в начале следующего участка (участок III) (см. рис. 2.24).

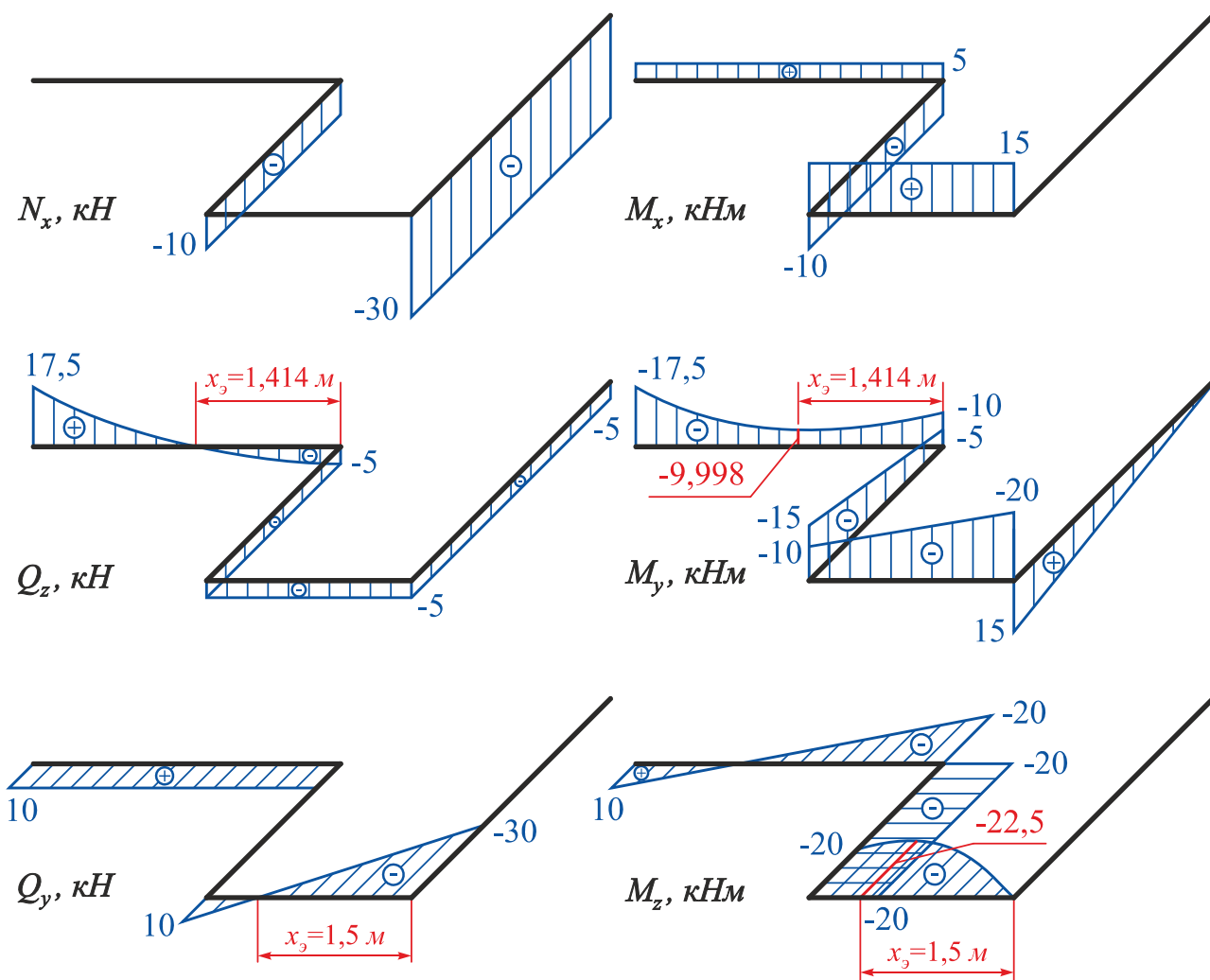


Рис. 2.24

#### 4. Проверим правильность построения эпюр.

Для этого выделим бесконечно малые элементы ломаного бруса в местах сочленения его частей (узлы  $A$ ,  $B$  и  $C$ ) и рассмотрим их равновесие под действием внутренних усилий и внешних сил, приложенных в пределах этих узлов (рис. 2.25) (все внутренние усилия показаны с учетом их действительных направлений).

Уравнения равновесия узла  $A$ :

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 10 - 10 = 0; & \sum P_y &= 0; & \sum P_z &= 20 - 20 = 0; \\ \sum M_x &= 0; & \sum M_y &= 30 - 30 = 0; & \sum M_z &= 0. \end{aligned}$$

Уравнения равновесия узла  $B$ :

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 0; & \sum P_y &= 0; & \sum P_z &= 20 - 20 = 0; \\ \sum M_x &= 0; & \sum M_y &= 40 - 40 = 0; & \sum M_z &= 0. \end{aligned}$$

Уравнения равновесия узла С:

$$\sum P_x = 10 - 10 = 0; \quad \sum P_y = 0;$$

$$\sum P_z = 15 - 10 - 5 = 0;$$

$$\sum M_x = 30 - 30 = 0; \quad \sum M_y = 30 + 10 - 40 = 0; \quad \sum M_z = 30 - 30 = 0.$$

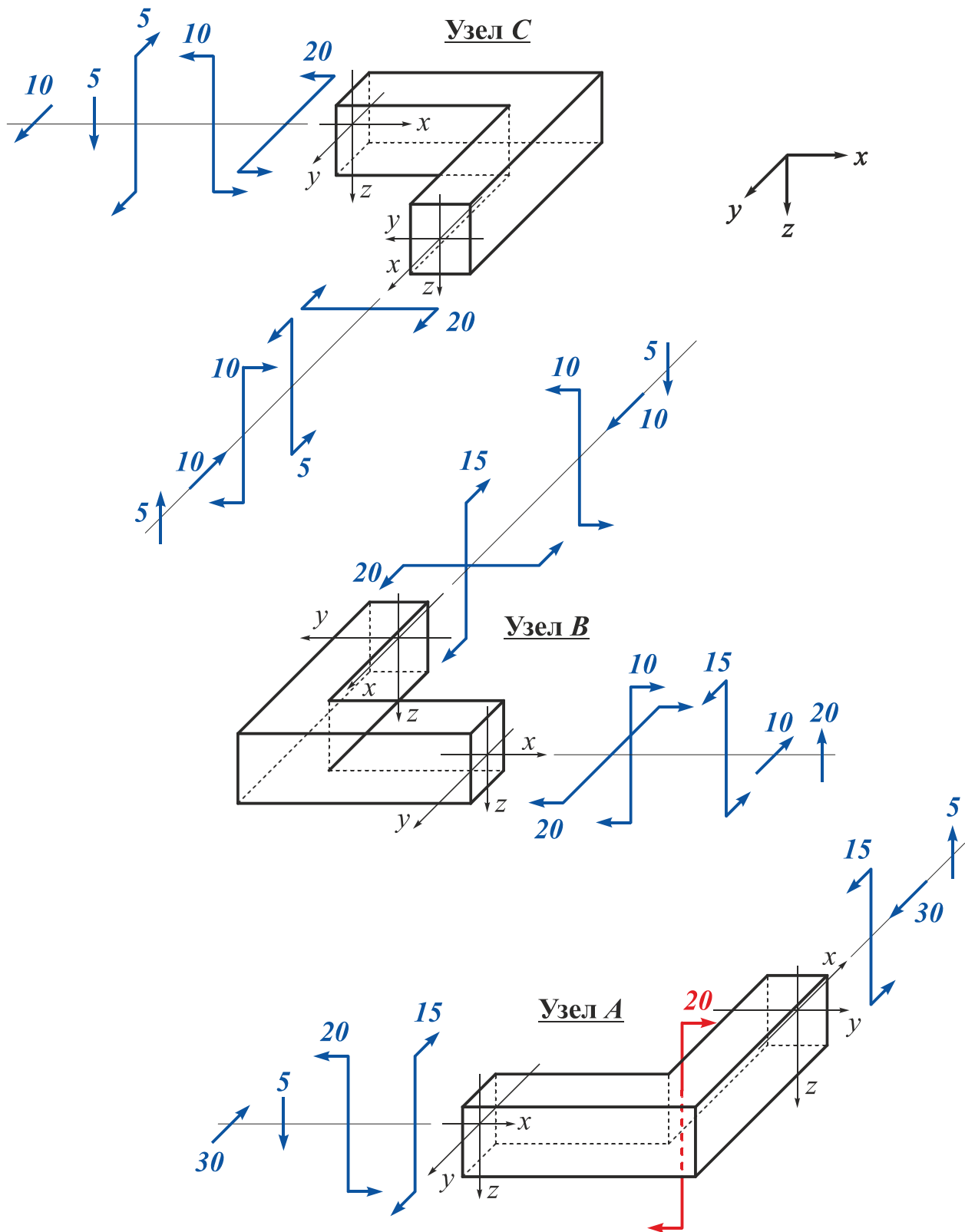


Рис. 2.25

### Пример 2.4

Построить эпюры внутренних силовых факторов для заданного ломаного бруса (рис. 2.26).

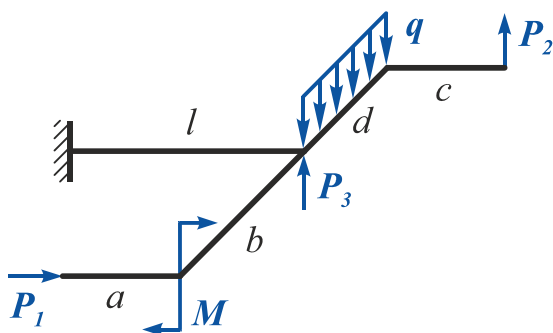


Рис. 2.26

Дано:  $P_1 = 10 \text{ кН}$ ;  $P_2 = 20 \text{ кН}$ ;  $P_3 = 5 \text{ кН}$ ;  
 $M = 30 \text{ кНм}$ ;  $q = 5 \text{ кН/м}$ ;  
 $a = 2 \text{ м}$ ;  $b = 3 \text{ м}$ ;  $c = 2 \text{ м}$ ;  
 $d = 2 \text{ м}$ ;  $l = 4 \text{ м}$ .

Необходимо построить эпюры

$N_x$ ,  $Q_z$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ .

### Решение

1. Начертим ломаный брус в масштабе и разобьем его на участки. В произвольном сечении каждого участка на расстоянии  $x$  от его начала расположим систему координат  $xuz$  так, чтобы ось  $x$  совпала с продольной осью бруса, ось  $z$  была направлена вниз, а горизонтальная ось  $y$  составила бы с двумя первыми правый ортогональный базис (рис. 2.27).

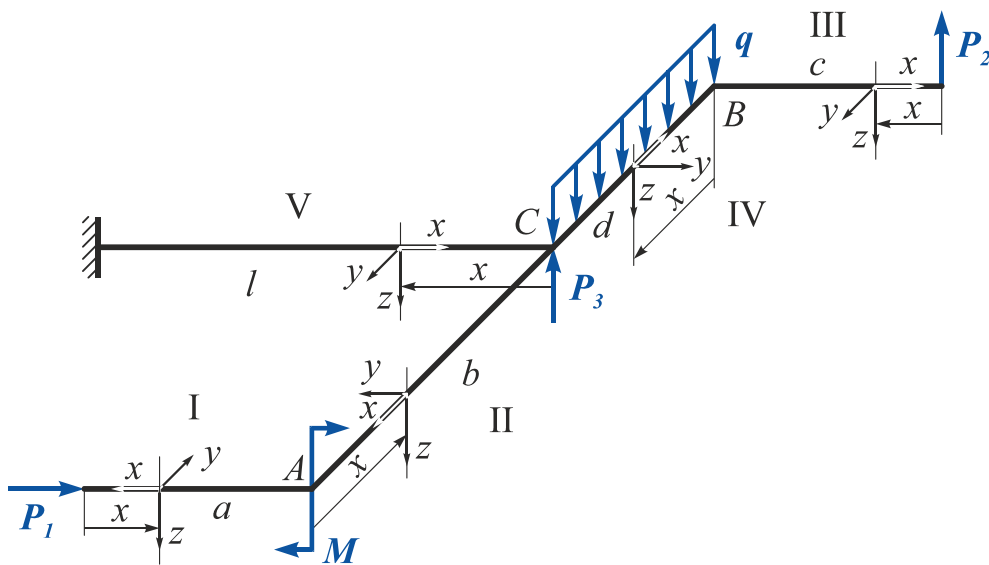


Рис. 2.27

2. Используя метод сечений, запишем уравнения внутренних силовых факторов на каждом участке.

**Участок I** ( $0 \leq x \leq a$ ,  $a = 2 \text{ м}$ ).

$$N_x^I = -P_1 = -10 \text{ кН};$$

$$Q_z^I = 0;$$

$$Q_y^I = 0;$$

$$M_x^I = 0;$$

$$M_y^I = 0;$$

$$M_z^I = 0.$$

**Участок II** ( $0 \leq x \leq b$ ,  $b = 3 \text{ м}$ ).

$$N_x^{II} = 0; \quad Q_z^{II} = 0; \quad Q_y^{II} = -P_1 = -10 \text{ кН};$$

$$M_x^{II} = -M = -30 \text{ кНм}; \quad M_y^{II} = 0;$$

$$M_z^{II} = P_1 x = 10 \cdot x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=b=3} = 30 \text{ кНм}.$$

**Участок III** ( $0 \leq x \leq c$ ,  $c = 2 \text{ м}$ ).

$$N_x^{III} = 0; \quad Q_z^{III} = -P_2 = -20 \text{ кН}; \quad Q_y^{III} = 0;$$

$$M_x^{III} = 0; \quad M_y^{III} = P_2 x = 20x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=c=2} = 40 \text{ кНм}; \quad M_z^{III} = 0.$$

**Участок IV** ( $0 \leq x \leq d$ ,  $d = 2 \text{ м}$ ).

$$N_x^{IV} = 0;$$

$$Q_z^{IV} = qx - P_2 = 5x - 20 \quad \Big|_{x=0} = -20 \text{ кН} \quad \Big|_{x=d=2} = -10 \text{ кН};$$

$$Q_y^{IV} = 0; \quad M_x^{IV} = -P_2 c = -20 \cdot 2 = -40 \text{ кНм};$$

$$M_y^{IV} = P_2 x - \frac{qx^2}{2} = 20x - \frac{5x^2}{2} \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=d=2} = 30 \text{ кНм};$$

$$M_z^{IV} = 0.$$

**Участок V** ( $0 \leq x \leq l$ ,  $l = 4 \text{ м}$ ).

Построим отдельную расчетную схему, заменив распределенную нагрузку, действующую в пределах четвертого участка, равнодействующей (рис. 2.28).

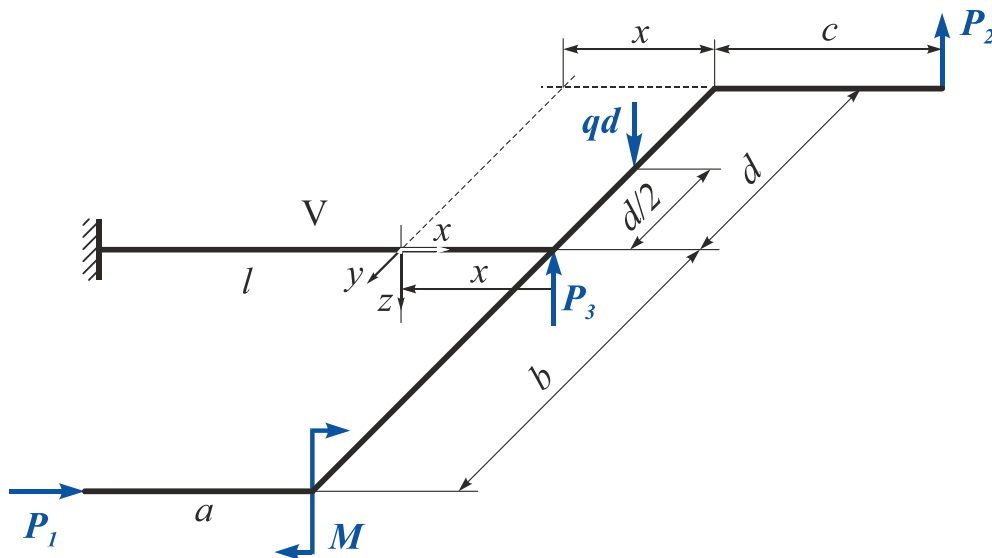


Рис. 2.28

$$N_x^V = P_1 = 10 \text{ кН}; \quad Q_z^V = qd - P_2 - P_3 = 5 \cdot 2 - 20 - 5 = -15 \text{ кН};$$

$$Q_y^V = 0; \quad M_x^V = -qd \frac{d}{2} + P_2 d = -5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} + 20 \cdot 2 = 30 \text{ кНм};$$

$$M_y^V = P_3 x + P_1(c + x) - qdx - M = 5x + 20 \cdot (2 + x) - 5 \cdot 2 \cdot x - 30 =$$

$$= \Big|_{x=0} = 10 \text{ кНм} \quad \Big|_{x=l=4} = 70 \text{ кНм};$$

$$M_z^V = P_1 b = 10 \cdot 3 = 30 \text{ кНм}.$$

3. Построим эпюры (рис. 2.29).

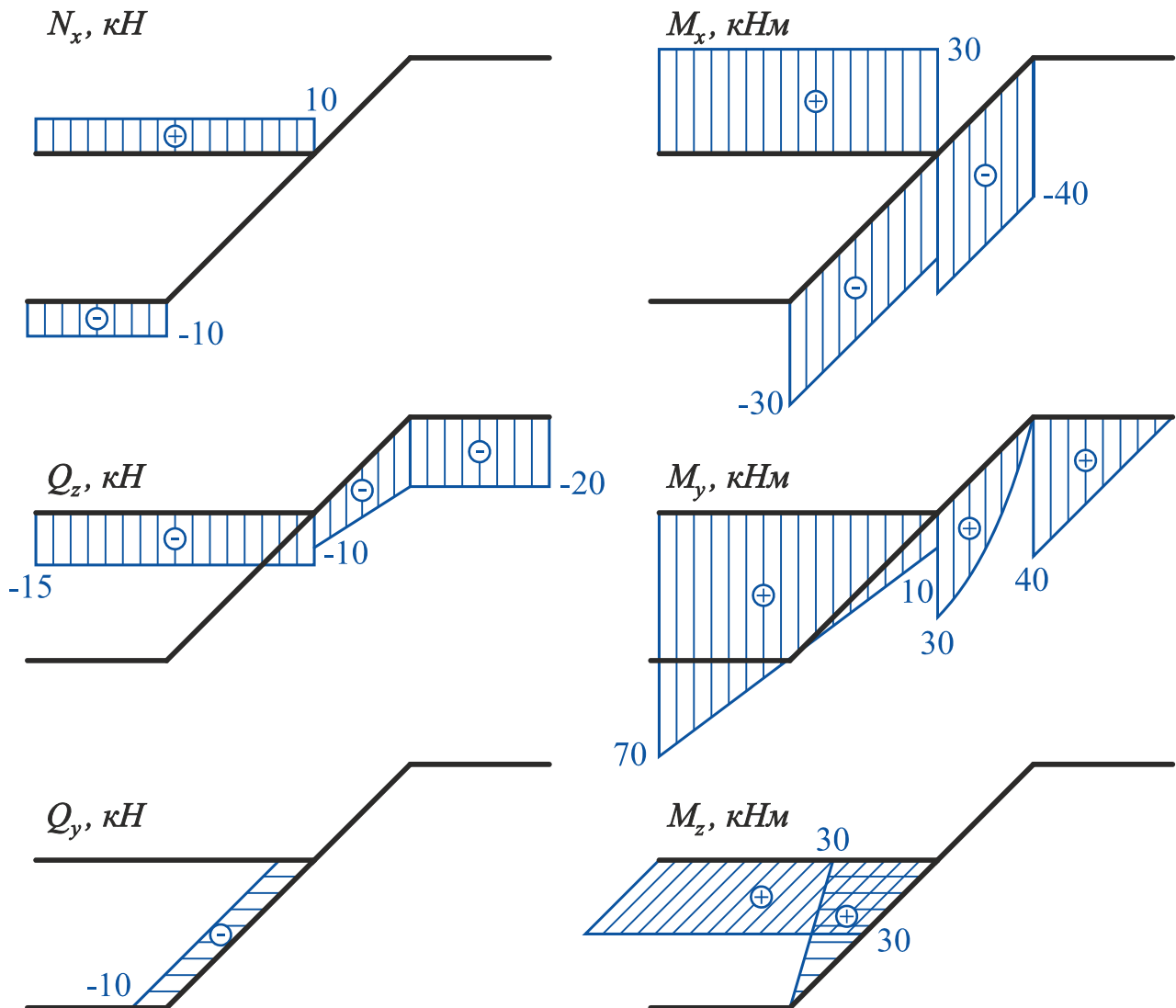


Рис. 2.29

4. Проверим правильность построения эпюр.

Для этого выделим бесконечно малые элементы ломаного бруса в местах сочленения его частей (узлы  $A$ ,  $B$  и  $C$ ) и рассмотрим их равновесие под действием внутренних усилий и внешних сил, приложенных в пределах этих узлов (рис. 2.30).

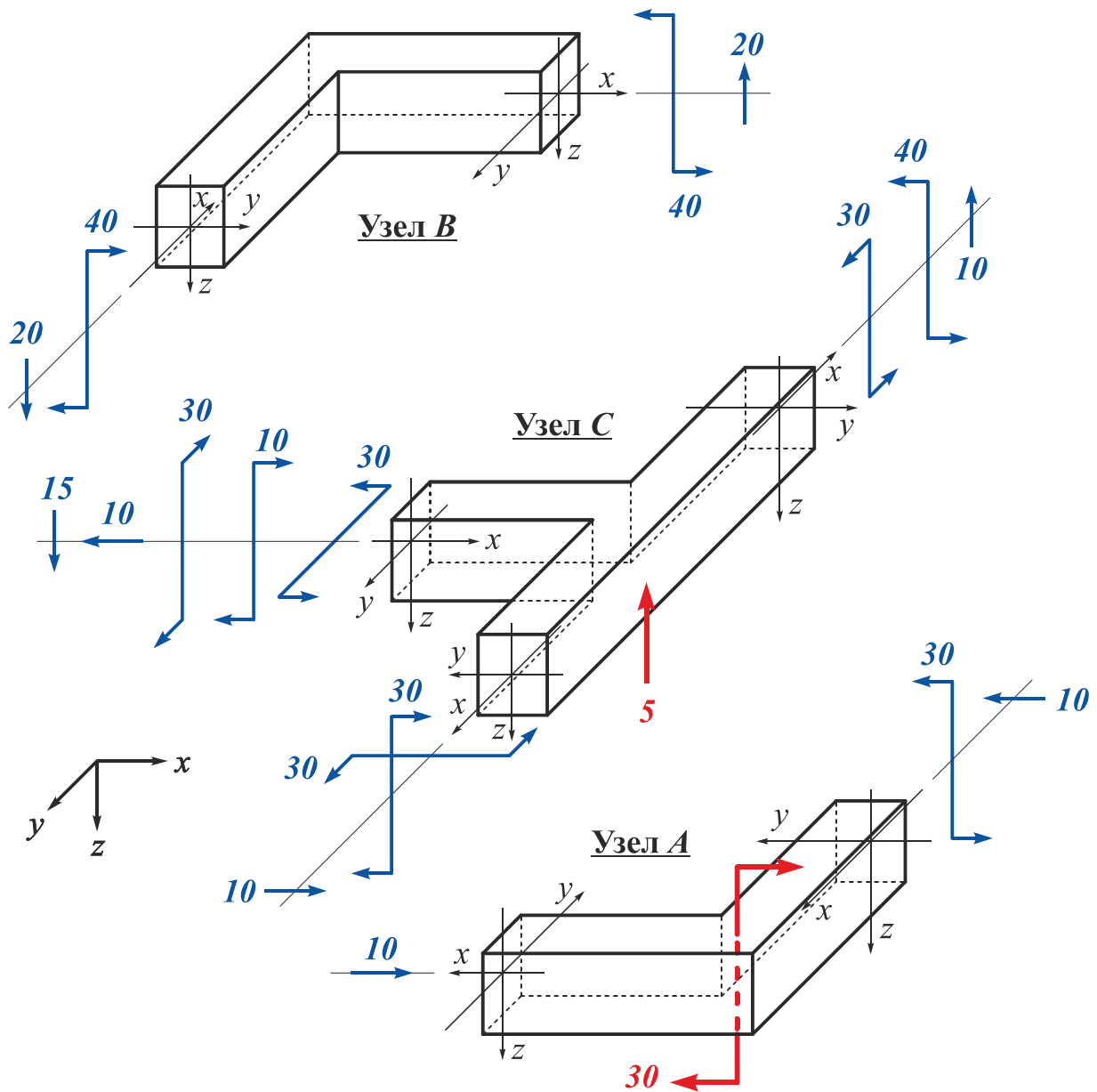


Рис. 2.30

Уравнения равновесия узла А:

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 10 - 10 = 0; & \sum P_y &= 0; & \sum P_z &= 20 - 20 = 0; \\ \sum M_x &= 0; & \sum M_y &= 30 - 30 = 0; & \sum M_z &= 0. \end{aligned}$$

Уравнения равновесия узла В:

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 0; & \sum P_y &= 0; & \sum P_z &= 20 - 20 = 0; \\ \sum M_x &= 0; & \sum M_y &= 40 - 40 = 0; & \sum M_z &= 0. \end{aligned}$$

Уравнения равновесия узла С:

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 10 - 10 = 0; & \sum P_y &= 0; & \sum P_z &= 15 - 10 - 5 = 0; \\ \sum M_x &= 30 - 30 = 0; & \sum M_y &= 30 + 10 - 40 = 0; & \sum M_z &= 30 - 30 = 0. \end{aligned}$$



## 2.3. Построение эпюр внутренних силовых факторов для пространственного ломаного бруса

**Пространственным** называют ломаный брус, все элементы которого жестко соединены в узлах и их продольные оси не лежат в одной плоскости.

### Пример 2.5

Построить эпюры внутренних силовых факторов для заданного пространственного ломаного бруса (рис. 2.31).

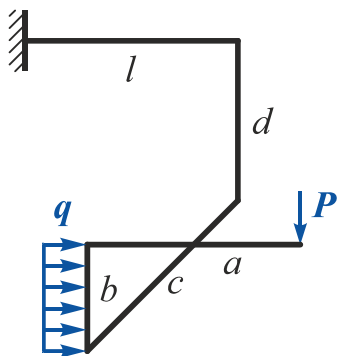


Рис. 2.31

*Дано:*  $P = 10 \text{ кН}$ ;  $q = 15 \text{ кН/м}$ ;  
 $a = 2 \text{ м}$ ;  $b = 1 \text{ м}$ ;  $c = 2 \text{ м}$ ;  
 $d = 1,5 \text{ м}$ ;  $l = 2 \text{ м}$ .

*Необходимо* построить эпюры

$N_x$ ,  $Q_z$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ .

### Решение

1. Начертим ломаный брус в масштабе и разобьем его на участки.

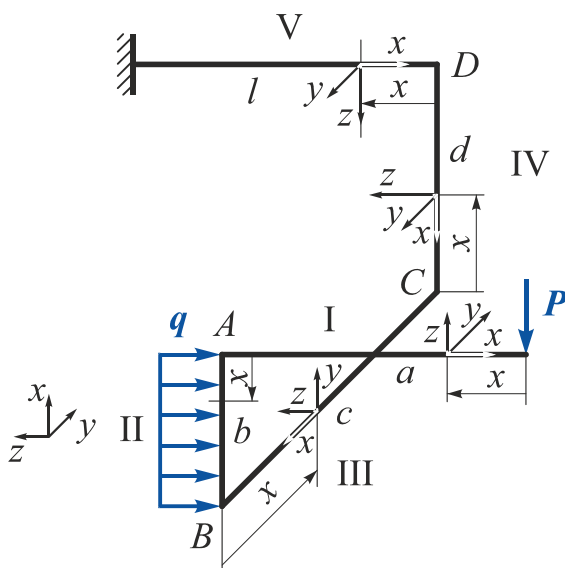


Рис. 2.32

В произвольном сечении участка V на расстоянии  $x$  от его начала расположим систему координат  $xuz$  так, чтобы ось  $x$  совпала с продольной осью бруса, ось  $z$  была направлена вниз, а горизонтальная ось  $y$  составила бы с двумя первыми правый ортогональный базис (рис. 2.32). На участке IV систему координат получим поворотом относительно оси  $y$  на  $90^\circ$ , на участке III – поворотом относительно оси  $z$  на  $90^\circ$ , на участке II – поворотом относительно оси  $z$  на  $90^\circ$ , на участке I – поворотом относительно оси  $y$  на  $90^\circ$ .

2. Используя метод сечений, запишем уравнения внутренних силовых факторов на каждом участке.

**Участок I** (рис. 2.15) ( $0 \leq x \leq a$ ,  $a = 2$  м).

$$N_x^I = 0;$$

$$Q_z^I = -P = -10 \text{ кН};$$

$$Q_y^I = 0;$$

$$M_x^I = 0;$$

$$M_y^I = Px = 10x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=a=2} = 20 \text{ кНм};$$

$$M_z^I = 0.$$

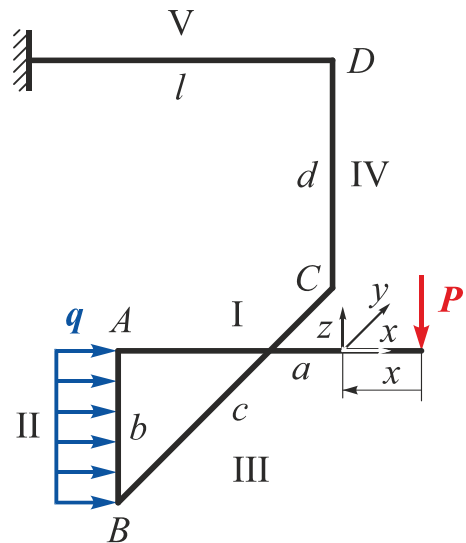


Рис. 2.33

**Участок II** ( $0 \leq x \leq b$ ,  $b = 1$  м).

Приведем усилие  $P$  к начальному сечению участка II (точка A) (рис. 2.34).

$$N_x^{II} = -P = -10 \text{ кН};$$

$$Q_z^{II} = -qx = -15x \quad \Big|_{x=0} =$$

$$= 0 \quad \Big|_{x=b=1} = -15 \text{ кН};$$

$$Q_y^{II} = 0;$$

$$M_x^{II} = 0;$$

$$M_y^{II} = Pa + \frac{qx^2}{2} = 10 \cdot 2 + \frac{15x^2}{2} \Big|_{x=0} =$$

$$= 20 \text{ кНм} \quad \Big|_{x=b=1} = 27,5 \text{ кНм};$$

$$M_z^{II} = 0.$$

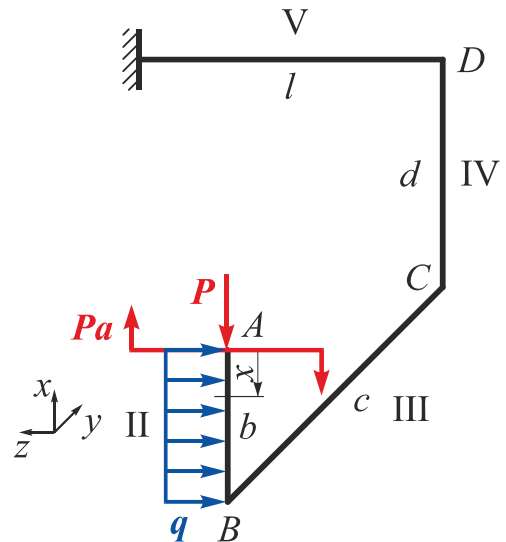


Рис. 2.34

**Участок III** ( $0 \leq x \leq c$ ,  $c = 2$  м).

Заменим распределенную нагрузку, действующую в пределах второго участка, равнодействующей и приведем систему внешних сил на участке II к начальному сечению участка III (точка B).

Расчетная схема участка III показана на рис. 2.35.

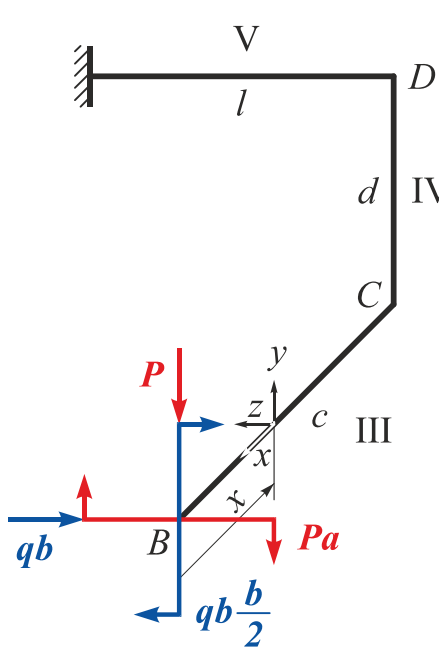


Рис. 2.35

$$N_x^{III} = 0;$$

$$Q_z^{III} = -qb = -15 \text{ кН};$$

$$Q_y^{III} = P = 10 \text{ кН};$$

$$M_x^{III} = -Pa - qb \frac{b}{2} = -10 \cdot 2 - 15 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = -27,5 \text{ кНм};$$

$$M_y^{III} = qbx = 15 \cdot 1 \cdot x \Big|_{x=0} = 0 \Big|_{x=c=2} = 30 \text{ кНм};$$

$$M_z^{III} = Px = 10x \Big|_{x=0} = 0 \Big|_{x=c=2} = 20 \text{ кНм}.$$

**Участок IV** ( $0 \leq x \leq d$ ,  $d = 1,5 \text{ м}$ ).

Приведем систему усилий, действующих на участке III, к начальному сечению участка IV (точка C) (рис. 2.36).

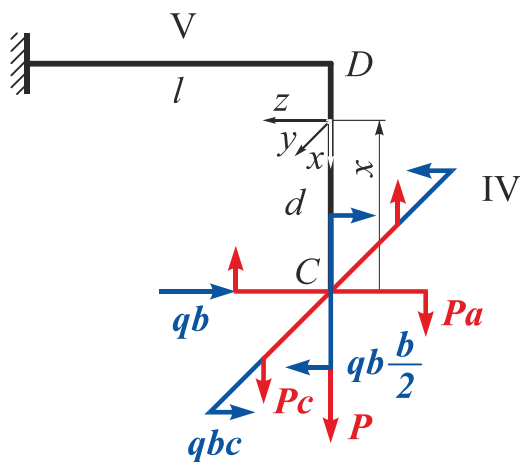


Рис. 2.36

$$N_x^{IV} = P = 10 \text{ кН};$$

$$Q_z^{IV} = -qb = -15 \text{ кН};$$

$$Q_y^{IV} = 0;$$

$$M_x^{IV} = -qbc = -15 \cdot 1 \cdot 2 = -30 \text{ кНм};$$

$$M_y^{IV} = -Pa - qb \frac{b}{2} + qbx = -10 \cdot 2 - 15 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 15 \cdot 1 \cdot x \Big|_{x=0} = -27,5 \text{ кНм} \Big|_{x=d=1,5} = -5 \text{ кНм};$$

$$M_z^{IV} = Pc = 20 \text{ кНм}.$$

Участок V ( $0 \leq x \leq l$ ,  $l = 2$  м).

Приведем систему усилий, действующих на участке IV, к начальному сечению участка V (точка D) (рис. 2.37).

$$N_x^V = qb = 15 \text{ кН};$$

$$Q_z^V = P = 10 \text{ кН};$$

$$Q_y^V = 0;$$

$$M_x^V = Pc = 10 \cdot 2 = 20 \text{ кНм};$$

$$M_y^V = qbd - qb \frac{b}{2} - Pa - Px =$$

$$= 15 \cdot 1 \cdot 1,5 - 15 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} - 10 \cdot 2 - 10x =$$

$$= \Big|_{x=0} = -5 \text{ кНм} \quad \Big|_{x=l=4} = -25 \text{ кНм};$$

$$M_z^V = qbc = 15 \cdot 1 \cdot 2 = 30 \text{ кНм}.$$

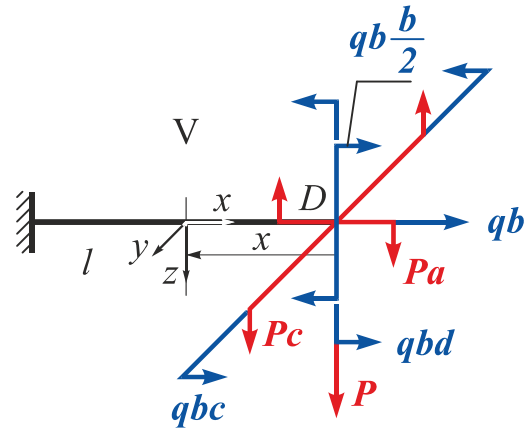


Рис. 2.37

3. Построим эпюры (рис. 2.38).

### Замечания

- При построении эпюр внутренних силовых факторов для ломаного бруса необходимо учитывать следующее:
  - эпюры  $N_x$  и  $M_x$  можно строить в любой плоскости;
  - эпюры  $Q_z$ ,  $Q_y$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  необходимо строить только **в плоскостях их действия**;
  - эпюры  $M_y$  и  $M_z$  строят со стороны **растянутых волокон** бруса.
- Если для элементов ломаного бруса, лежащих в параллельных плоскостях использовать одинаковое направление осей  $x, y, z$ , то на всех этих участках получим формально упорядоченную систему знаков для внутренних силовых факторов  $Q_z$  и  $M_y$ . Например, на участке I – такое же, как и на участке V, на участке II – такое же, как на участке IV (см. рис. 2.32), тогда

$$Q_z^I = P = 10 \text{ кН};$$

$$M_y^I = -Px = \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=a=2} = -20 \text{ кНм};$$

$$Q_z^{II} = qx = \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=b=1} = 15 \text{ кН};$$

$$M_y^{II} = -Pa - \frac{qx^2}{2} = \Big|_{x=0} = -20 \text{ кНм} \quad \Big|_{x=b=1} = -27,5 \text{ кНм}.$$

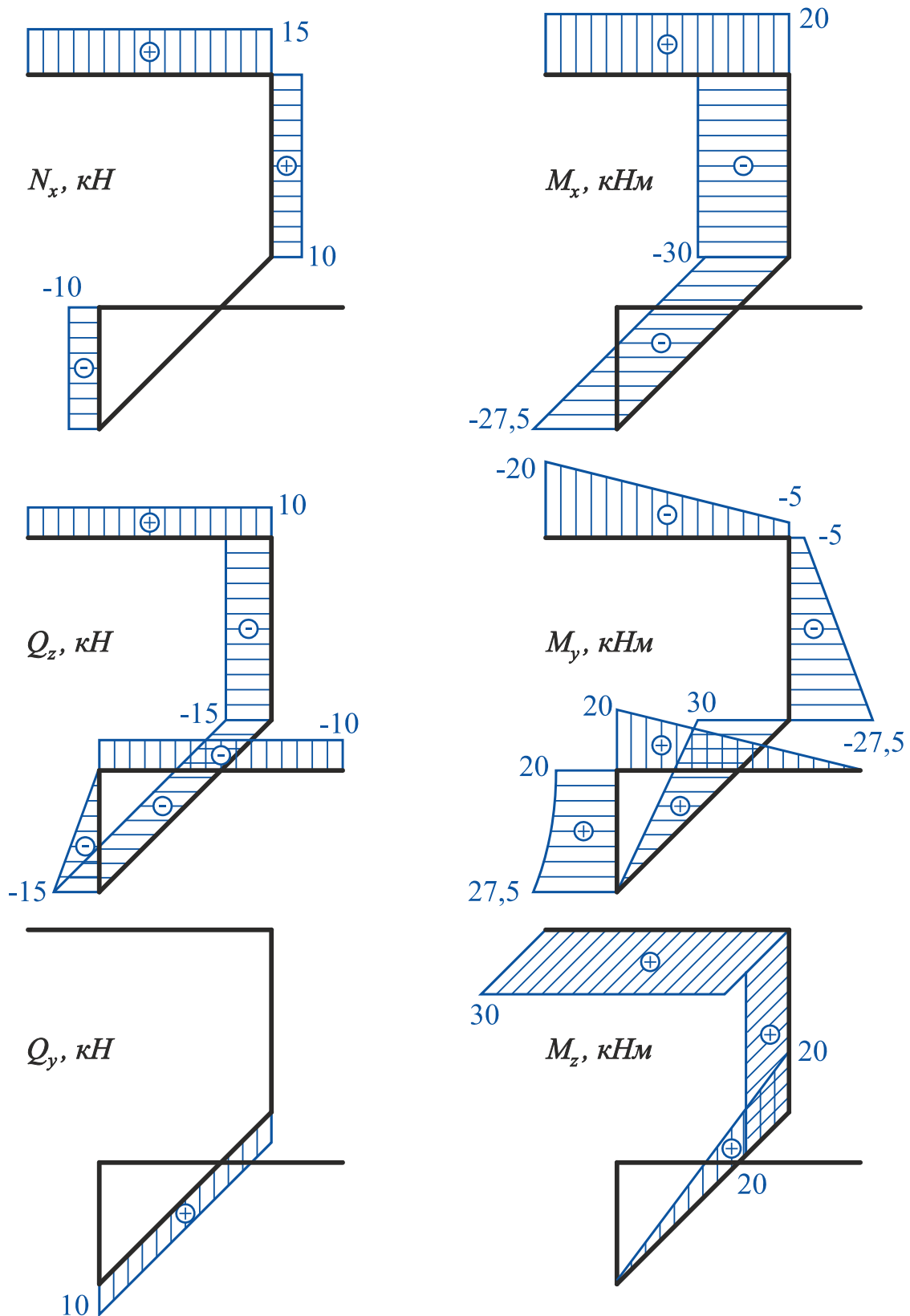


Рис. 2.38

4. Проверим правильность построения эпюр.

Для этого рассмотрим равновесие узлов  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  под действием внутренних усилий и внешних сил, приложенных в пределах этих узлов (рис. 2.39).

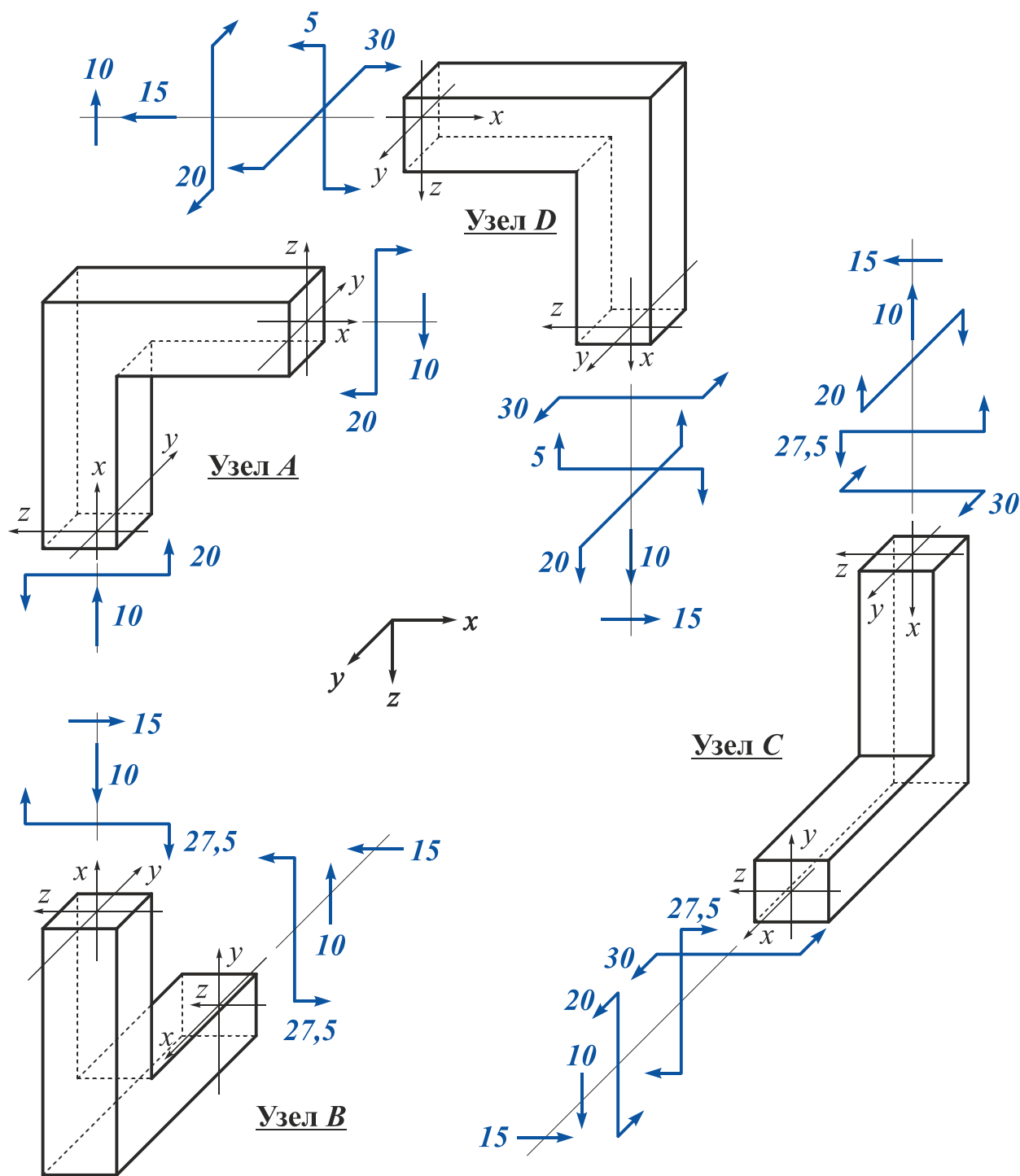


Рис. 2.39

Уравнения равновесия узла *A*:

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 0; & \sum P_y &= 0; & \sum P_z &= 10 - 10 = 0; \\ \sum M_x &= 0; & \sum M_y &= 20 - 20 = 0; & \sum M_z &= 0. \end{aligned}$$

Уравнения равновесия узла *B*:

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 10 - 10 = 0; & \sum P_y &= 0; & \sum P_z &= 10 - 10 = 0; \\ \sum M_x &= 0; & \sum M_y &= 27,5 - 27,5 = 0; & \sum M_z &= 0. \end{aligned}$$

Уравнения равновесия узла C:

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 15 - 15 = 0; & \sum P_y &= 0; & \sum P_z &= 10 - 10 = 0; \\ \sum M_x &= 20 - 20 = 0; & \sum M_y &= 27,5 - 27,5 = 0; & \sum M_z &= 30 - 30 = 0. \end{aligned}$$

Уравнения равновесия узла D:

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 15 - 15 = 0; & \sum P_y &= 0; & \sum P_z &= 10 - 10 = 0; \\ \sum M_x &= 20 - 20 = 0; & \sum M_y &= 5 - 5 = 0; & \sum M_z &= 30 - 30 = 0. \end{aligned}$$

### Пример 2.6

Построить эпюры внутренних силовых факторов для заданного ломаного бруса (рис. 2.40).

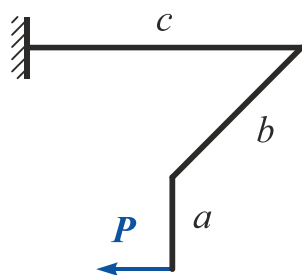


Рис. 2.40

*Дано:*  $P = 10 \text{ кН}$ ;  $a = 1 \text{ м}$ ;  $b = 2 \text{ м}$ ;  $l = 3 \text{ м}$ .

*Необходимо* построить эпюры

$$N_x, Q_z, Q_y, M_x, M_y, M_z.$$

### Решение

1. Начертим ломаный брус в масштабе и разобьем его на участки.

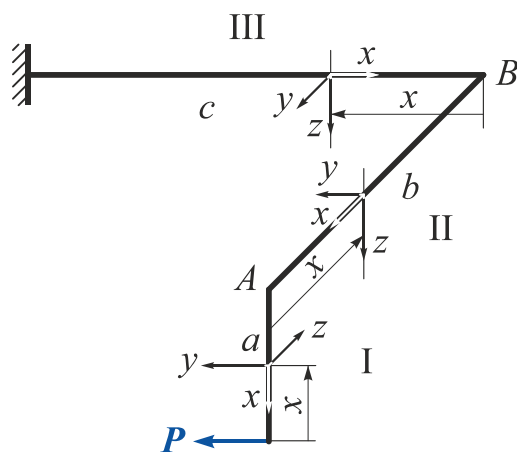


Рис. 2.41

В произвольном сечении участка III на расстоянии  $x$  от его начала расположим систему координат  $xuz$  так, чтобы ось  $x$  совпала с продольной осью бруса, ось  $z$  была направлена вниз, а горизонтальная ось  $y$  составила бы с двумя первыми правый ортогональный базис (рис. 2.41). На участке II систему координат получим поворотом системы координат участка III относительно оси  $z$  на  $90^\circ$ , на участке I – поворотом системы координат участка II относительно оси  $y$  на  $90^\circ$ .

2. Используя метод сечений, запишем уравнения внутренних силовых факторов на каждом участке.

**Участок I** ( $0 \leq x \leq a$ ,  $a = 1 \text{ м}$ ).

$$\begin{aligned} N_x^I &= 0; & Q_z^I &= 0; & Q_y^I &= P = 10 \text{ кН}; \\ M_x^I &= 0; & M_y^I &= 0; \\ M_z^I &= -Px = -10 \cdot x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=a=1} = -10 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

**Участок II** ( $0 \leq x \leq b$ ,  $b = 2$  м).

$$N_x^{II} = 0; \quad Q_z^{II} = 0; \quad Q_y^{II} = P = 10 \text{ кН};$$

$$M_x^{II} = -Pa = -10 \cdot 1 = -10 \text{ кНм}; \quad M_y^{II} = 0;$$

$$M_z^{II} = -Px = -10 \cdot x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=b=2} = -20 \text{ кНм}.$$

**Участок III** ( $0 \leq x \leq c$ ,  $c = 3$  м).

$$N_x^{III} = -P = -10 \text{ кН}; \quad Q_z^{III} = 0; \quad Q_y^{III} = 0;$$

$$M_x^{III} = 0; \quad M_y^{III} = -Pa = -10 \text{ кНм}; \quad M_z^{III} = -Pb = -20 \text{ кНм}.$$

3. Построим эпюры (рис. 2.42).

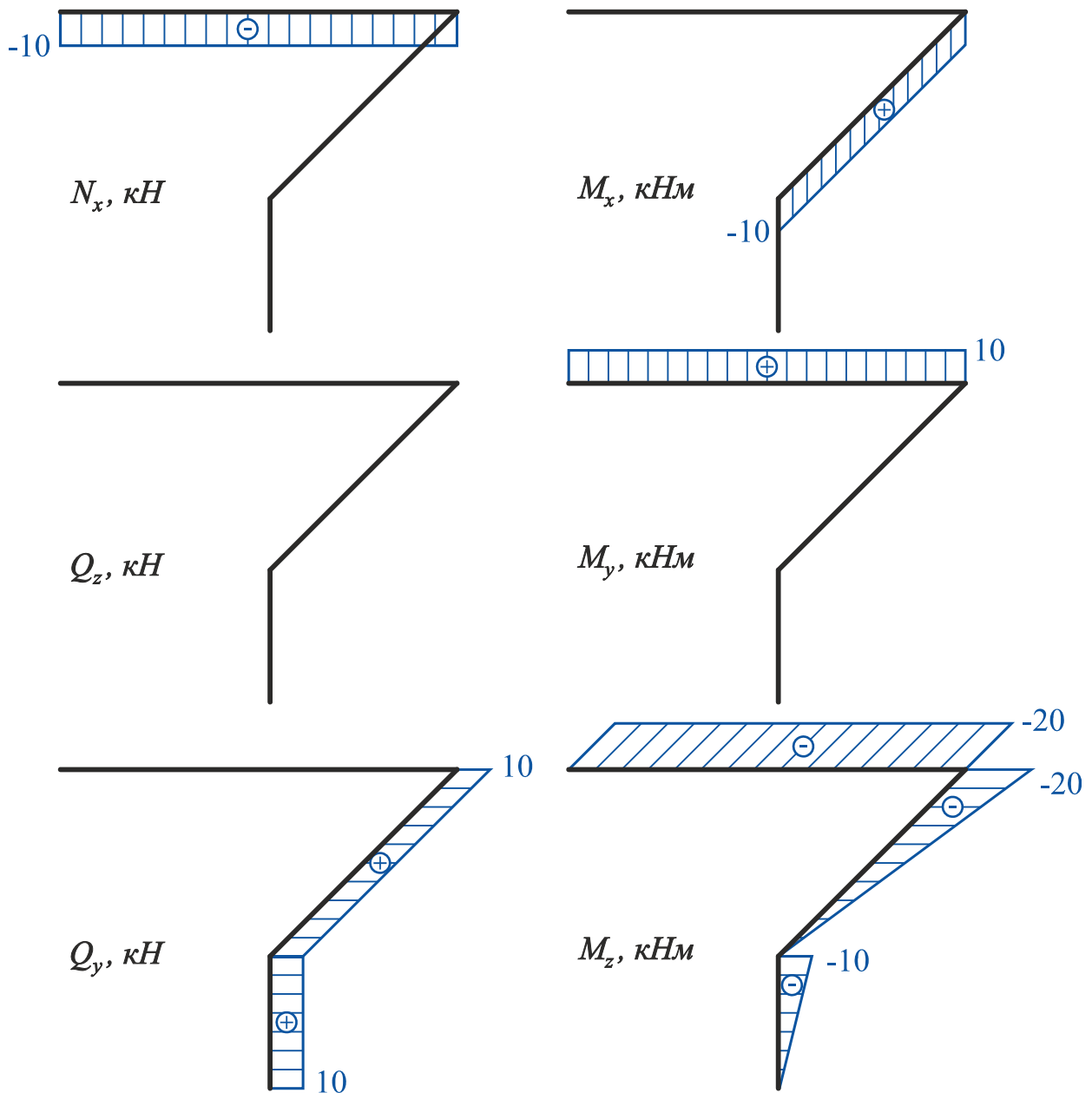


Рис. 2.42



4. Проверим правильность построения эпюр.

Для этого выделим бесконечно малые элементы ломаного бруса в местах сочленения его частей (узлы *A* и *B*) и рассмотрим их равновесие под действием внутренних усилий и внешних сил, приложенных в пределах этих узлов (рис. 2.43).

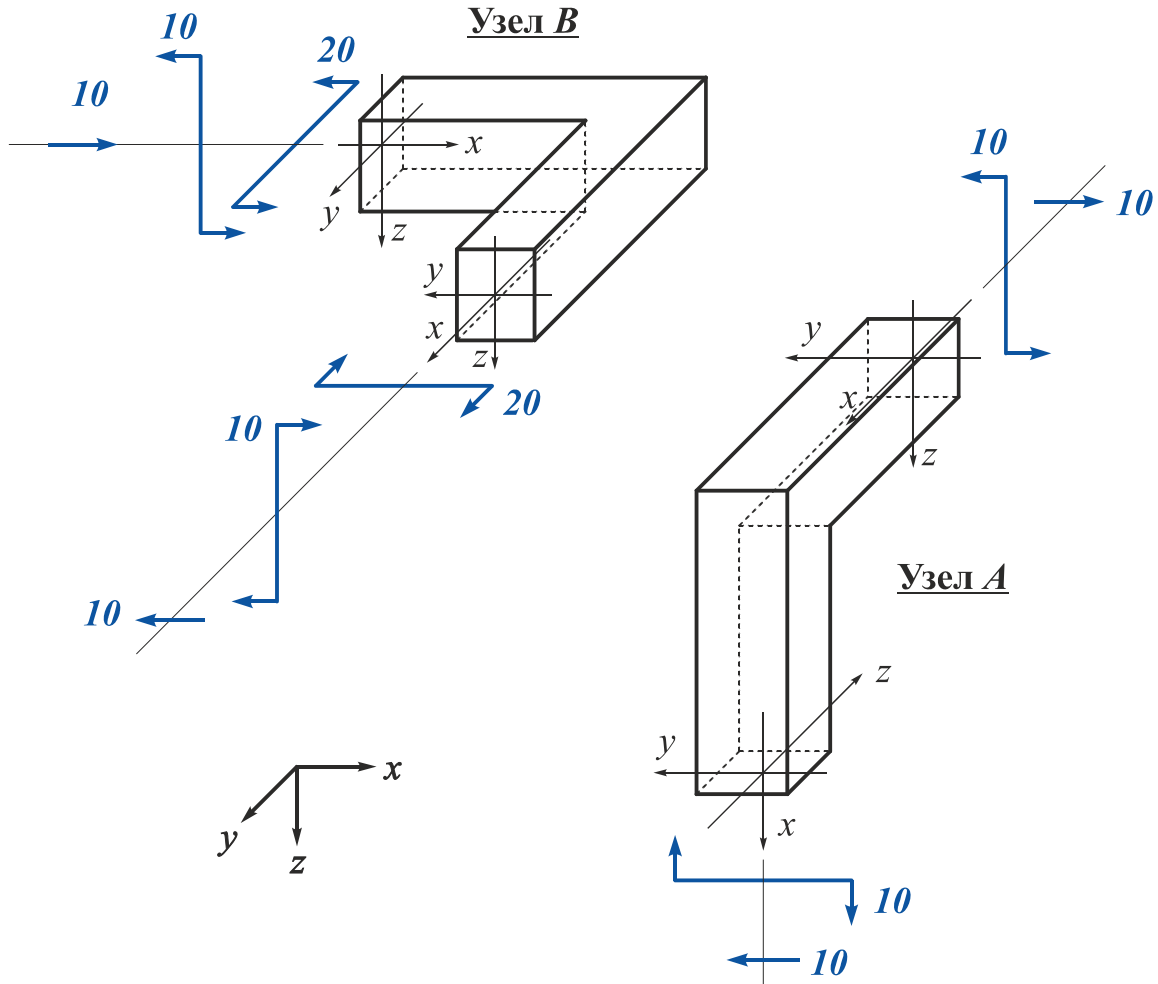


Рис. 2.43

Уравнения равновесия узла *A*:

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 10 - 10 = 0; & \sum P_y &= 0; & \sum P_z &= 0; \\ \sum M_x &= 0; & \sum M_y &= 10 - 10 = 0; & \sum M_z &= 0. \end{aligned}$$

Уравнения равновесия узла *B*:

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 10 - 10 = 0; & \sum P_y &= 0; & \sum P_z &= 0; \\ \sum M_x &= 0; & \sum M_y &= 10 - 10 = 0; & \sum M_z &= 20 - 20 = 0. \end{aligned}$$

## 3. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

### 3.1. Общие положения

Под сложным сопротивлением будем понимать такой вид деформации в поперечном сечении бруса, когда в этом сечении одновременно действуют два или более внутренних силовых фактора.

В общем случае в поперечном сечении бруса при произвольном нагружении могут действовать шесть внутренних силовых факторов (рис. 3.1):

- $N_x$  – продольная сила;
- $Q_y$  и  $Q_z$  – поперечные силы;
- $M_x$  – крутящий момент;
- $M_y$  и  $M_z$  – изгибающие моменты.

Реализация **растяжения-сжатия** (наличие  $N_x$ ) или **изгиба** (наличие  $M_y$  или  $M_z$ ) приводит к появлению в точках поперечного сечения бруса **нормальных напряжений**  $\sigma_x$ , а реализация **кручения** (наличие  $M_x$ ) или **сдвига** (наличие  $Q_y$  или  $Q_z$ ) – **касательных напряжений**  $\tau$ .

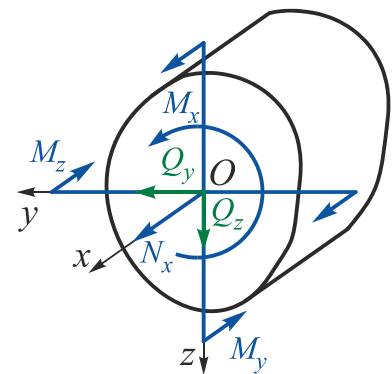


Рис. 3.1

Обычно в расчетах на прочность достаточно длинных брусьев не учитывают наличие поперечных сил  $Q_z$  и  $Q_y$ , поскольку вызываемые ими касательные напряжения значительно меньше касательных напряжений, обусловленных наличием крутящего момента  $M_x$ , и нормальных напряжений, обусловленных наличием  $M_y$  и  $M_z$ .

Напряжения, действующие в поперечных сечениях бруса при сложном сопротивлении, будем определять, применяя принцип независимости действия сил (суперпозиции), реализация которого справедлива, если конструкции:

- а) **физически линейные**, т.е. подчиняющиеся закону Гука ( $\sigma < \sigma_{\text{пц}}$ );
- б) **геометрически линейные**, когда под действием нагрузок все точки претерпевают перемещения, которые существенно меньше характерных размеров конструкции (т.е. справедлива гипотеза об относительной жесткости). Это позволяет при составлении уравнений статического равновесия для определения опорных реакций и внутренних силовых факторов не учитывать изменения линейных и угловых размеров конструкции.

Методика расчетов на прочность зависит от формы поперечного сечения бруса (прямоугольного, круглого).

## 3.2. Прямоугольное поперечное сечение

### 3.2.1. Изгиб с кручением и растяжением бруса прямоугольного поперечного сечения

Как показывает расчетная практика, в прямоугольном поперечном сечении

$$\tau_{max}(Q) \ll \tau_{max}(M_{кр}) \quad \text{и} \quad \tau_{max}(Q) \ll \sigma_{max}(M_{изг}),$$

поэтому касательными напряжениями, возникающими от действия поперечных сил, в этом случае пренебрегают.

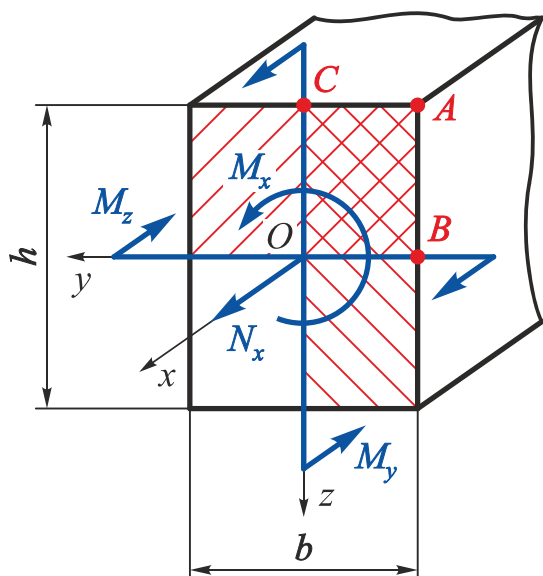


Рис. 3.2

Рассмотрим прямоугольное поперечное сечение (рис. 3.2) размером  $h \times b$  (для определенности примем  $h > b$ ), в котором действуют:

- а) продольная сила  $N_x$ ;
- б) крутящий момент  $M_x$ ;
- в) изгибающий момент  $M_y$ , действующий в вертикальной плоскости;
- г) изгибающий момент  $M_z$ , действующий в горизонтальной плоскости.

Построим эпюры напряжений от действия каждого внутреннего силового фактора и, используя принцип суперпозиции, рассмотрим отдельно результат их действия (рис. 3.3 – 3.6):

1. Действует только **продольная сила  $N_x$**  (рис. 3.3):

$$\sigma_x(N_x) = \frac{N_x}{F}, \quad (3.1)$$

где  $F = bh$  – площадь поперечного сечения.

2. Действует только **крутящий момент  $M_x$**  (рис. 3.4):

$$\tau_{max} = \tau_B = \tau_{B'} = \frac{M_x}{W_K}; \quad (3.2)$$

$$\tau'_{max} = \tau_C = \tau_{C'} = \gamma \tau_{max}; \quad (3.3)$$

$$\tau_A = \tau_{A'} = \tau_D = \tau_{D'} = 0, \quad (3.4)$$

где  $W_k = \alpha hb^2$  – момент сопротивления прямоугольного поперечного сечения при кручении;  
 $\alpha, \gamma$  – коэффициенты, зависящие от соотношения  $h/b$  (см. приложение).

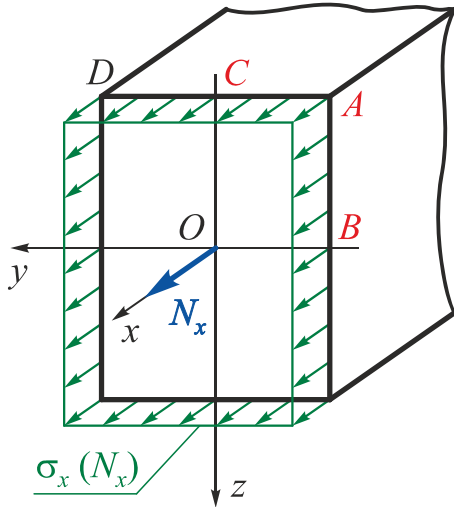


Рис. 3.3

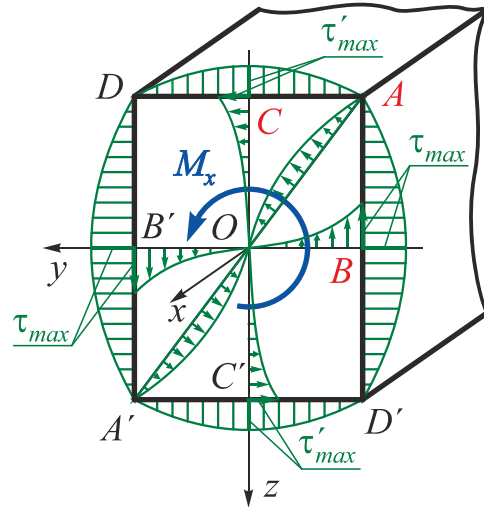


Рис. 3.4

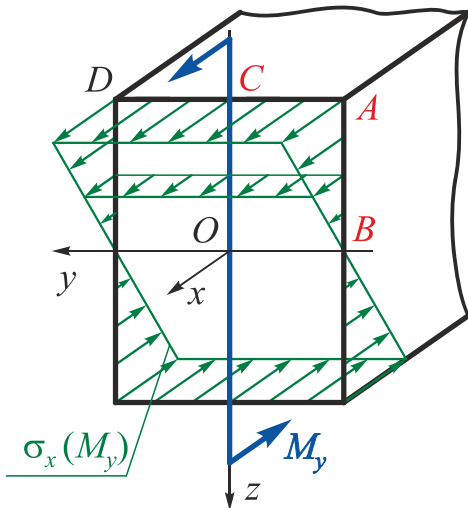


Рис. 3.5

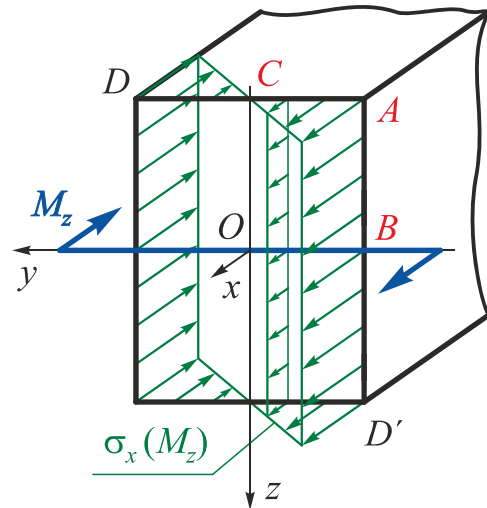


Рис. 3.6

3. Действует только *изгибающий момент*  $M_y$  (рис. 3.5):

$$\sigma_{x \max}(M_y) = \sigma_{xA}(M_y) = \sigma_{xC}(M_y) = \sigma_{xD}(M_y) = \frac{M_y}{W_y}, \quad (3.5)$$

где  $W_y = \frac{bh^2}{6}$  – момент сопротивления относительно оси  $y$  прямоугольного поперечного сечения при изгибе;

$$\sigma_{xB}(M_y) = 0. \quad (3.6)$$

В точках сечения, симметричных относительно его центра тяжести точкам  $A, C, D$ , действуют такие же по величине, но противоположные по знаку напряжения.

4. Действует только *изгибающий момент*  $M_z$  (рис. 3.6):

$$\sigma_{x \max}(M_z) = \sigma_{xA}(M_z) = \sigma_{xB}(M_z) = \sigma_{xD'}(M_z) = \frac{M_z}{W_z}, \quad (3.5)$$

где  $W_z = \frac{hb^2}{6}$  – момент сопротивления относительно оси  $z$  прямоугольного поперечного сечения при изгибе;

$$\sigma_{xC}(M_z) = 0. \quad (3.6)$$

В точках сечения, симметричных относительно его центра тяжести точкам  $A$ ,  $B$ ,  $D'$ , действуют такие же по величине, но противоположные по знаку напряжения.

Из анализа эпюр, показанных на рис. 3.3–3.6, следует, что однозначно нельзя указать *единственную* опасную точку. Следовательно, необходимо рассмотреть все *потенциально опасные точки сечения*.

**Замечание** | Ситуацию в точках  $D$  и  $D'$  не рассматривают потому, что в этих точках нормальные напряжения от действия изгибающих моментов  $M_y$  и  $M_z$  имеют разные знаки, т.е. их вычитают.

Рассмотрев эпюры, можно сделать следующие выводы:

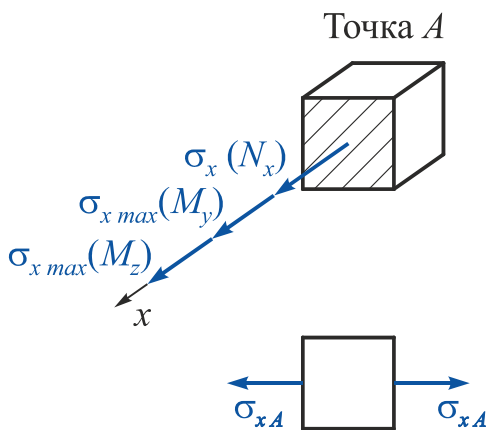


Рис. 3.7

1. В точке  $A$  сечения реализуется *линейное*, т.е. *простое напряженное состояние* (рис. 3.7), и в этой точке действуют наибольшие нормальные напряжения (заштрихована площадка, совпадающая с плоскостью поперечного сечения, напряжения на невидимых гранях не показаны).

Условие прочности в этой точке имеет вид

$$\sigma_{xA} = \sigma_{x \max} = \frac{|N_x|}{F} + \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (3.7)$$

**Замечание** | Во всех других угловых точках также реализуется линейное напряженное состояние.

2. Другими потенциально опасными точками сечения являются точки  $B$  (середица большей стороны) и  $C$  (середица меньшей стороны). Напряженное состояние в этих точках показано на рис. 3.8 (заштрихованы площадки, совпадающие с плоскостью поперечного сечения, напряжения на невидимых гранях не показаны).

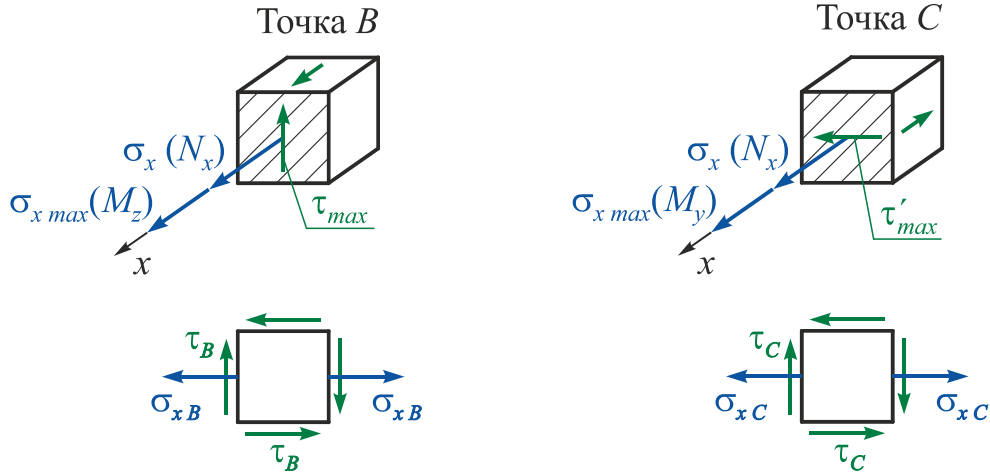


Рис. 3.8

В этих точках реализуется *плоское* (сложное) *напряженное состояние* частного вида, которое подробно было рассмотрено в п.п. 1.2.6, следовательно, расчет на прочность в этих потенциально опасных точках следует выполнять по одной из теорий прочности.

Условия прочности в точках  $B$  и  $C$  в соответствии с формулами (1.27) и (1.28) будут иметь следующий вид:

а) *по третьей теории прочности*

$$\sigma_{\text{ЭКВ } B}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{|N_x|}{F} + \frac{|M_z|}{W_z}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{W_k}\right)^2} \leq [\sigma]; \quad (3.8)$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ } C}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{|N_x|}{F} + \frac{|M_y|}{W_y}\right)^2 + 4\left(\gamma \frac{M_x}{W_k}\right)^2} \leq [\sigma]; \quad (3.9)$$

б) *по четвертой теории прочности*

$$\sigma_{\text{ЭКВ } B}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{|N_x|}{F} + \frac{|M_z|}{W_z}\right)^2 + 3\left(\frac{M_x}{W_k}\right)^2} \leq [\sigma]; \quad (3.10)$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ } C}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{|N_x|}{F} + \frac{|M_y|}{W_y}\right)^2 + 3\left(\gamma \frac{M_x}{W_k}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (3.11)$$

### 3.2.2. Порядок подбора размеров прямоугольного поперечного сечения

**Дано:**  $N_x, M_x, M_y, M_z, h/b = k, [\sigma]$  (см. рис. 3.2).

**Определить:**  $h, b$ .

1. Выделяют трехкратно растянутую (при  $N_x > 0$ ) или трехкратно сжатую (при  $N_x < 0$ ) четверть сечения (квадрант) и отмечают три его угловые точки  $A, B$  и  $C$ . Они и будут потенциально опасными. Четвертую угловую точку, совпадающую с центром тяжести сечения  $O$ , не рассматривают, так как в этой точке

$$\tau_O(M_x) = \sigma_{xO}(M_y) = \sigma_{xO}(M_z) = 0.$$

2. Размеры прямоугольного поперечного сечения следует определять поочередно для потенциально опасных точек  $A, B$  и  $C$ .

Условия прочности в этих точках в **первом приближении** записывают без учета  $N_x$ , так как обычно  $\sigma_x(N_x) \ll \sigma_x(M_y, M_z)$ . Расчет начинают с угловой точки  $A$ , которая в большинстве случаев оказывается опасной в действительности.

**Условие прочности в точке  $A$**

$$\sigma_{xA} = \sigma_{x_{max}} = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (3.12)$$

Здесь  $W_y = \frac{bh^2}{6}$ ;  $W_z = \frac{hb^2}{6}$ .

С учетом того, что

$$h/b = k \Rightarrow h = kb,$$

выражения для определения моментов сопротивления при изгибе можно переписать в виде

$$W_y = \frac{k^2 b^3}{6}; \quad W_z = \frac{kb^3}{6}. \quad (3.13)$$

Подставив уравнения (3.13) в (3.12), получим

$$\frac{6M_y}{k^2 b^3} + \frac{6M_z}{kb^3} \leq [\sigma],$$

откуда определим

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{\frac{6M_y}{k^2} + \frac{6M_z}{k}}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{6M_y + 6kM_z}{k^2[\sigma]}}. \quad (3.14)$$

**Условие прочности в точке  $B$** , лежащей на середине длинной стороны:

$$\sigma_{ЭКВ B}^{III} = \sqrt{\left(\frac{M_z}{W_z}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{W_k}\right)^2} \leq [\sigma]; \quad \sigma_{ЭКВ B}^{IV} = \sqrt{\left(\frac{M_z}{W_z}\right)^2 + 3\left(\frac{M_x}{W_k}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (3.15)$$

Здесь  $W_k = \alpha hb^2$ .

С учетом того, что  $h = kb$ ,

$$W_k = \alpha kb^3. \quad (3.16)$$

Подставив выражения (3.13) и (3.16) в (3.15), после преобразований получим

$$b^{III} \geq \sqrt[6]{\frac{\left(\frac{6M_z}{k}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{\alpha k}\right)^2}{[\sigma]^2}}; \quad b^{IV} \geq \sqrt[6]{\frac{\left(\frac{6M_z}{k}\right)^2 + 3\left(\frac{M_x}{\alpha k}\right)^2}{[\sigma]^2}}. \quad (3.17)$$

**Условие прочности в точке C**, лежащей на середине короткой стороны:

$$\sigma_{\text{ЭКВ } C}^{III} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4\left(\gamma \frac{M_x}{W_k}\right)^2} \leq [\sigma]; \quad \sigma_{\text{ЭКВ } C}^{IV} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 3\left(\gamma \frac{M_x}{W_k}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (3.18)$$

Подставив выражения (3.13) и (3.16) в (3.18), после преобразований запишем

$$b^{III} \geq \sqrt[6]{\frac{\left(\frac{6M_y}{k^2}\right)^2 + 4\left(\gamma \frac{M_x}{\alpha k}\right)^2}{[\sigma]^2}}; \quad b^{IV} \geq \sqrt[6]{\frac{\left(\frac{6M_y}{k^2}\right)^2 + 3\left(\gamma \frac{M_x}{\alpha k}\right)^2}{[\sigma]^2}}. \quad (3.19)$$

**Замечание** |  $\alpha, \gamma$  – коэффициенты, зависящие от соотношения  $h/b$  (см. приложение).

3. Выбирают бóльший размер  $b$ . Находят  $h = kb$ .

**Замечание** | Точка сечения, по которой выбрана бóльшая пара размеров, и будет самой опасной точкой поперечного сечения.

4. Если в поперечном сечении действует продольная сила  $N_x$ , **во втором приближении** проверяют прочность в опасной точке ( $A, B$  или  $C$ ) с учетом наличия  $N_x$  (в точке  $A$  – по соотношению (3.7); в точке  $B$  – по выражениям (3.8), (3.10) и в точке  $C$  – по формулам (3.9), (3.11) в зависимости от того, какую из теорий прочности приняли в качестве рабочей).

Если проверка прочности свидетельствует о выполнении условий прочности с точностью  $\Delta \sigma \leq 5 \%$ , то расчет окончен.

Если условие прочности в опасной точке **не выполняется**, необходимо **увеличивать** размеры  $h$  и  $b$ , используя метод последовательных приближений.

**Замечания** | 1. Если **один из изгибающих моментов**  $M_y$  или  $M_z$  **равен нулю**, то **угловые точки** сечения **исключаются** из разряда потенциально опасных.  
2. Если **крутящий момент**  $M_x$  **равен нулю**, то **угловая точка** становится **единственной** опасной точкой сечения.



### 3.3. Круглое поперечное сечение

#### 3.3.1 Изгиб с кручением бруса круглого поперечного сечения

Как показывает расчетная практика, в круглом поперечном сечении

$$\tau_{max}(Q) \ll \tau_{max}(M_{кр}) \quad \text{и} \quad \tau_{max}(Q) \ll \sigma_{max}(M_{изг}),$$

поэтому наличием касательных напряжений, возникающих от действия поперечных сил, в этом случае пренебрегают.

Поскольку все оси, проходящие через центр тяжести круглого поперечного сечения, являются главными центральными осями инерции этого сечения, то нет необходимости рассматривать отдельно изгиб в координатных плоскостях (горизонтальной и вертикальной).

Обычно рассматривают изгиб бруса круглого поперечного сечения под действием результирующего изгибающего момента (рис. 3.9)

$$M_{изг} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}. \quad (3.20)$$

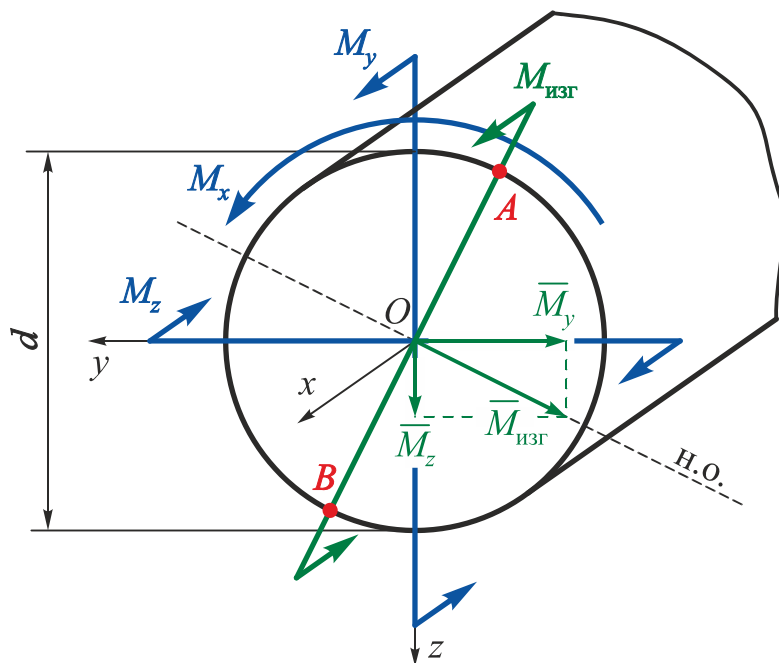


Рис. 3.9

Тогда наибольшие нормальные напряжения  $\sigma_x$ , действующие в точках *A* и *B*, наиболее удаленных от нейтральной оси, определим по формуле

$$\sigma_{x \max A} = |\sigma_{x \max B}| = \frac{M_{\text{изг}}}{W_{\text{н.о.}}} = \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{W_{\text{н.о.}}} \quad (3.21)$$

Касательные напряжения  $\tau$ , обусловленные действием крутящего момента  $M_x$ , имеют максимальную величину в периферийных точках сечения, т.е. на окружности, в том числе и в точках  $A$  и  $B$ :

$$\tau_{\max} = \tau_A = \tau_B = \frac{M_x}{W_\rho} \quad (3.22)$$

Следовательно, точки  $A$  и  $B$  являются самыми опасными точками всего сечения, так как в них действуют  $\sigma_{\max}$  и  $\tau_{\max}$ . Поскольку условия прочности в виде (1.27) и (1.28) безразличны по отношению к знакам  $\sigma$  и  $\tau$ , то точки  $A$  и  $B$  являются **равноопасными**.

В связи с тем, что напряженное состояние в рассматриваемых точках  $A$  и  $B$  плоское (рис. 3.10) (заштрихована площадка, совпадающая с плоскостью поперечного сечения, напряжения на невидимых гранях не показаны), то расчет на прочность необходимо выполнять по одной из теорий прочности (третьей или четвертой).

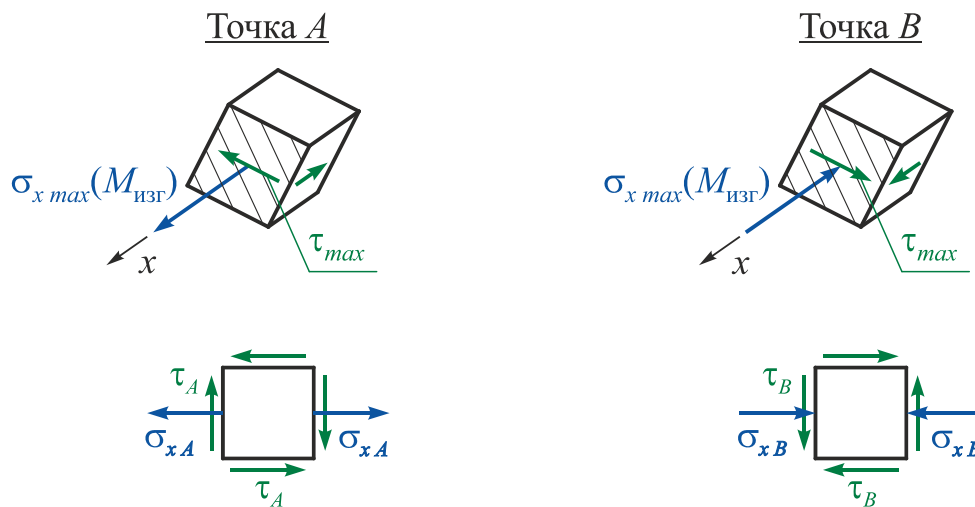


Рис. 3.10

Запишем условия прочности в точках  $A$  и  $B$ :

а) по **третьей теории прочности**

$$\sigma_{\text{экв } A(B)}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{\text{изг}}}{W_{\text{н.о.}}}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{W_\rho}\right)^2} \leq [\sigma],$$

где  $W_\rho = \frac{\pi d^3}{16}$  — полярный момент сопротивления;

$W_{\text{н.о.}} = \frac{\pi d^3}{32}$  – момент сопротивления относительно нейтральной оси.

Поскольку для круглого поперечного сечения

$$W_{\rho} = 2W_{\text{н.о.}},$$

то

$$\sigma_{\text{ЭКВА}(B)}^{\text{III}} = \sqrt{\frac{M_{\text{изг}}^2}{W_{\text{н.о.}}^2} + \frac{M_x^2}{W_{\text{н.о.}}^2}} = \frac{\sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_x^2}}{W_{\text{н.о.}}}.$$

Введем обозначение

$$M_{\text{расч}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_x^2} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + M_x^2}, \quad (3.23)$$

где  $M_{\text{расч}}^{\text{III}}$  – расчетный, или приведенный момент по третьей теории прочности.

Тогда окончательно

$$\sigma_{\text{ЭКВА}(B)}^{\text{III}} = \frac{M_{\text{расч}}^{\text{III}}}{W_{\text{н.о.}}} \leq [\sigma]. \quad (3.24)$$

б) по *четвертой теории прочности*

$$\sigma_{\text{ЭКВА}(B)}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{\text{изг}}}{W_{\text{н.о.}}}\right)^2 + 3\left(\frac{M_x}{W_{\rho}}\right)^2} \leq [\sigma].$$

Тогда

$$\sigma_{\text{ЭКВА}(B)}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{M_{\text{изг}}^2}{W_{\text{н.о.}}^2} + \frac{3}{4} \frac{M_x^2}{W_{\text{н.о.}}^2}} = \frac{\sqrt{M_{\text{изг}}^2 + 0,75M_x^2}}{W_{\text{н.о.}}}.$$

Введем обозначение

$$M_{\text{расч}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + 0,75M_x^2} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + 0,75M_x^2}, \quad (3.25)$$

где  $M_{\text{расч}}^{\text{IV}}$  – расчетный, или приведенный момент по четвертой теории прочности.

Тогда окончательно

$$\sigma_{\text{ЭКВА}(B)}^{\text{IV}} = \frac{M_{\text{расч}}^{\text{IV}}}{W_{\text{н.о.}}} \leq [\sigma]. \quad (3.26)$$

Так как

$$W_{\text{н.о.}} = \frac{\pi d^3}{32},$$

то воспользовавшись условием прочности (3.24) или (3.26), можно решить проектировочную задачу, т.е. определить диаметр поперечного сечения

$$d^{III} = \sqrt[3]{\frac{32M_{расч}^{III}}{\pi[\sigma]}} \quad (3.27)$$

или

$$d^{IV} = \sqrt[3]{\frac{32M_{расч}^{IV}}{\pi[\sigma]}}. \quad (3.28)$$

### 3.3.2. Изгиб с кручением и растяжением бруса круглого поперечного сечения

Этот расчетный случай отличается от предыдущего случая наличием продольной силы  $N_x$ .

Из двух равноопасных точек, рассмотренных ранее, опасной становится одна – та, в которой напряжения от действия продольной силы  $N_x$  и изгибающего момента  $M_{изг}$  суммируются.

Условия прочности в опасной точке:

а) по *третьей теории прочности*

$$\sigma_{ЭКВ}^{III} = \sqrt{\left(\frac{|N_x|}{F} + \frac{|M_{изг}|}{W_{н.о.}}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{W_\rho}\right)^2} \leq [\sigma]; \quad (3.29)$$

б) по *четвертой теории прочности*

$$\sigma_{ЭКВ}^{IV} = \sqrt{\left(\frac{|N_x|}{F} + \frac{|M_{изг}|}{W_{н.о.}}\right)^2 + 3\left(\frac{M_x}{W_\rho}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (3.30)$$

При проектировочном расчете конструкций в этом случае в первом приближении определяют диаметр  $d$  без учета продольной силы  $N_x$  по формуле (3.27) или (3.28), так как в большинстве случаев

$$\sigma_x(N_x) \ll \sigma_x(M_{изг}),$$

а во втором приближении проверку прочности в опасной точке ( $A$  или  $B$  в зависимости от направления  $N_x$ ) выполняют по соотношению (3.29) или (3.30).

### 3.4. Примеры решения задач

#### Пример 3.1

Для ломаного бруса построены эпюры внутренних силовых факторов (см. пример 2.1). Необходимо при  $[\sigma] = 220 \text{ МПа}$  подобрать:

- размеры круглого поперечного сечения;
- размеры прямоугольного поперечного сечения при  $k = h/b = 2$ ;
- построить эпюры распределения нормальных и касательных напряжений от действия  $N_x, M_x, M_y, M_z$  для прямоугольного поперечного сечения;
- показать напряженное состояние в опасных точках прямоугольного и круглого поперечных сечений;
- использовать третью и четвертую теории прочности для подбора круглого поперечного сечения, третью теорию прочности – для прямоугольного;
- сравнить вес полученных брусьев.

#### Решение

##### 1. Найдем опасное сечение.

Из анализа эпюр внутренних усилий (см. пример 2.1, рис. 2.12) видно, что самым опасным является сечение в заделке, в котором действуют:

$$N_x = 20 \text{ кН}; \quad M_x = 45 \text{ кНм}; \quad M_y = -30 \text{ кНм}; \quad M_z = 80 \text{ кНм}.$$

##### 2. Определим диаметр круглого поперечного сечения.

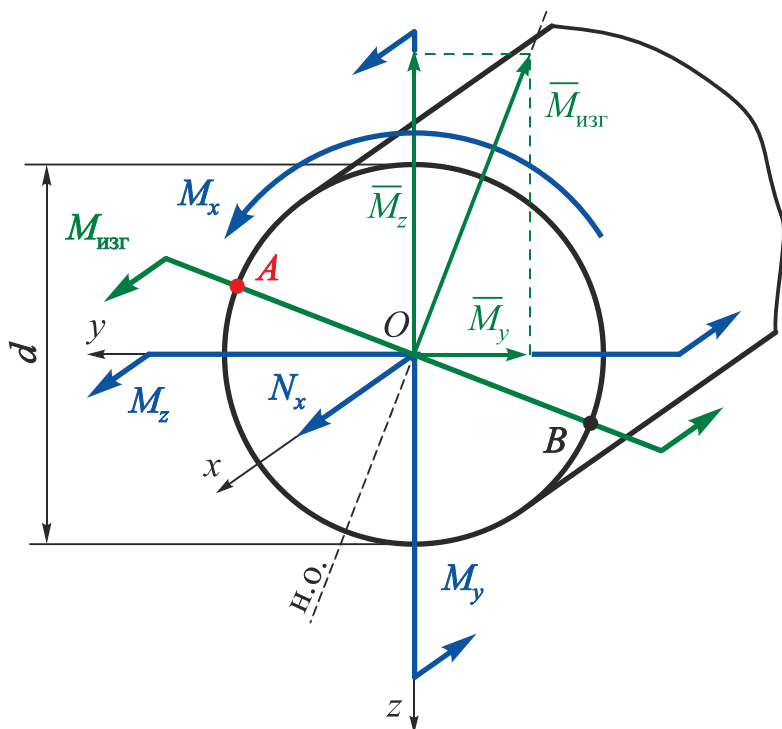


Рис. 3.11

Плоскость действия суммарного изгибающего момента  $M_{\text{изг}} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$  определяет положение точек наибольших изгибных нормальных напряжений (точки  $A$  и  $B$ ) (рис. 3.11). Из-за наличия нормальных напряжений сжатия, вызванных продольной силой  $N_x$ , наибольшая величина нормального напряжения будет в точке  $A$ , в которой напряжения от действия продольной силы и изгибающего момента суммируются.

Одновременно эта точка является точкой наибольших касательных напряжений в результате действия кручения, поскольку лежит на окружности поперечного сечения.

Таким образом, точка  $A$  является единственной опасной точкой круглого поперечного сечения.

Поскольку напряженное состояние в точке  $A$  плоское, то расчет на прочность необходимо выполнять по одной из теорий прочности (третьей и четвертой) (рис. 3.12).

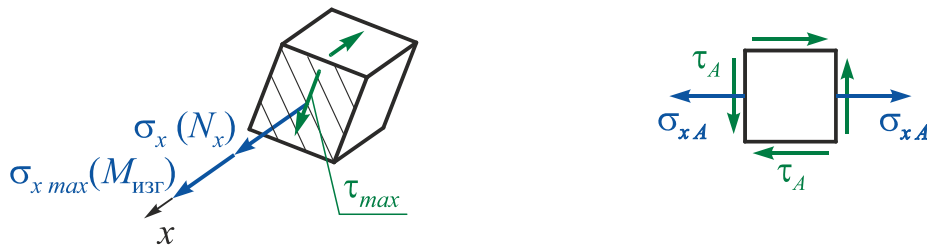


Рис. 3.12

### Третья теория прочности

В первом приближении для определения диаметра  $d$  запишем условие прочности в точке  $A$  без учета влияния продольной силы  $N_x$  (3.24):

$$\sigma_{\text{ЭКВ}A}^{\text{III}} = \frac{M_{\text{расч}}^{\text{III}}}{W_{\text{н.о.}}} = \left\{ \text{так как } W_{\text{н.о.}} = \frac{\pi d^3}{32} \right\} = \frac{32 M_{\text{расч}}^{\text{III}}}{\pi d^3} \leq [\sigma],$$

откуда получим

$$d^{\text{III}} = \sqrt[3]{\frac{32 M_{\text{расч}}^{\text{III}}}{\pi [\sigma]}},$$

где в соответствии с уравнением (3.23)

$$M_{\text{расч}}^{\text{III}} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + M_x^2} = \sqrt{30^2 + 80^2 + 45^2} = 96,566 \text{ кНм.}$$

Тогда

$$d^{\text{III}} \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 96,566 \cdot 10^3}{\pi \cdot 220 \cdot 10^6}} = 0,1647 \text{ м.}$$

Определим по формуле (3.29) действительные расчетные напряжения в опасной точке с учетом действия продольной силы  $N_x$ :

$$\sigma_{\text{ЭКВ}A}^{\text{III}} = \sqrt{\left( \frac{|N_x|}{F} + \frac{|M_{\text{изг}}|}{W_{\text{н.о.}}} \right)^2 + 4 \left( \frac{M_x}{W_\rho} \right)^2},$$

где  $M_{\text{изг}} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{30^2 + 80^2} = 85,44 \text{ кНм};$

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,1647^2}{4} = 2,1305 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2;$$

$$W_{\text{н.о.}} = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 0,1647^3}{32} = 4,3861 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3;$$

$$W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16} = 2W_{\text{н.о.}} = \frac{\pi \cdot 0,1647^3}{16} = 8,7722 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ЭКВ } A}^{\text{III}} &= \sqrt{\left(\frac{20 \cdot 10^3}{2,1305 \cdot 10^{-2}} + \frac{85,44 \cdot 10^3}{4,3861 \cdot 10^{-4}}\right)^2 + 4\left(\frac{45 \cdot 10^3}{8,7722 \cdot 10^{-4}}\right)^2} = \\ &= 220,995 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Перенапряжение

$$\Delta\sigma \% = \frac{\sigma_{\text{ЭКВ } A}^{\text{III}} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 \% = \frac{220,995 - 220}{220} \cdot 100 \% = 0,45 \% < 5 \%.$$

Таким образом, прочность ломаного бруса обеспечена.

#### **Замечание**

Так как  $\sigma_x(N_x) \ll [\sigma]$ , оценить вклад продольной силы  $N_x$  в нормальное напряжение, действующее в опасной точке, можно по формуле

$$\sigma_x(N_x) = \frac{N_x}{F} = \frac{20 \cdot 10^3}{2,1305 \cdot 10^{-2}} = 0,939 \text{ МПа}.$$

#### ***Четвертая теория прочности***

В первом приближении для определения диаметра  $d$  запишем условие прочности в точке  $A$  без учета влияния продольной силы  $N_x$  (см. (3.26)):

$$\sigma_{\text{ЭКВ } A}^{\text{IV}} = \frac{M_{\text{расч}}^{\text{IV}}}{W_{\text{н.о.}}} = \left\{ \text{так как } W_{\text{н.о.}} = \frac{\pi d^3}{32} \right\} = \frac{32M_{\text{расч}}^{\text{IV}}}{\pi d^3} \leq [\sigma],$$

откуда получим

$$d^{\text{IV}} = \sqrt[3]{\frac{32M_{\text{расч}}^{\text{IV}}}{\pi[\sigma]}},$$

где в соответствии с уравнением (3.25)

$$M_{\text{расч}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + 0,75 \cdot M_x^2} = \sqrt{30^2 + 80^2 + 0,75 \cdot 45^2} = 93,908 \text{ кНм}.$$

Тогда

$$d^{IV} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 93,908 \cdot 10^3}{\pi \cdot 220 \cdot 10^6}} = 0,1632 \text{ м.}$$

Определим по формуле (3.30) действительные расчетные напряжения в опасной точке с учетом действия продольной силы  $N_x$ :

$$\sigma_{\text{ЭКВ} A}^{IV} = \sqrt{\left(\frac{|N_x|}{F} + \frac{|M_{\text{изг}}|}{W_{\text{н.о.}}}\right)^2 + 3\left(\frac{M_x}{W_\rho}\right)^2},$$

где  $M_{\text{изг}} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{30^2 + 80^2} = 85,44 \text{ кНм};$

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,1632^2}{4} = 2,0918 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2;$$

$$W_{\text{н.о.}} = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 0,1632^3}{32} = 4,2674 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3;$$

$$W_\rho = \frac{\pi d^3}{16} = 2W_{\text{н.о.}} = \frac{\pi \cdot 0,1632^3}{16} = 8,5378 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ЭКВ} A}^{IV} &= \sqrt{\left(\frac{20 \cdot 10^3}{2,0918 \cdot 10^{-2}} + \frac{85,44 \cdot 10^3}{4,2674 \cdot 10^{-4}}\right)^2 + 3\left(\frac{45 \cdot 10^3}{8,5378 \cdot 10^{-4}}\right)^2} = \\ &= 220,916 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Перенапряжение

$$\Delta\sigma \% = \frac{\sigma_{\text{ЭКВ} A}^{IV} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 \% = \frac{220,916 - 220}{220} \cdot 100 \% = 0,42 \% < 5 \%.$$

Таким образом, прочность ломаного бруса обеспечена.

### 3. Определим размеры прямоугольного поперечного сечения.

Так как  $M_y > M_z$ , расположим сечение горизонтально для обеспечения прочности сечения при меньших его размерах.

Сечение с приложенными внутренними усилиями показано на рис. 3.13. Внутренние усилия приложены в соответствии с принятыми правилами знаков:

- положительная продольная сила  $N_x$  означает растяжение;
- положительный крутящий момент  $M_x$  – вращение против часовой стрелки;
- отрицательный изгибающий момент  $M_y$  – растяжение верхних и сжатие нижних волокон;



– положительный изгибающий момент  $M_z$  – растяжение левых и сжатие правых волокон.

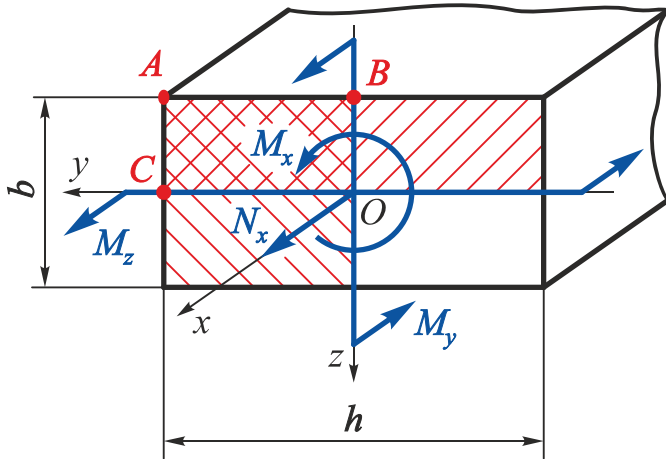


Рис. 3.13

Определим потенциально опасные точки сечения. Выделим трехкратно растянутую (так как  $N_x > 0$ ) четверть сечения (заштрихованная область на рис. 3.13) и отметим три ее угловые точки: A, B и C. Они и будут потенциально опасными.

Построим эпюры распределения нормальных и касательных напряжений по сечению (рис. 3.14–3.17).

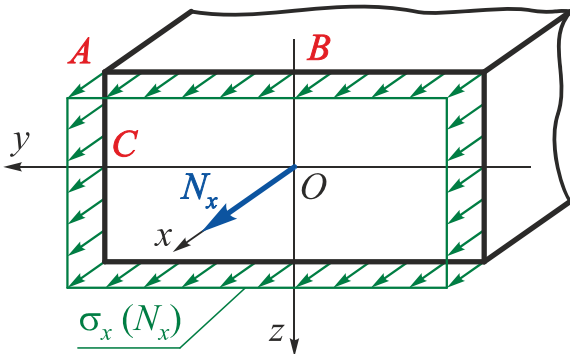


Рис. 3.14

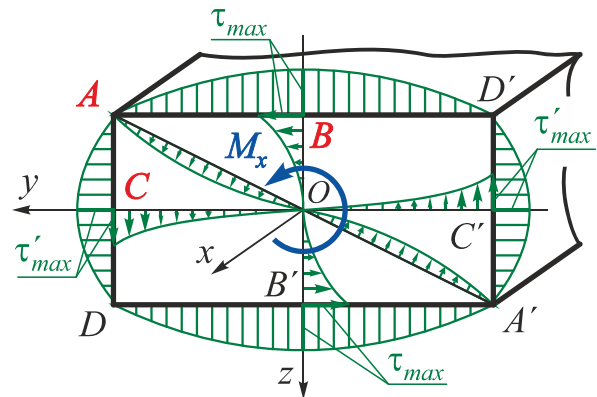


Рис. 3.15

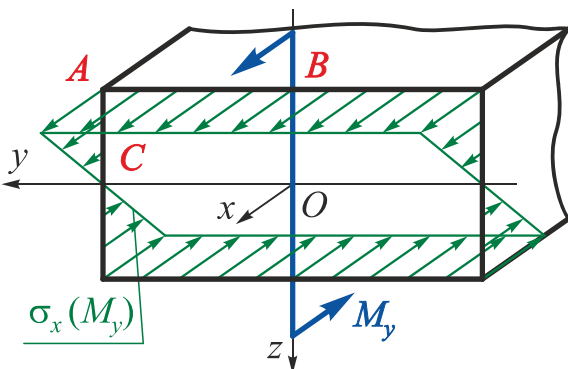


Рис. 3.16

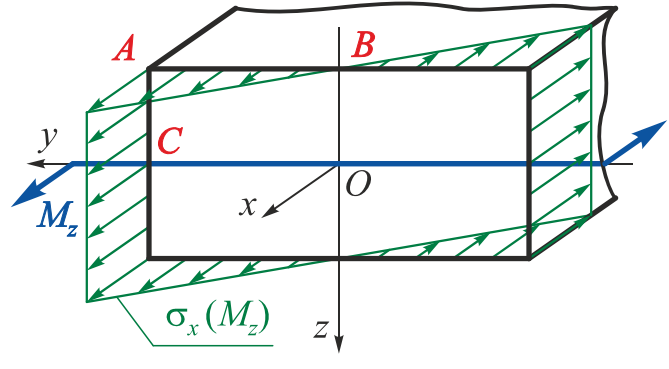


Рис. 3.17

В каждой из трёх потенциально опасных точек поперечного сечения покажем вид напряженного состояния и запишем условия прочности (без учета влияния продольной силы  $N_x$ ).

### Точка А

В точке А поперечного сечения реализуется линейное напряженное состояние (рис. 3.18).

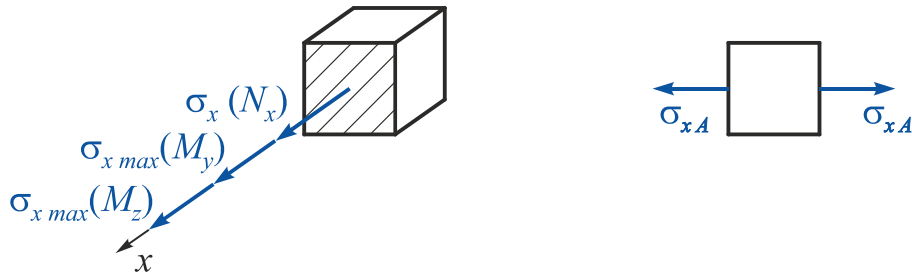


Рис. 3.18

Условие прочности в этой точке имеет вид

$$\sigma_{xA} = \sigma_{x\max} = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \leq [\sigma],$$

где  $W_y = \frac{hb^2}{6} = \left\{ \text{так как } k = \frac{h}{b} \Rightarrow h = kb \right\} = \frac{kb^3}{6};$

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \left\{ \text{так как } k = \frac{h}{b} \Rightarrow h = kb \right\} = \frac{k^2b^3}{6}.$$

Подставив значения  $W_y$  и  $W_z$  в условие прочности и проведя преобразования, получим

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{6k|M_y| + 6|M_z|}{k^2[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 2 \cdot |-30 \cdot 10^3| + 6 \cdot 80 \cdot 10^3}{2^2 \cdot 220 \cdot 10^6}} = 0,0985 \text{ м.}$$

### Точка В

В точке В поперечного сечения реализуется плоское напряженное состояние (рис. 3.19).

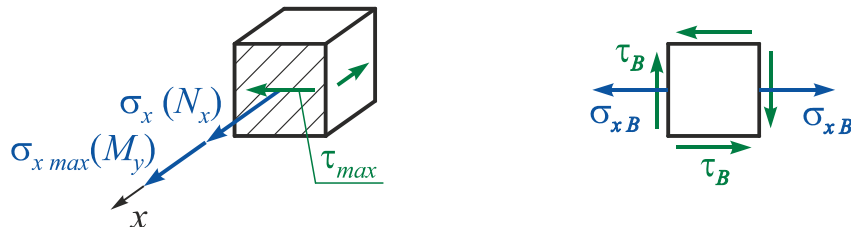


Рис. 3.19

Запишем условие прочности, используя третью теорию прочности:

$$\sigma_{\text{ЭКВ } B}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{W_k}\right)^2} \leq [\sigma],$$

где  $W_y = \frac{hb^2}{6} = \left\{ \text{так как } k = \frac{h}{b} \Rightarrow h = kb \right\} = \frac{kb^3}{6};$

$$W_k = \alpha hb^2 = \left\{ \text{так как } k = \frac{h}{b} \Rightarrow h = kb \right\} = \alpha kb^3;$$

$\alpha = 0,246$  – коэффициент, зависящий от соотношения  $h/b = 2$  (приложение).

Подставив значения  $W_y$  и  $W_k$  в условие прочности, получим

$$b^{III} \geq \sqrt{\frac{6 \left( \left( \frac{6M_y}{k} \right)^2 + 4 \left( \frac{M_x}{\alpha k} \right)^2 \right)}{[\sigma]^2}} = \sqrt{\frac{6 \left( \left( \frac{6 \cdot |-30 \cdot 10^3|}{2} \right)^2 + 4 \left( \frac{45 \cdot 10^3}{0,246 \cdot 2} \right)^2 \right)}{(220 \cdot 10^6)^2}} = 0,0975 \text{ м.}$$

### Точка С

В точке С поперечного сечения реализуется плоское напряженное состояние (рис. 3.20).

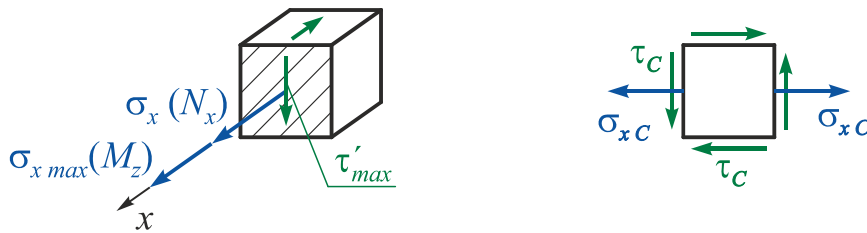


Рис. 3.20

Запишем условие прочности, используя третью теорию прочности:

$$\sigma_{\text{ЭКВ } C}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left( \frac{M_z}{W_z} \right)^2 + 4 \left( \gamma \frac{M_x}{W_k} \right)^2} \leq [\sigma],$$

где  $W_z = \frac{bh^2}{6} = \left\{ \text{так как } k = \frac{h}{b} \Rightarrow h = kb \right\} = \frac{k^2 b^3}{6};$

$$W_k = \alpha hb^2 = \left\{ \text{так как } k = \frac{h}{b} \Rightarrow h = kb \right\} = \alpha kb^3;$$

$\alpha = 0,246$ ,  $\gamma = 0,795$  – коэффициенты, зависящие от соотношения  $h/b = 2$  (см. приложение).

Подставив значения  $W_z$  и  $W_k$  в условие прочности, получим

$$b^{III} \geq \sqrt{\frac{6 \left( \left( \frac{6M_z}{k^2} \right)^2 + 4 \left( \gamma \frac{M_x}{\alpha k} \right)^2 \right)}{[\sigma]^2}} = \sqrt{\frac{6 \left( \left( \frac{6 \cdot (80 \cdot 10^3)}{2^2} \right)^2 + 4 \left( 0,795 \cdot \frac{45 \cdot 10^3}{0,246 \cdot 2} \right)^2 \right)}{(220 \cdot 10^6)^2}} = 0,09499 \text{ м.}$$

Выберем бóльший из трех размеров  $b$ :

$$\begin{cases} b_A \geq 0,0985 \text{ м}; \\ b_B \geq 0,0975 \text{ м}; \\ b_C \geq 0,09499 \text{ м}. \end{cases}$$

Точка  $A$  – самая опасная точка поперечного сечения.

Расчетные размеры прямоугольного поперечного сечения и его геометрические характеристики:

$$b = 0,0985 \text{ м}; \quad h = kb = 2 \cdot 0,0985 = 0,197 \text{ м};$$

$$F = bh = 0,0985 \cdot 0,197 = 0,0194 \text{ м}^2;$$

$$W_y = \frac{hb^2}{6} = \frac{0,197 \cdot 0,0985^2}{6} = 3,1856 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3;$$

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{0,0985 \cdot 0,197^2}{6} = 6,3711 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3;$$

$$W_k = \alpha hb^2 = 0,246 \cdot 0,197 \cdot 0,0985^2 = 4,7019 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Так как в точке  $A$  реализуется линейное напряженное состояние, то определим вклад продольной силы  $N_x$  в суммарное нормальное напряжение по формуле

$$\sigma_{xA}(N_x) = \frac{N_x}{F} = \frac{20 \cdot 10^3}{0,0194} = 1,031 \text{ МПа}.$$

Перенапряжение

$$\Delta\sigma \% = \frac{\sigma_{xA}(N_x)}{[\sigma]} \cdot 100 \% = \frac{1,031}{220} \cdot 100 \% = 0,47 \% < 5 \%.$$

Таким образом, прочность ломаного бруса обеспечена.

**4. Сравним по весу** брусья прямоугольного и круглого поперечных сечений, найденные по третьей теории прочности:

$$\frac{G^\circ}{G^\square} = \frac{F^\circ}{F^\square} = \frac{2,1305 \cdot 10^{-2}}{0,0194} = 1,098.$$

Таким образом, при заданном сочетании внутренних силовых факторов и соотношения сторон прямоугольника  $k = h/b = 2$  для уменьшения веса конструкции выгоднее применять прямоугольное поперечное сечение.

Однако наибольший габаритный размер прямоугольного поперечного сечения больше диаметра круглого:

$$h = 0,197 \text{ м} > d = 0,1647 \text{ м}.$$

### Пример 3.2

В опасном сечении бруса действуют изгибающий момент  $M_y = 5 \text{ кНм}$  и крутящий момент  $M_x = 20 \text{ кНм}$  (рис. 3.21). Подобрать по четвертой теории прочности диаметр  $d$  круглого, размер  $a$  квадратного, размеры  $b$  и  $h$  ( $k = h/b = 1,75$ ) прямоугольных поперечных сечений, если  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ . Показать напряженное состояние в опасных точках поперечных сечений, сравнить брусья по весу.

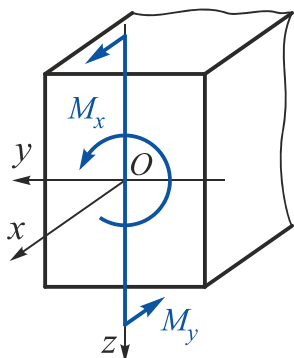


Рис. 3.21

*Дано:*  $M_y = -5 \text{ кНм}$ ;  $M_x = 20 \text{ кНм}$ ;

$[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ ;  $k = h/b = 1,75$ ;

для квадратного сечения  $\alpha = 0,208$ ;  $\gamma = 1$ ;

для прямоугольного сечения  $\alpha = 0,239$ ;  $\gamma = 0,820$ .

*Необходимо* определить  $d$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $h$ ; показать напряженное состояние в опасных точках поперечных сечений; сравнить брусья по весу.

### Решение

#### 1. Определим диаметр круглого поперечного сечения.

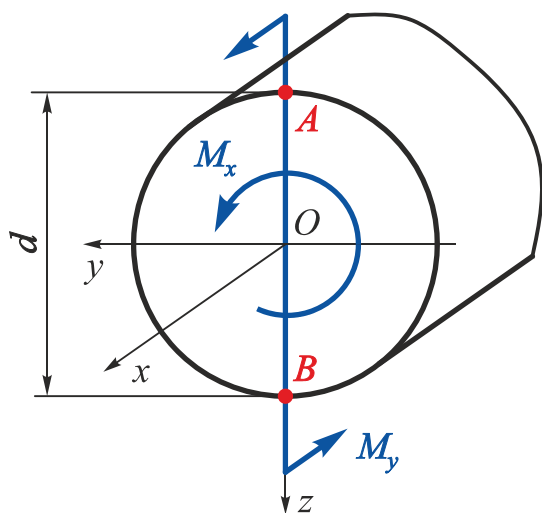


Рис. 3.22

В круглом поперечном сечении при указанных параметрах нагружения наибольшие нормальные напряжения от действия изгибающего момента  $M_y$  возникают в точках  $A$  и  $B$  поперечного сечения, наиболее удаленных от нейтральной оси  $y$  (рис. 3.22).

Одновременно они являются точками наибольших касательных напряжений от действия кручения, поскольку лежат на окружности поперечного сечения.

Следовательно, точки  $A$  и  $B$  являются самыми опасными точками всего сечения, поскольку в них действуют напряжения  $\sigma_{max}$  и  $\tau_{max}$ . Поскольку условия прочности (1.27) и (1.28) безразличны по отношению к знакам  $\sigma$  и  $\tau$ , то точки  $A$  и  $B$  являются **равноопасными**. Поэтому рассмотрим напряженное состояние только в одной точке  $A$ .

Напряженное состояние в точке  $A$  – плоское, поэтому расчет на прочность необходимо выполнять по четвертой теории прочности (рис. 3.23).



Рис. 3.23

Для определения диаметра  $d$  запишем условие прочности (3.26)

$$\sigma_{\text{ЭКВА}}^{IV} = \frac{M_{\text{расч}}^{IV}}{W_{\text{н.о.}}} = \left\{ \text{так как } W_{\text{н.о.}} = \frac{\pi d^3}{32} \right\} = \frac{32 M_{\text{расч}}^{IV}}{\pi d^3} \leq [\sigma],$$

откуда получим

$$d^{IV} = \sqrt[3]{\frac{32 M_{\text{расч}}^{IV}}{\pi [\sigma]}},$$

где в соответствии с уравнением (3.25)

$$M_{\text{расч}}^{IV} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + 0,75 \cdot M_x^2} = \sqrt{5^2 + 0^2 + 0,75 \cdot 20^2} = 18,028 \text{ кНм.}$$

Тогда

$$d^{IV} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 18,028 \cdot 10^3}{\pi \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0,1047 \text{ м.}$$

## 2. Определим размеры квадратного поперечного сечения.

В квадратном поперечном сечении при указанных параметрах нагружения (рис. 3.24) остаются две потенциально опасные и при этом равноопасные точки  $C$  и  $C'$ . В этих точках действуют наибольшие нормальное и касательное напряжения.

Угловые точки сечения  $A$ ,  $A'$ ,  $D$  и  $D'$  выпадают из ряда потенциально опасных, так как  $\sigma_{xA} = \sigma_{xA'} = \sigma_{xD} = \sigma_{xD'} = \sigma_{x \text{max}}$ , а  $\tau_A = \tau_{A'} = \tau_D = \tau_{D'} = 0$ .

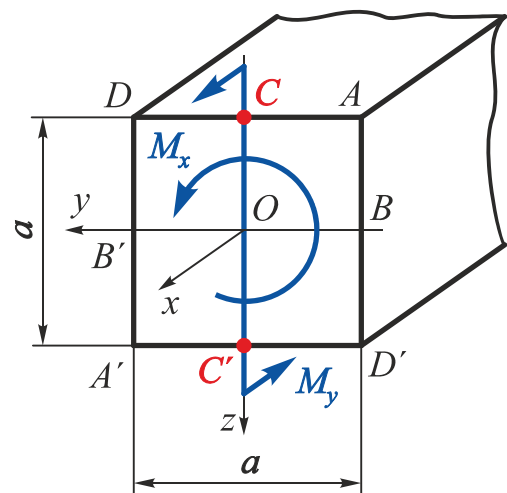


Рис. 3.24

Точки  $B$  и  $B'$  также исключают из разряда потенциально опасных, поскольку  $\sigma_{xB} = \sigma_{xB'} = 0$ , а  $\tau_B = \tau_{B'} = \tau_{\text{max}}$ .

Поскольку точки  $C$  и  $C'$  равноопасны, рассмотрим только одну из этих точек – точку  $C$ . В этой точке реализуется плоское напряженное состояние (рис. 3.25).



Рис. 3.25

Запишем условие прочности, используя четвертую теорию прочности:

$$\sigma_{\text{ЭКВ } C}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 3\left(\frac{M_x}{W_k}\right)^2} \leq [\sigma],$$

где  $W_y = \frac{hb^2}{6} = \left\{ \text{так как } h = b = a \Rightarrow k = \frac{a}{b} = 1 \right\} = \frac{a^3}{6};$

$$W_k = \alpha hb^2 = \left\{ \text{так как } h = b = a \Rightarrow k = \frac{a}{b} = 1 \right\} = \alpha a^3;$$

$\alpha = 0,239$  – коэффициент, зависящий от соотношения  $h/b = 1$  (см. приложение).

Подставив значения  $W_y$  и  $W_k$  в условие прочности, получим

$$a^{IV} \geq \sqrt[6]{\frac{(6M_y)^2 + 3\left(\frac{M_x}{\alpha}\right)^2}{[\sigma]^2}} = \sqrt[6]{\frac{(6 \cdot |-5 \cdot 10^3|)^2 + 3\left(\frac{20 \cdot 10^3}{0,208}\right)^2}{(160 \cdot 10^6)^2}} = 0,0974 \text{ м.}$$

### 3. Определим размеры прямоугольного поперечного сечения.

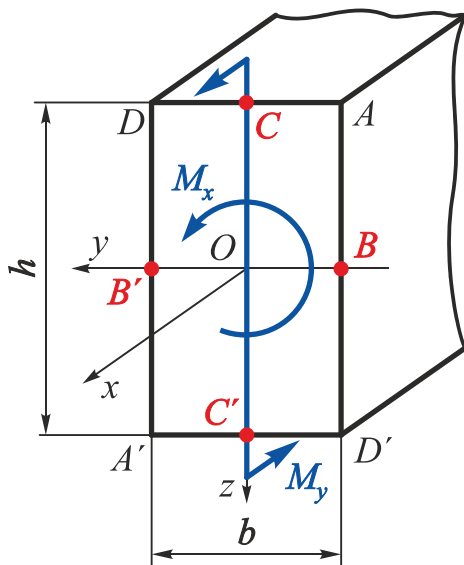


Рис. 3.26

В прямоугольном поперечном сечении при указанных параметрах нагружения (рис. 3.26) потенциально опасными являются как равноопасные точки  $B$  и  $B'$ , в которых действуют напряжения

$$\sigma_{xB} = \sigma_{xB'} = 0 \text{ и } \tau_B = \tau_{B'} = \tau_{max},$$

так и равноопасные точки  $C$  и  $C'$ , в которых действуют напряжения

$$\sigma_{xC} = \sigma_{xC'} = \sigma_{x max} \text{ и } \tau_C = \tau_{C'} = \tau'_{max}.$$

Угловые точки  $A, A', D$  и  $D'$  сечения выпадают из ряда потенциально опасных, так как

$$\sigma_{xA} = \sigma_{xA'} = \sigma_{xD} = \sigma_{xD'} = \sigma_{x max},$$

а  $\tau_A = \tau_{A'} = \tau_D = \tau_{D'} = 0.$

Поскольку точки  $B$  и  $B'$  равноопасны, рассмотрим только одну из этих точек – точку  $B$ . Эта точка находится в условиях чистого сдвига (рис. 3.27).



Рис. 3.27

Условие прочности в точке  $B$  имеет вид

$$\tau_B = \tau_{max} = \frac{|M_x|}{W_K} \leq [\tau] \approx 0,5 \cdot [\sigma],$$

где  $W_K = \alpha hb^2 = \left\{ \text{так как } k = \frac{h}{b} \Rightarrow h = kb \right\} = \alpha kb^3;$

$\alpha = 0,239$  – коэффициент, зависящий от соотношения  $h/b = 1,75$  (см. приложение).

Подставив значения  $W_K$  в условие прочности, получим

$$b_B \geq \sqrt[3]{\frac{|M_x|}{\alpha k \cdot 0,5 \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{20 \cdot 10^3}{0,239 \cdot 1,75 \cdot 0,5 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0,0842 \text{ м.}$$

Так как точки  $C$  и  $C'$  равноопасны, рассмотрим только одну из этих точек – точку  $C$ . В этой точке реализуется плоское напряженное состояние (рис. 3.28).



Рис. 3.28

Запишем условие прочности, используя четвертую теорию прочности

$$\sigma_{\text{ЭКВ } C}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 3\left(\gamma \frac{M_x}{W_K}\right)^2} \leq [\sigma],$$

где  $W_y = \frac{bh^2}{6} = \left\{ \text{так как } k = \frac{h}{b} \Rightarrow h = kb \right\} = \frac{k^2 b^3}{6};$

$$W_K = \alpha hb^2 = \left\{ \text{так как } k = \frac{h}{b} \Rightarrow h = kb \right\} = \alpha kb^3;$$

$\alpha = 0,239$ ,  $\gamma = 0,820$  – коэффициенты, зависящие от соотношения  $h/b = 1,75$  (см. приложение).



Подставив значения  $W_y$  и  $W_k$  в условие прочности, получим

$$b_c^{IV} \geq \sqrt{\frac{\left(\frac{6M_y}{k^2}\right)^2 + 3\left(\gamma \frac{M_x}{\alpha k}\right)^2}{[\sigma]^2}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{6 \cdot |-5 \cdot 10^3|}{1,75^2}\right)^2 + 3\left(0,820 \cdot \frac{20 \cdot 10^3}{0,239 \cdot 1,75}\right)^2}{(160 \cdot 10^6)^2}} = 0,0753 \text{ м.}$$

Выберем бóльший из двух размеров  $b$ :

$$\begin{cases} b_B \geq 0,0842 \text{ м;} \\ b_C \geq 0,0753 \text{ м.} \end{cases}$$

Точка  $B$  – самая опасная точка поперечного сечения.

Окончательные размеры прямоугольного поперечного сечения:

$$b = 0,0842 \text{ м;} \quad h = kb = 1,75 \cdot 0,0842 = 0,1474 \text{ м.}$$

**4. Сравним по весу брусья круглого, квадратного и прямоугольного поперечных сечений.**

Вычислим площади поперечных сечений:

круглого

$$F^\circ = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,1047^2}{4} = 8,6096 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2;$$

квадратного

$$F^\square = a^2 = 0,0974^2 = 9,4868 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2;$$

прямоугольного

$$F^\square = bh = 0,0842 \cdot 0,1474 = 12,4111 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Тогда

$$\frac{G^\square}{G^\circ} = \frac{F^\square}{F^\circ} = \frac{9,4868 \cdot 10^{-3}}{8,6096 \cdot 10^{-3}} = 1,102;$$

$$\frac{G^\square}{G^\circ} = \frac{F^\square}{F^\circ} = \frac{12,4111 \cdot 10^{-3}}{8,6096 \cdot 10^{-3}} = 1,442.$$

Таким образом, при заданном сочетании внутренних силовых факторов и соотношения сторон прямоугольника  $k = h/b = 1,75$  для уменьшения веса конструкции выгоднее применять круглое поперечное сечение, так как оно легче квадратного на 10,2 % и прямоугольного на 44,2 %.

В этом случае круглое поперечное сечение предпочтительнее и по габаритным размерам.

## 3.5. Частные случаи сложного сопротивления

### 3.5.1. Косой изгиб

Косой изгиб, как и плоский, подразделяют на чистый и поперечный.

**Чистый косой изгиб** реализуется в том случае, когда в поперечном сечении балки действует только изгибающий момент и плоскость его действия не содержит ни одну из главных центральных осей инерции сечения. При этом не имеет значения, являются ли главные центральные оси инерции сечения осями его симметрии или нет.

**Поперечный косой изгиб** реализуется при условии, что поперечное сечение балки имеет **две оси симметрии** и поперечные нагрузки действуют в различных сечениях и в различных плоскостях, содержащих продольную ось балки, или поперечные нагрузки действуют в одной силовой плоскости, которая содержит продольную ось балки, но не совпадает ни с одной из плоскостей симметрии балки (рис. 3.29).

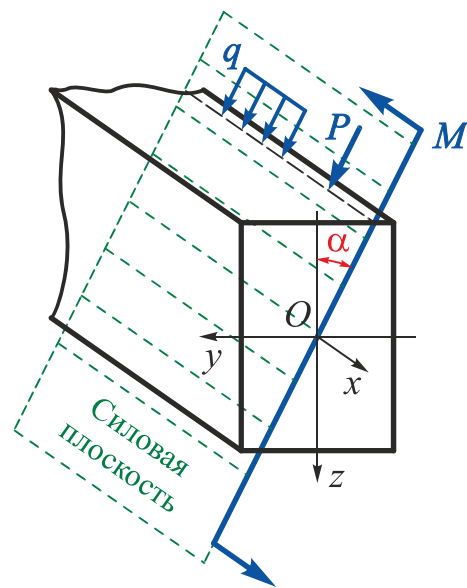


Рис. 3.29

Если же поперечное сечение балки имеет одну ось симметрии или вообще не имеет осей симметрии, то поперечные нагрузки должны действовать в плоскостях, имеющих не продольную ось балки, а линию, соединяющую *центры изгиба* поперечных сечений балки.

Учитывая, что в большинстве стандартных курсов сопротивления материалов (механики материалов и конструкций) понятие о *центре изгиба* поперечных сечений балки не рассматривают, и принимая во внимание тот факт, что подавляющее большинство реальных балок работает в условиях поперечного изгиба, будем рассматривать только балки, поперечные сечения которых имеют две оси симметрии. Это несколько сужает область применения расчетных соотношений, полученных в этом разделе, однако их практическое значение достаточно велико в связи с весьма широким использованием балок прямоугольного, коробчатого, крестообразного, двутаврового и других сечений, в том числе составных и многосвязных, имеющих две оси симметрии.

## Определение нормальных напряжений в поперечном сечении балки

Рассмотрим балку, работающую в условиях косоугольного изгиба (рис. 3.30).

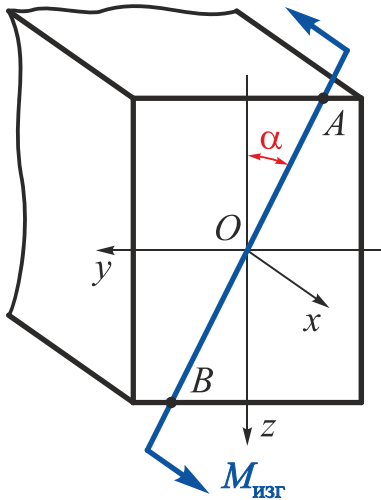


Рис. 3.30

На этом рисунке  $O$  – центр тяжести поперечного сечения, оси  $y$  и  $z$  – главные центральные оси инерции сечения;  $M_{\text{изг}}$  – изгибающий момент, действующий в сечении бруса под углом  $\alpha$  к оси  $z$ ; поперечная сила не показана, так как нормальное напряжение  $\sigma_x$  определяется только наличием изгибающих моментов.

Плоскость действия изгибающего момента, т.е. силовая плоскость, содержит ось  $x$ , но не имеет ни оси  $y$ , ни оси  $z$ .

Опираясь на принцип суперпозиции, можно рассматривать косоугольный изгиб как одновременный чистый плоский изгиб в двух главных плоскостях:  $xOz$  и  $xOy$ . Поэтому косоугольный изгиб является частным случаем сложного сопротивления.

На рис. 3.31 момент  $M_{\text{изг}}$  изображен в обычной и векторной формах по правилу, принятому в курсе теоретической механики. Из этого рисунка видно, что

$$\left. \begin{aligned} M_y &= M_{\text{изг}} \cos \alpha ; \\ M_z &= M_{\text{изг}} \sin \alpha . \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

На рис. 3.32 показана преобразованная в соответствии с формулой (3.31) схема действия в сечении внутренних силовых факторов.

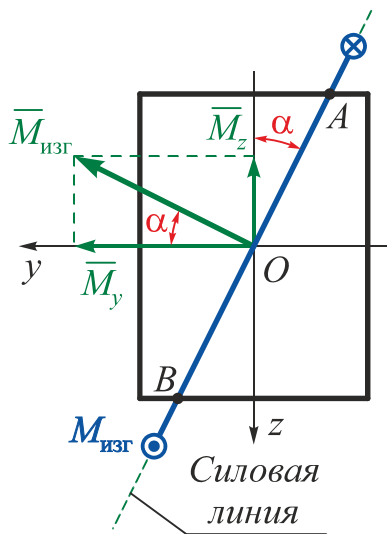


Рис. 3.31

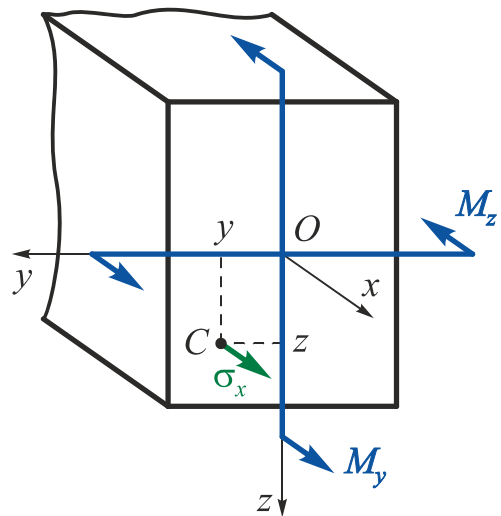


Рис. 3.32

Нормальное напряжение  $\sigma_x$  в произвольной точке  $C$  определим, используя принцип независимости действия сил (суперпозиции), следующим образом:

$$\sigma_x = \sigma_x(M_y) + \sigma_x(M_z) = \frac{M_y z}{I_y} + \frac{M_z y}{I_z}. \quad (3.32)$$

Подставив в формулу (3.32) значения  $M_y$  и  $M_z$  из соотношений (3.31), получим

$$\sigma_x = M_{\text{изг}} \left( \frac{z}{I_y} \cos \alpha + \frac{y}{I_z} \sin \alpha \right), \quad (3.33)$$

где  $y, z$  – координаты произвольной точки  $C$ ;

$M_{\text{изг}}$  – изгибающий момент, действующий в поперечном сечении;

$I_y, I_z$  – моменты инерции поперечного сечения;

$\alpha$  – угол наклона силовой плоскости к оси  $z$ .

### **Замечание**

Иногда бывает удобно работать непосредственно с заданными изгибающими моментами  $M_y$  и  $M_z$ , действующими в двух произвольно выбранных перпендикулярных плоскостях  $xOz$  и  $xOy$ . Тогда формулы для определения нормальных напряжений, вызываемых этими моментами, будут иметь вид

$$\sigma_x(M_y) = \frac{M_y}{I_y I_z - I_{yz}^2} (I_z z - I_{yz} y);$$

$$\sigma_x(M_z) = \frac{M_z}{I_y I_z - I_{yz}^2} (I_{yz} z - I_y y).$$

Эти формулы особенно удобны для расчета балок, у которых стенка и полки параллельны осям  $y$  и  $z$ .

### **Определение положения нейтральной линии сечения**

При выполнении прочностных расчетов условие прочности записывают для опасной точки поперечного сечения, т.е. для точки, в которой нормальные напряжения достигают максимальных значений. Самой нагруженной точкой в поперечном сечении произвольной формы является точка, наиболее удаленная от нейтральной линии, разделяющей растянутую и сжатую зоны сечения.

С помощью уравнения (3.33) определим положение нейтральной линии сечения из условия, что в точках, принадлежащих нейтральной линии,  $\sigma_x = 0$ . Так как  $M_{\text{изг}} \neq 0$ , то

$$\frac{z}{I_y} \cos \alpha + \frac{y}{I_z} \sin \alpha = 0.$$

Откуда получим уравнение прямой, проходящей через начало координат

$$z = \left( -\frac{I_y \sin \alpha}{I_z \cos \alpha} \right) y = \left( -\frac{I_y}{I_z} \operatorname{tg} \alpha \right) y \quad (3.34)$$

или  $z = k_1 y$ ,

где  $k_1 = \operatorname{tg} \varphi = -\frac{I_y}{I_z} \operatorname{tg} \alpha$ . (3.35)

Выражение (3.35) позволяет найти *угол наклона нейтральной линии* к оси  $y$ , а знак «минус» указывает, что силовая плоскость и нейтральная линия при косом изгибе проходят через противоположные квадранты. Если угол  $\varphi > 0$ , то его откладывают от оси  $y$  против часовой стрелки, если угол  $\alpha > 0$ , то его откладывают от оси  $z$  по часовой стрелке.

Угол  $\varphi$  не зависит от величины силы  $P$ , а лишь от угла наклона силовой плоскости к оси  $z$  и формы поперечного сечения.

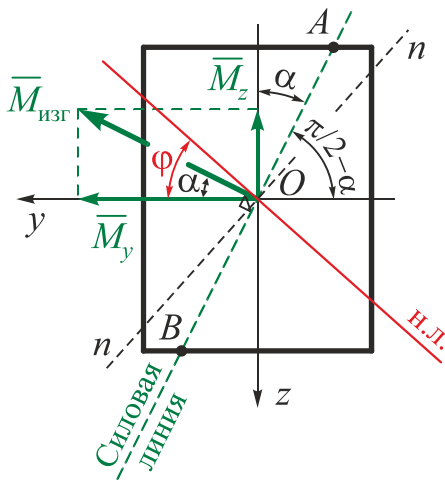


Рис. 3.33

Определим ориентацию нейтральной линии по отношению к плоскости действия  $M_{\text{изг}}$ , поскольку нельзя однозначно считать, что они перпендикулярны (рис. 3.33).

Уравнение силовой линии – линии пересечения плоскости действия  $M_{\text{изг}}$  и плоскости поперечного сечения (линия  $AB$  на рис. 3.30 и 3.32) в системе координат  $zOy$  имеет вид

$$z = k_2 y,$$

где  $k_2 = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ . (3.36)

Из курса аналитической геометрии известно, что условием перпендикулярности двух прямых является условие

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}. \quad (3.37)$$

Из сравнения величин  $k_1$  по уравнению (3.35) и  $k_2$  по (3.36) видно, что условие (3.37) в данном случае не выполняется:

$$-\frac{I_y}{I_z} \operatorname{tg} \alpha \neq -\operatorname{tg} \alpha.$$

Это означает, что в общем случае нейтральная линия сечения *не перпендикулярна* плоскости действия изгибающего момента  $M_{\text{изг}}$  (силовой линии).

В частном случае для поперечных сечений, у которых  $I_y = I_z = I_{\text{max}} = I_{\text{min}}$  (например, квадратного, круглого), все оси, проходящие через центр тяжести

сечения, являются главными центральными осями инерции, и для таких сечений в соответствии с определением невозможна реализация косоугольного изгиба, так как нейтральная линия перпендикулярна силовой плоскости.

При косоугольном изгибе в соответствии с формулами (3.31) отношение изгибающих моментов  $M_y$  и  $M_z$  постоянно по всей длине бруса ( $M_y/M_z = \operatorname{tg} \alpha$ ). Поэтому и угол наклона  $\varphi$  нейтральной линии также постоянен. Значит, поперечные сечения бруса, оставаясь плоскими, поворачиваются вокруг параллельных друг другу нейтральных линий, как и при простом плоском изгибе. Искривление оси бруса при этом происходит в одной плоскости  $n - n$ , нормальной к направлению нейтральной линии (см. рис. 3.33), что и определяет название этого вида деформации. Эта плоскость называется *плоскостью изгиба*.

**Замечание**

Если в бруске прямоугольного поперечного сечения силовая линия проходит по одной из диагоналей, то нейтральная линия будет проходить по другой диагонали:

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{I_y}{I_z} \operatorname{tg} \alpha = -\frac{bh^3}{12} \cdot \frac{12}{hb^3} \cdot \frac{b}{h} = -\frac{h}{b}.$$

**Условие прочности при косоугольном изгибе**

Выражение (3.33) в системе осей  $\sigma_x, y, z$  представляет собой уравнение плоскости, которая пересекает плоскость поперечного сечения балки по нейтральной линии. Следовательно, нормальные напряжения (растягивающие и сжимающие) приобретают наибольшие значения в точках поперечного сечения, наиболее удаленных от его нейтральной линии.

Если координаты точек, наиболее удаленных от нейтральной линии, известны ( $y^*$  и  $z^*$ ), то условие прочности принимает вид

$$\sigma_{x \max} = M_{\text{изг}} \left( \frac{z^*}{I_y} \cos \alpha + \frac{y^*}{I_z} \sin \alpha \right) \leq [\sigma]. \quad (3.38)$$

Для определения опасных точек сечений сложных очертаний следует построить касательные к контуру сечения, параллельные нейтральной линии. Точки касания и будут являться опасными.

**Замечание**

Для поперечных сечений с выступающими углами, у которых обе главные оси инерции являются осями симметрии (прямоугольного, коробчатого, двутаврового и т.д.), опасные точки расположены в углах этих сечений, т. е. их можно найти без определения положения нейтральной линии:

$$\sigma_{x \max} = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} = |M_{\text{изг}}| \left( \frac{\cos \alpha}{W_y} + \frac{\sin \alpha}{W_z} \right) \leq [\sigma]. \quad (3.39)$$

### 3.5.2. Примеры решения задач

#### Пример 3.3

Подобрать размеры прямоугольного поперечного сечения консольной балки (рис. 3.34); построить эпюру нормальных напряжений в опасном сечении; найти положение нейтральной линии.

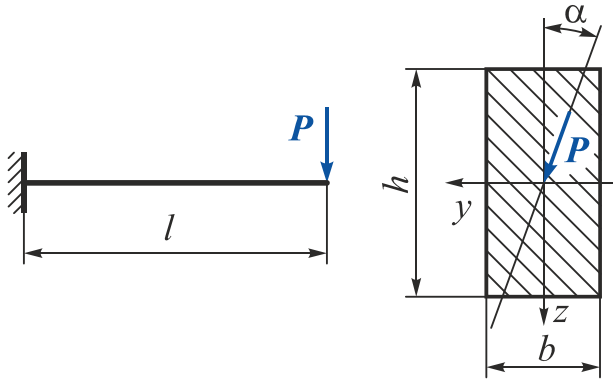


Рис. 3.34

**Дано:**  $P = 20 \text{ кН}$ ;  $l = 2 \text{ м}$ ;  
 $\alpha = 20^\circ$ ;  $[\sigma] = 120 \text{ МПа}$ ;  
 $k = h/b = 1,5$ .

**Необходимо** определить  $b$ ,  $h$ ; построить эпюру  $\sigma_x$  в опасном сечении; найти положение нейтральной линии.

#### Решение

1. Из рис. 3.34 видно, что максимальный изгибающий момент будет действовать в заделке:

$$M_{\text{изг}} = -Px = -20x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=l=2} = -40 \text{ кНм}.$$

Представим максимальный изгибающий момент в проекциях на главные центральные оси инерции поперечного сечения балки (оси  $y$  и  $z$ ) (рис. 3.35):

$$M_y = M_{\text{изг}} \cos \alpha = -40 \cdot \cos 20^\circ = -37,588 \text{ кНм};$$

$$M_z = M_{\text{изг}} \sin \alpha = -40 \cdot \sin 20^\circ = -13,681 \text{ кНм}.$$

2. Покажем схему действия внутренних силовых факторов в опасном сечении (рис. 3.36).

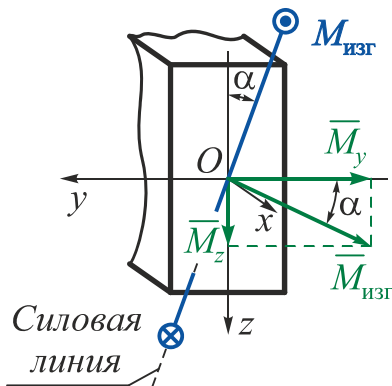


Рис. 3.35

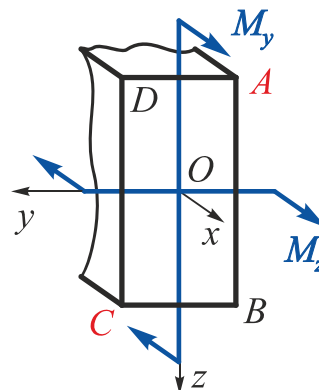


Рис. 3.36

Из этого рисунка видно, что самыми опасными точками поперечного сечения будут угловые точки  $A$  (наибольшее растягивающее напряжение) и  $C$  (наибольшее сжимающее напряжение).

Так как балка выполнена из пластичного материала, то  $[\sigma]_p = [\sigma]_{сж} = [\sigma]$  и, следовательно, точки  $A$  и  $C$  являются равноопасными.

Запишем для опасной точки  $A$  условие прочности при косом изгибе

$$\sigma_{x \max} = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} = |M_{изг}| \left( \frac{\cos \alpha}{W_y} + \frac{\sin \alpha}{W_z} \right) \leq [\sigma].$$

Перепишем эту формулу в другом виде:

$$\sigma_{x \max} = \frac{|M_{изг}|}{W_y} \left( \cos \alpha + \frac{W_y}{W_z} \sin \alpha \right) = \frac{|M_{изг}|}{W_y} (\cos \alpha + k \sin \alpha) \leq [\sigma],$$

где  $W_y = \frac{bh^2}{6} = \left\{ \text{так как } k = \frac{h}{b} \Rightarrow h = kb \right\} = \frac{k^2 b^3}{6};$

$$W_z = \frac{hb^2}{6} = \left\{ \text{так как } k = \frac{h}{b} \Rightarrow h = kb \right\} = \frac{kb^3}{6};$$

$$\frac{W_y}{W_z} = \frac{k^2 b^3}{6} \frac{6}{kb^3} = k.$$

Тогда

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{6|M_{изг}|}{k^2[\sigma]} (\cos \alpha + k \sin \alpha)} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 40 \cdot 10^3}{2^2 \cdot 120 \cdot 10^6} (\cos 20^\circ + 2 \cdot \sin 20^\circ)} = 0,0933 \text{ м};$$

$$h = kb = 2 \cdot 0,0977 = 0,1866 \text{ м};$$

$$W_y = \frac{bh^2}{6} = \frac{0,0933 \cdot 0,1866^2}{6} = 541,444 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$W_z = \frac{hb^2}{6} = \frac{0,1866 \cdot 0,0933^2}{6} = 270,722 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

3. Определим действующие напряжения в угловых точках поперечного сечения и построим эпюру распределения нормальных напряжений, действующих в опасном сечении (рис. 3.37):

$$\sigma(M_y) = \frac{|M_y|}{W_y} = \frac{37,588 \cdot 10^3}{541,444 \cdot 10^{-6}} = 69,422 \text{ МПа};$$

$$\sigma(M_z) = \frac{|M_z|}{W_z} = \frac{13,681 \cdot 10^3}{270,722 \cdot 10^{-6}} = 50,535 \text{ МПа};$$



$$\sigma_A = \sigma(M_y) + \sigma(M_z) = 69,422 + 50,535 = 119,957 \text{ МПа};$$

$$\sigma_B = -\sigma(M_y) + \sigma(M_z) = -69,422 + 50,535 = -18,887 \text{ МПа};$$

$$\sigma_C = -\sigma(M_y) - \sigma(M_z) = -69,422 - 50,535 = -119,957 \text{ МПа};$$

$$\sigma_D = +\sigma(M_y) - \sigma(M_z) = 69,422 - 50,535 = 18,887 \text{ МПа}.$$

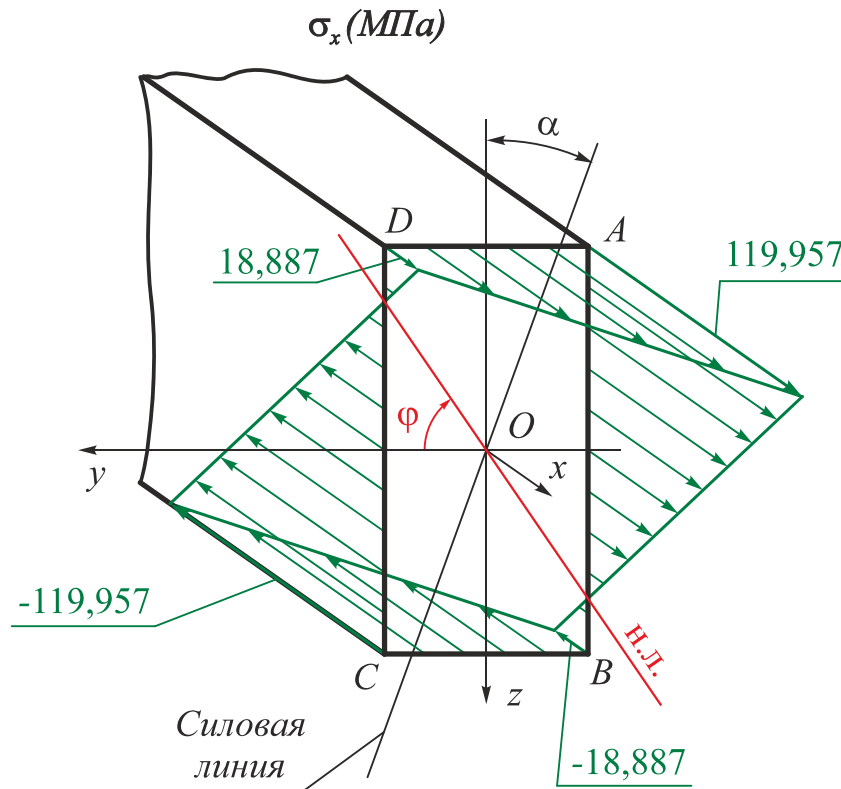


Рис. 3.37

4. Определим аналитически положение нейтральной линии

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{I_y}{I_z} \operatorname{tg} \alpha = -\frac{bh^3}{12} \frac{12}{hb^3} \operatorname{tg} \alpha = -k^2 \operatorname{tg} \alpha = -2^2 \cdot \operatorname{tg} 20^\circ = -1,4559;$$

$$\varphi = -55,52^\circ.$$

5. Сопоставим напряжения при косом и плоском (при  $\alpha = 0$ ) изгибах:

$$\sigma_{x \max(\alpha=0)} = \frac{M_y}{W_y} = \frac{40 \cdot 10^3}{541,444 \cdot 10^{-6}} = 73,877 \text{ МПа};$$

$$\frac{\sigma_A}{\sigma_{\alpha=0}} = \frac{119,957}{73,877} = 1,62.$$

Максимальные напряжения при косом изгибе больше, чем при плоском в 1,62 раза, т. е. косой изгиб опаснее плоского.

### Пример 3.4

При установке на опоры двутавровой балки (№ 20,  $W_y = 184 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$ ,  $W_z = 23,1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$ ), предназначенной для работы на изгиб в вертикальной плоскости, совпадающей с плоскостью стенки, была допущена ошибка, и стенка двутавра отклонилась от вертикали на угол  $\alpha = 1^\circ$ . Определить связанное с этим увеличение наибольших нормальных напряжений.

### Решение

Отклонение оси двутавра (ось  $z$ ) от вертикали приводит к возникновению косоугольного изгиба (рис. 3.38) и появлению изгибающих моментов  $M_y$  и  $M_z$ .

Представим изгибающий момент от действия силы  $P$  в проекциях на главные центральные оси инерции поперечного сечения балки (оси  $y$  и  $z$ ):

$$M_y = M_{\text{изг}} \cos \alpha = M_{\text{изг}} \cdot \cos 1^\circ = 0,99985 \cdot M_{\text{изг}};$$

$$M_z = M_{\text{изг}} \sin \alpha = M_{\text{изг}} \cdot \sin 1^\circ = 0,01745 \cdot M_{\text{изг}}.$$

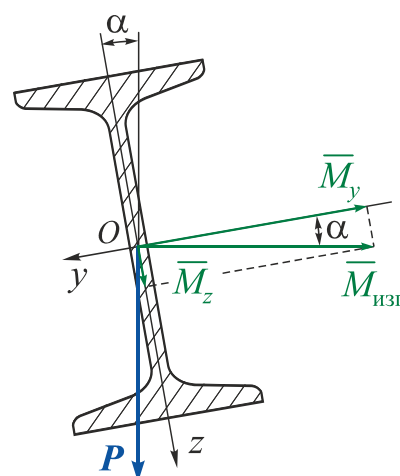


Рис. 3.38

Максимальные напряжения при косом изгибе

$$\sigma_{x \max} = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} = \frac{M_{\text{изг}} \cos \alpha}{W_y} + \frac{M_{\text{изг}} \sin \alpha}{W_z} = \frac{M_{\text{изг}}}{W_y} \left( \cos \alpha + \frac{W_y}{W_z} \sin \alpha \right).$$

Тогда

$$\sigma_{x \max} = \frac{M_{\text{изг}}}{W_y} \left( \cos 1^\circ + \frac{184 \cdot 10^{-6}}{23,1 \cdot 10^{-6}} \sin 1^\circ \right) = 1,139 \cdot \frac{M_{\text{изг}}}{W_y}.$$

В случае правильной установки балки сила  $P$  совпадала бы с вертикальной осью балки  $z$  и возникал бы прямой изгиб, изгибающий момент был бы равен  $M_{\text{изг}}$ , а максимальное нормальное напряжение

$$\sigma_{x \max(\alpha=0)} = \frac{M_{\text{изг}}}{W_y}.$$

Таким образом, максимальные напряжения при косом изгибе вследствие такого незначительного отклонения от вертикали возрастут на 13,9 %.

### Пример 3.5

Консольная балка прямоугольного поперечного сечения нагружена усилием  $P$  и распределенной прямоугольной нагрузкой  $q$  (рис. 3.39). Определить максимальное напряжение, действующее в опасном сечении.

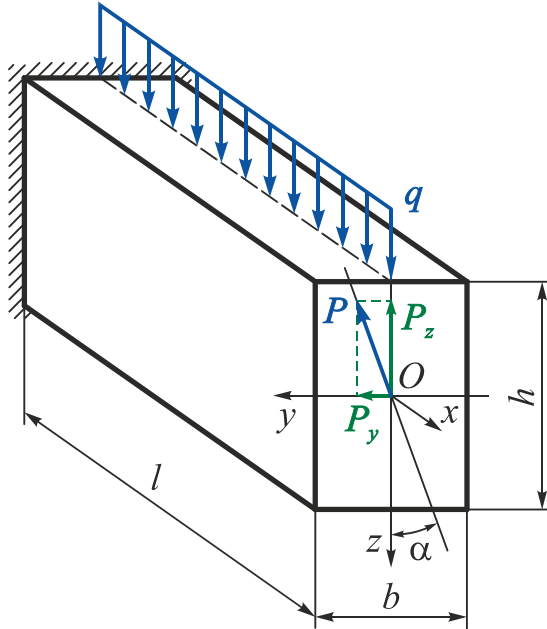


Рис. 3.39

*Дано:*  $P = 12 \text{ кН}$ ;  $q = 14 \text{ кН/м}$ ;  
 $b = 0,1 \text{ м}$ ;  $k = h/b = 1,5$ ;  
 $l = 1,5 \text{ м}$ ;  $\alpha = 20^\circ$ .

*Необходимо* определить  $\sigma_{x \max}$ .

### Решение

1. Представим все внешние нагрузки, действующие на балку, в проекциях на главные центральные оси инерции поперечного сечения балки (оси  $y$  и  $z$ ).

В данном случае:

$$P_z = P \cos \alpha = 12 \cdot \cos 20^\circ = 11,276 \text{ кН}; \quad q_z = q = 14 \text{ кН/м};$$

$$P_y = P \sin \alpha = 12 \cdot \sin 20^\circ = 4,104 \text{ кН}; \quad q_y = 0.$$

2. Построим эпюру изгибающих моментов, действующих в вертикальной плоскости ( $xOz$ ) (рис. 3.40):

$$M_y = P_z x - \frac{q x^2}{2} = 11,276 \cdot x - \frac{14 x^2}{2} \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=l=1,5} = 1,164 \text{ кНм}.$$

Определим экстремальное значение  $M_y$ :

$$\frac{dM_y}{dx} = P_z - q x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{P_z}{q} = \frac{11,276}{14} = 0,805 \text{ м} \quad \text{и} \quad M_y^3 = 4,541 \text{ кНм}.$$

3. Построим эпюру изгибающих моментов, действующих в горизонтальной плоскости ( $xOy$ ) (рис. 3.40):

$$M_z = -P_y x = -4,104 \cdot x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=l=1,5} = -6,156 \text{ кНм}.$$

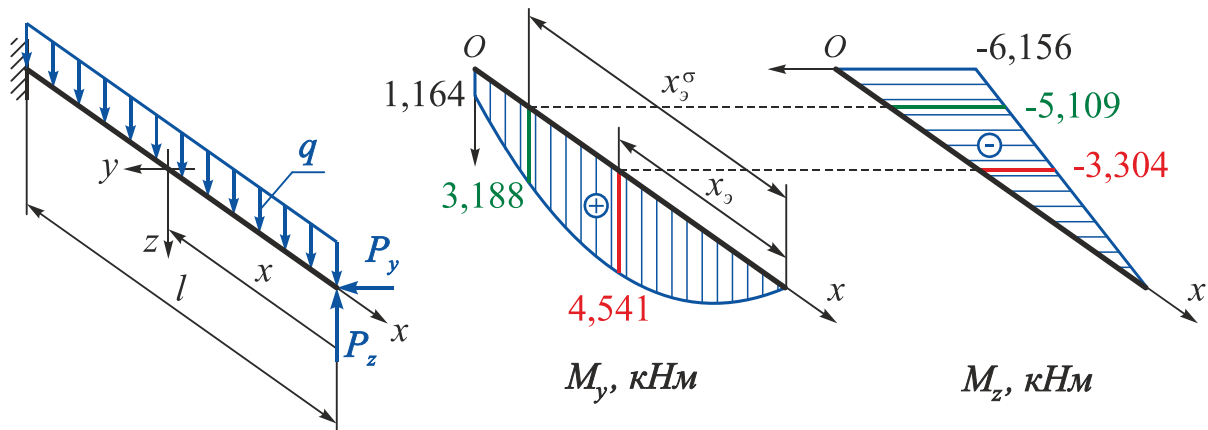


Рис. 3.40

4. Вычислим напряжение, действующее в опасной точке опасного сечения.

В любом сечении наибольшее напряжение действует в одной из точек, наиболее удаленной как от оси  $y$ , так и от оси  $z$ . Поэтому

$$\sigma_{x \max} = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} = \frac{P_z x - \frac{q x^2}{2}}{W_y} + \frac{P_y x}{W_z}.$$

Введем обозначение  $m = \frac{W_y}{W_z} = \frac{bh^2}{6} \cdot \frac{6}{hb^2} = \frac{h}{b} = k = 1,5$ .

Тогда

$$\sigma_{x \max} = \frac{1}{W_y} \left( P_z x - \frac{q x^2}{2} + m P_y x \right).$$

Найдем максимальное значение наибольшего напряжения

$$\frac{d(\sigma_{x \max})}{dx} = \frac{1}{W_y} (P_z - q x_{\sigma} + m P_y) = 0, \text{ откуда}$$

$$x_{\sigma}^{\sigma} = \frac{P_z}{q} + m \frac{P_y}{q} = \{ \text{так как } m = k = 1,5 \} = \frac{11,276}{14} + \frac{1,5 \cdot 4,104}{14} = 1,245 \text{ м.}$$

Определим значения изгибающих моментов, действующих в опасном сечении:

$$M_{y_0} = 11,276 \cdot x - \frac{14 x^2}{2} \Big|_{x=x_{\sigma}^{\sigma}} = 3,188 \text{ кНм};$$

$$M_{z_0} = -4,104 \cdot x \Big|_{x=x_{\sigma}^{\sigma}} = -5,109 \text{ кНм.}$$

Таким образом, окончательно

$$\sigma_{x \max} = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} = \frac{3,188 \cdot 10^3}{0,000375} + \frac{|-5,109 \cdot 10^3|}{0,00025} = 28,937 \text{ МПа.}$$

### Замечание

При косом изгибе не всегда опасным является сечение, в котором изгибающий момент имеет наибольшее значение. Так, в данном случае в опасном сечении

$$M_{\text{изг}} = \sqrt{M_{y_0}^2 + M_{z_0}^2} = \sqrt{3,188^2 + 5,109^2} = 6,022 \text{ кНм};$$

$$\sigma_{x \text{ max}} = 28,937 \text{ МПа};$$

в жесткой заделке

$$M_{\text{изг}} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{1,164^2 + 6,156^2} = 6,265 \text{ кНм};$$

$$\sigma_{x \text{ max}} = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{1,164}{0,000375} + \frac{6,156}{0,00025} = 27,728 \text{ МПа};$$

в сечении при  $x_0 = 0,805 \text{ м}$

$$M_{\text{изг}} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{4,541^2 + 3,304^2} = 5,616 \text{ кНм};$$

$$\sigma_{x \text{ max}} = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{4,541}{0,000375} + \frac{3,304}{0,00025} = 25,325 \text{ МПа}.$$

### Пример 3.6

Консольная балка двутаврового поперечного сечения длиной  $l = 1 \text{ м}$  нагружена прямоугольной распределенной нагрузкой интенсивностью  $q = 5 \text{ кН/м}$  (рис. 3.41). Силовая плоскость составляет угол  $\alpha = 15^\circ$  с плоскостью стенки двутавра. Подобрать двутавровое сечение, если  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

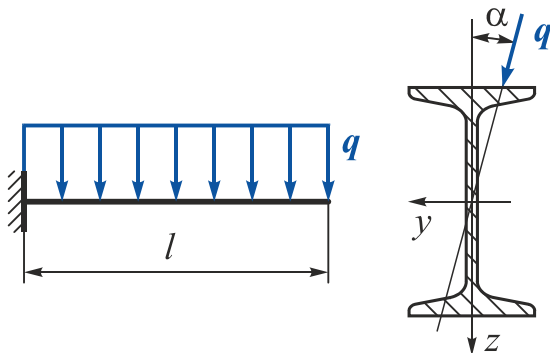


Рис. 3.41

*Дано:*  $l = 1 \text{ м}; q = 10 \text{ кН/м};$

$\alpha = 15^\circ; [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$

*Необходимо* подобрать номер двутавра.

### Решение

Из рис. 3.41 видно, что максимальный изгибающий момент будет действовать в заделке:

$$M_{\text{изг}} = -\frac{qx^2}{2} = -10x \quad \left|_{x=0} = 0 \quad \left|_{x=l=2} = -5 \text{ кНм}.$$

Условие прочности в данном случае (сечение с выступающими углами) имеет вид

$$\sigma_{x \max} = |M_{\text{изг}}| \left( \frac{\cos \alpha}{W_y} + \frac{\sin \alpha}{W_z} \right) = \frac{|M_{\text{изг}}|}{W_y} \left( \cos \alpha + \frac{W_y}{W_z} \sin \alpha \right) \leq [\sigma],$$

откуда

$$\begin{aligned} W_y &\geq \frac{|M_{\text{изг}}|}{[\sigma]} \left( \cos \alpha + \frac{W_y}{W_z} \sin \alpha \right) = \frac{5 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} \left( \cos 15^\circ + \frac{W_y}{W_z} \sin 15^\circ \right) = \\ &= 31,25 \cdot 10^{-6} \left( 0,966 + \frac{W_y}{W_z} 0,259 \right) = 30,188 \cdot 10^{-6} + \frac{W_y}{W_z} 8,094 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Сечение подберем методом последовательных приближений. В правой части этого выражения находится отношение  $W_y/W_z$ , которое изменяется от 6,12 (двутавр № 10) до 14,07 (двутавр № 60).

В первом приближении примем  $W_y/W_z = 10$ , тогда

$$W_y \geq 30,188 \cdot 10^{-6} + 10 \cdot 8,094 \cdot 10^{-6} = 111,128 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Из сортамента выберем двутавр № 16, у которого

$$W_y = 109 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3; \quad W_z = 14,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Проверим его прочность

$$\begin{aligned} \sigma_{x \max} &= \frac{|M_{\text{изг}}|}{W_y} \left( \cos \alpha + \frac{W_y}{W_z} \sin \alpha \right) = \frac{5 \cdot 10^3}{109 \cdot 10^{-6}} \left( 0,966 + \frac{109}{14,5} \cdot 0,259 \right) = \\ &= 133,62 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Недогруз  $\Delta\sigma \% = \left| \frac{133,88 - 160}{160} \right| = 16,325 \%$ .

Тогда выберем из сортамента двутавр № 14, у которого

$$W_y = 81,7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3; \quad W_z = 11,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Проверим его прочность

$$\sigma_{x \max} = \frac{5 \cdot 10^3}{81,7 \cdot 10^{-6}} \left( 0,966 + \frac{81,7}{11,5} \cdot 0,259 \right) = 171,73 \text{ МПа}.$$

Перегруз  $\Delta\sigma \% = \left| \frac{171,73 - 160}{160} \right| = 7,33 \% > 5 \%$ .

Такой перегруз недопустим, поэтому остановимся на двутавре № 16.

Сопоставим максимальные напряжения при косом и чистом изгибах (при  $\alpha = 0$ ):

$$\sigma_{x \max} (\alpha=0) = \frac{M_y}{W_y} = \frac{5 \cdot 10^3}{109 \cdot 10^{-6}} = 45,872 \text{ МПа}; \quad \frac{\sigma_A}{\sigma_{\alpha=0}} = \frac{133,62}{45,872} = 2,91.$$

Таким образом, максимальные напряжения при косом изгибе больше, чем при плоском в 2,91 раза.

### 3.5.3. Внецентренное растяжение-сжатие

**Внецентренное растяжение-сжатие** реализуется в поперечных сечениях бруса в том случае, когда брус нагружен усилием, линия действия которого параллельна продольной оси бруса, но не совпадает с ней.

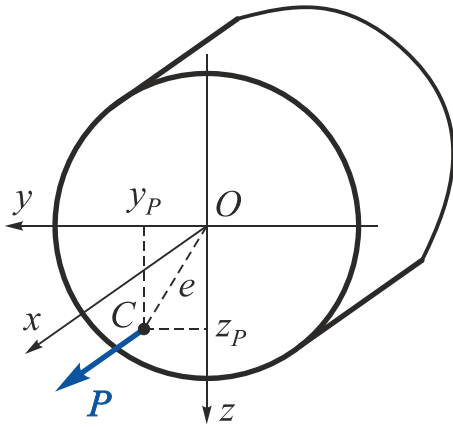


Рис. 3.42

Пусть на брус действует сила  $P$ , параллельная продольной оси и приложенная в точке  $C$  поперечного сечения. Координаты этой точки в системе главных осей обозначим  $y_P$  и  $z_P$ , а расстояние от этой точки до оси  $x$ , называемое эксцентриситетом, –  $e$  (рис. 3.42).

Если перенести силу  $P$  параллельно самой себе из точки  $C$  в центр тяжести сечения, то внецентренное растяжение можно представить как сумму трех простых деформаций: растяжения и изгиба в двух плоскостях.

Тогда во всех поперечных сечениях бруса будут действовать следующие внутренние силовые факторы:

$$\begin{aligned} N_x &= P; \\ M_y &= P \cdot z_P; \\ M_z &= P \cdot y_P. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Таким образом, внецентренное растяжение-сжатие можно рассматривать, опираясь на принцип суперпозиции, как результат суммарного действия **чистого растяжения-сжатия** и **косого** или **плоского чистого изгиба**, т.е. оно является частным случаем сложного сопротивления.

#### Определение действующих напряжений

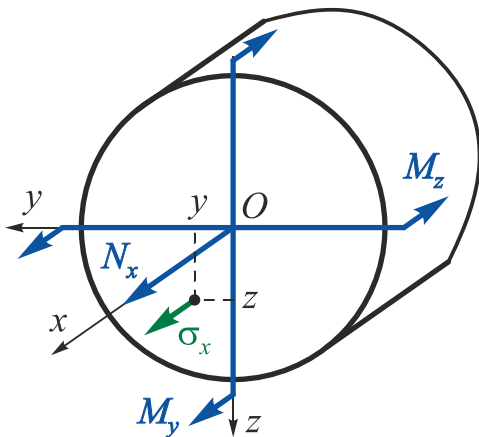


Рис. 3.43

На рис. 3.43 показана схема действия внутренних силовых факторов в поперечном сечении бруса. Отсутствие поперечной силы в сечении бруса означает, что в нем реализуется **чистый изгиб** (**плоский** или **косой**). Это снимает ограничения, которые должны выполняться при **реализации поперечного косого изгиба**.

Используя принцип суперпозиции, определим нормальные напряжения в произвольной точке поперечного сечения, лежащей в первом квадранте, с координатами  $y, z$  (см. рис. 3.43). Направление осей  $y$  и  $z$ , т.е. положение первого квадранта, выберем такое, чтобы  $N_x, M_y, M_z$  создавали в этом квадранте положительные напряжения. Тогда

$$\sigma_x = \sigma_x(N_x) + \sigma_x(M_y) + \sigma_x(M_z) = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y, \quad (3.41)$$

где  $F$  – площадь поперечного сечения;

$I_y, I_z$  – моменты инерции поперечного сечения.

Подставим в это соотношение значения  $N_x, M_y$  и  $M_z$  из формул (3.40):

$$\sigma_x = \frac{P}{F} + \frac{Pz_P}{I_y} z + \frac{Py_P}{I_z} y = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{z_P}{I_y} z + \frac{y_P}{I_z} y \right). \quad (3.42)$$

Введем обозначения

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{F}}, \quad (3.43)$$

где  $i_y, i_z$  – радиусы инерции поперечного сечения бруса относительно главных центральных осей его инерции.

С учетом соотношений (3.43) перепишем выражение (3.42) в следующем виде:

$$\sigma_{xE} = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{z_P}{i_y^2} z + \frac{y_P}{i_z^2} y \right), \quad (3.44)$$

где  $z_P, y_P$  – **координаты** точки приложения силы  $P$ ;

$y, z$  – **координаты** точки, в которой определяется напряжение.

Полученное выражение позволяет найти напряжение в любой точке поперечного сечения любого квадранта.

### Определение положения нейтральной линии

Для нахождения опасной точки (опасных точек) сечения необходимо определить положение нейтральной линии сечения.

Уравнение нейтральной линии получим из условия  $\sigma_x = 0$ , приравняв к нулю правую часть выражения (3.44). Так как  $P/F \neq 0$ , то

$$1 + \frac{z_P}{i_y^2} z + \frac{y_P}{i_z^2} y = 0. \quad (3.45)$$



Это уравнение прямой, не проходящей через начало координат.

Преобразуем соотношение (3.45) к виду уравнения прямой в отрезках на осях

$$\frac{z}{\left(-\frac{i_y^2}{z_P}\right)} + \frac{y}{\left(-\frac{i_z^2}{y_P}\right)} = 1 \quad (3.46)$$

или

$$\frac{z}{a_z} + \frac{y}{a_y} = 1. \quad (3.47)$$

Следовательно, отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях  $y$  и  $z$ , могут быть определены из соотношений

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_P}, \quad a_z = -\frac{i_y^2}{z_P}. \quad (3.48)$$

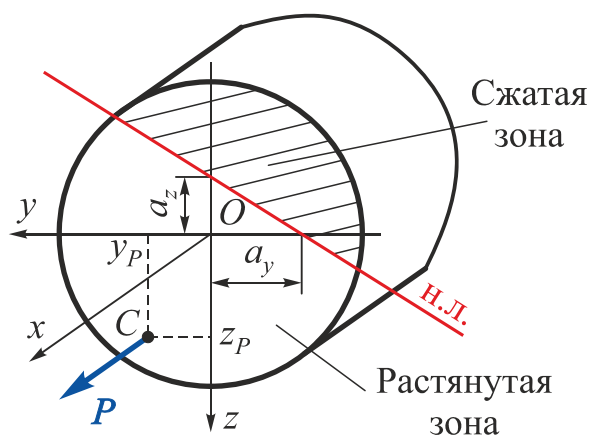


Рис. 3.44

Из этих соотношений следует, что  $a_y$  и  $y_P$ ,  $a_z$  и  $z_P$  всегда имеют взаимно противоположные знаки, т.е. точка приложения силы (точка  $C$ ) и нейтральная линия всегда лежат по разные стороны от центра тяжести сечения (рис. 3.44).

Рассмотрим некоторые характерные особенности, связанные с поведением нейтральной линии при различных положениях точки приложения силы  $P$ :

1. Положение нейтральной линии не зависит от величины и знака силы  $P$ ;
2. При внецентренном растяжении-сжатии нейтральная линия может как пересекать поперечное сечение, так и находиться за его пределами. В первом случае в поперечном сечении возникают напряжения разных знаков: часть сечения работает в условиях растяжения, часть – сжатия. Во втором случае напряжения во всех точках поперечного сечения будут одного знака.
3. Положение нейтральной оси зависит от координат точки приложения нагрузки – чем ближе сила приложена к центру тяжести поперечного сечения (меньше эксцентриситет), тем дальше от него расположена нейтральная линия.
4. Если сила  $P$  приложена в точке, лежащей на оси  $y$  ( $z_P = 0$ ), то нейтральная линия будет параллельна оси  $z$ , так как  $a_z = -i_y^2/z_P = -i_y^2/0 = -\infty$ .

Если сила  $P$  приложена в точке, лежащей на оси  $z$  ( $y_P = 0$ ), то нейтральная линия будет параллельна оси  $y$ , так как  $a_z = -i_z^2/y_P = -i_z^2/0 = -\infty$ .

### Условие прочности при внецентренном растяжении-сжатии

Выражение (3.44) в системе осей  $\sigma_x, y, z$  представляет собой уравнение плоскости, следовательно,  $\sigma_x = \sigma_{max}$  будет в точках поперечного сечения, наиболее удаленных от его нейтральной линии.

Если координаты опасной точки определены и равны  $y^*$  и  $z^*$ , то условие прочности принимает вид

$$\sigma_{x \max} = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{z_P}{i_y^2} z^* + \frac{y_P}{i_z^2} y^* \right) \leq [\sigma]. \quad (3.49)$$

Для сечений сложных очертаний координаты опасных точек можно определить, проведя параллельно нейтральной линии касательные к контуру поперечного сечения. Те точки касания, расстояние от которых до нейтральной линии максимально, и являются опасными точками поперечного сечения.

#### Замечание

Для поперечных сечений с выступающими углами, обе главные оси инерции которых являются осями симметрии (например, прямоугольное, коробчатое, двутавровое и т.д.), опасные точки расположены в углах этих сечений, т. е. их можно найти без определения положения нейтральной линии:

$$\sigma_{x \max} = \frac{|N_x|}{F} + \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (3.50)$$

### 3.5.4. Ядро сечения

При конструировании стержней из материалов, плохо сопротивляющихся растяжению (чугуна, кирпичной кладки, бетона и т.д.) желательно добиться того, чтобы все поперечное сечение работало только на сжатие, т.е. не позволяя точке приложения силы  $P$  слишком удаляться от центра тяжести сечения, ограничивая величину эксцентриситета.

Желательно также заранее знать, какой эксцентриситет при выбранном типе поперечного сечения можно допускать, не рискуя вызвать в сечении бруса напряжения разных знаков. Для этого необходимо установить область возможных положений точки приложения силы, при которых напряжения во всех точках поперечного сечения будут одного знака. Такая область называется ядром сечения.

**Ядром сечения** называется область, сосредоточенная в окрестности центра тяжести сечения, приложение растягивающей или сжимающей силы в пределах которой приводит к появлению во всех точках поперечного сечения напряжений одного знака.

Из этого определения следует, что если растягивающее или сжимающее усилие приложено на границе ядра сечения, то нейтральная линия касается контура поперечного сечения.

Для построения контура границы ядра сечения необходимо рассмотреть различные положения нейтральной линии, касательной к контуру сечения, и вычислить координаты соответствующих точек приложения силы  $P$  по формулам, вытекающим из соотношений (3.46):

$$y_P = -\frac{i_z^2}{a_y}; \quad z_P = -\frac{i_y^2}{a_z}. \quad (3.51)$$

Вычисленные координаты определяют точки, лежащие на границе ядра сечения.

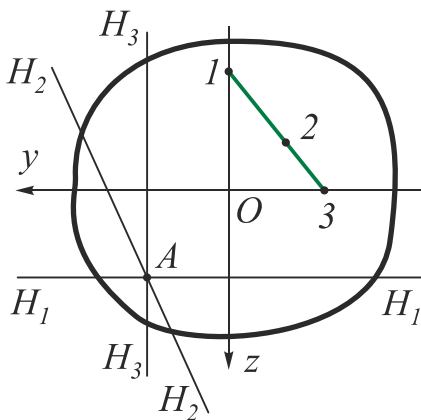


Рис. 3.45

Для облегчения построения ядра сечения используем свойство нейтральной линии: при повороте нейтральной линии вокруг некоторой фиксированной точки  $A$  контура поперечного сечения точка приложения силы перемещается вдоль некоторой прямой (рис. 3.45).

На рис. 3.45 изображены три положения точки приложения силы  $P$  на некоторой прямой 1-3 и соответственно три положения нейтральной линии.

Для доказательства этого свойства достаточно подставить в уравнение (3.45) координаты точки  $A$  ( $y_A, z_A$ ), лежащей на нейтральной линии.

Получим

$$1 + \frac{z_P}{i_y^2} z_A + \frac{y_P}{i_z^2} y_A = 0. \quad (3.52)$$

Действительно, выражение (3.52) при  $z_A = const$  является уравнением прямой относительно координат точек приложения силы  $P - (y_P, z_P)$ .

Таким образом, для построения ядра сечения какой-либо фигуры нужно провести несколько положений нейтральной линии, совпадающих со сторонами сечения, а также касающихся его выступающих точек, и вычислить координаты точек, лежащих на границе ядра сечения.

### 3.5.5 Примеры решения задач

#### Пример 3.7

Для бруса прямоугольного поперечного сечения (рис. 3.46) найти действующие напряжения в характерных точках произвольного сечения; построить в этом сечении эпюру распределения нормальных напряжений; определить аналитически положение нейтральной линии.

**Дано:**  $P = 40 \text{ кН}$ ;  $b = 0,08 \text{ м}$ ;  
 $h = 0,04 \text{ м}$ ;  $[\sigma] = 120 \text{ МПа}$ .

**Необходимо:**

- 1) найти действующие напряжения в характерных точках произвольного сечения;
- 2) построить эпюру распределения  $\sigma_x$ ;
- 3) определить положение нейтральной линии.

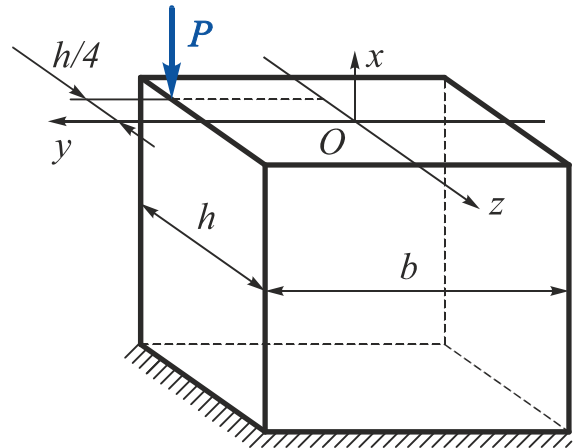


Рис. 3.46

#### Решение

1. Приведем внешнюю силу  $P$  статическим нулем к центру тяжести поперечного сечения (рис. 3.47). Тогда в произвольном поперечном сечении бруса будут действовать

$$|N_x| = P = 40 \text{ кН};$$

$$|M_y| = Pz_P = |-40 \cdot 0,01| = 0,4 \text{ кНм};$$

$$|M_z| = Py_P = 40 \cdot 0,04 = 1,6 \text{ кНм},$$

где

$$y_P = \frac{b}{2} = \frac{0,08}{2} = 0,04 \text{ м};$$

$$z_P = -\frac{h}{4} = -\frac{0,04}{4} = -0,01 \text{ м}.$$

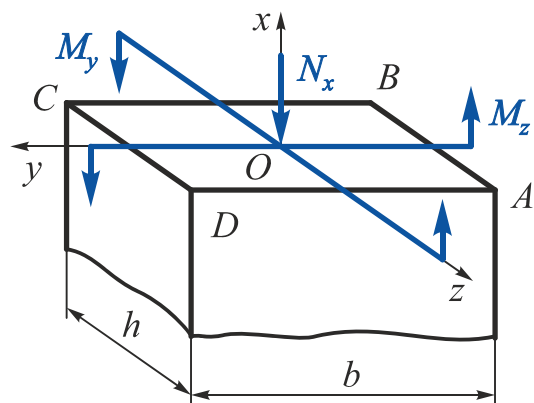


Рис. 3.47

2. Найдем напряжения в угловых точках поперечного сечения по формуле (3.48) и построим эпюру распределения нормальных напряжений, действующих в сечении (рис. 3.48):

$$\sigma_{x \max} = \sigma_x(N_x) + \sigma_{x \max}(M_y) + \sigma_{x \max}(M_z) = \frac{|N_x|}{F} + \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z},$$

где  $F = bh = 0,08 \cdot 0,04 = 0,0032 \text{ м}^2$ ;

$$W_y = \frac{bh^2}{6} = \frac{0,08 \cdot 0,04^2}{6} = 21,33 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$W_z = \frac{hb^2}{6} = \frac{0,04 \cdot 0,08^2}{6} = 42,67 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$\sigma_x(N_x) = \frac{|N_x|}{F} = \frac{40 \cdot 10^3}{0,0032} = 12,5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{x \max}(M_y) = \frac{|M_y|}{W_y} = \frac{0,4 \cdot 10^3}{21,33 \cdot 10^{-6}} = 18,753 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{x \max}(M_z) = \frac{|M_z|}{W_z} = \frac{1,6 \cdot 10^3}{42,67 \cdot 10^{-6}} = 37,497 \text{ МПа}.$$

Тогда

$$\sigma_A = -\sigma(N_x) + \sigma(M_y) + \sigma(M_z) = -12,5 + 18,753 + 37,497 = 43,75 \text{ МПа};$$

$$\sigma_B = -\sigma(N_x) - \sigma(M_y) + \sigma(M_z) = -12,5 - 18,753 + 37,497 = 6,244 \text{ МПа};$$

$$\sigma_C = -\sigma(N_x) - \sigma(M_y) - \sigma(M_z) = -12,5 - 18,753 - 37,497 = -68,75 \text{ МПа};$$

$$\sigma_D = -\sigma(N_x) + \sigma(M_y) - \sigma(M_z) = -12,5 + 18,753 - 37,497 = -31,244 \text{ МПа}.$$

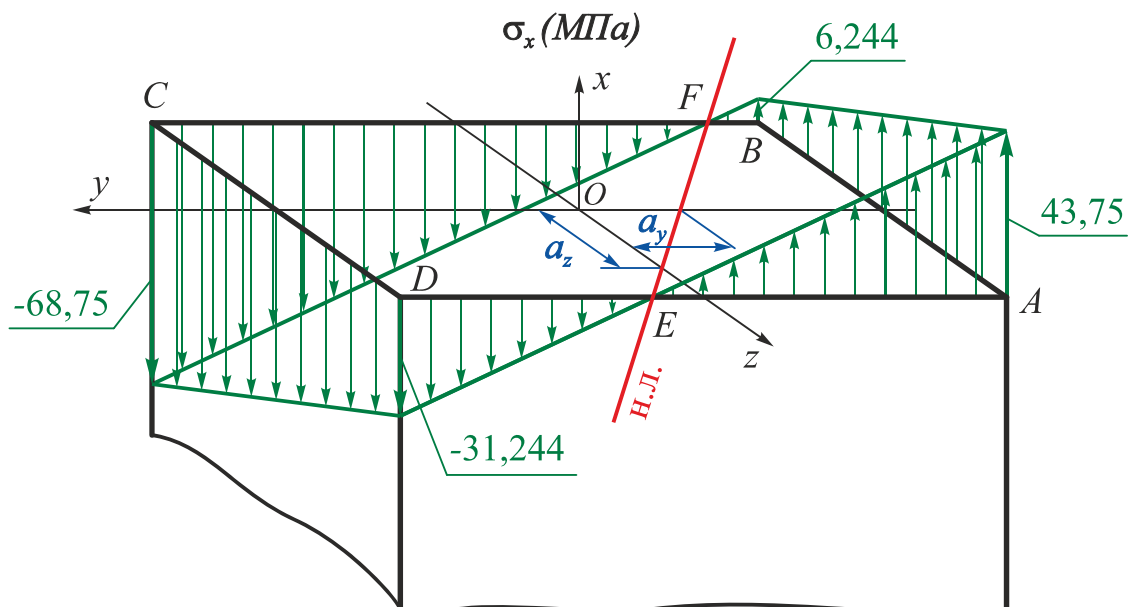


Рис. 3.48

Проведем нейтральную линию через точки пересечения эпюры нормальных напряжений с плоскостью поперечного сечения (точки  $E$  и  $F$ ). Из рис. 3.48 видно, что точка приложения силы и нейтральная линия лежат по разные стороны от центра тяжести поперечного сечения.

3. Определим аналитически положение нейтральной линии, т.е. отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях  $y$  и  $z$ , по соотношениям (3.48) и сравним их с отрезками, полученными графическим способом (рис. 3.48):

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_P} = -\frac{(2,309 \cdot 10^{-2})^2}{0,04} = -0,01333 \text{ м};$$

$$a_z = -\frac{i_y^2}{z_P} = -\frac{(1,155 \cdot 10^{-2})^2}{-0,01} = 0,01334 \text{ м},$$

где

$$I_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,08 \cdot 0,04^3}{12} = 42,67 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$I_z = \frac{hb^3}{12} = \frac{0,04 \cdot 0,08^3}{12} = 170,67 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}} = \sqrt{\frac{42,67 \cdot 10^{-8}}{0,0032}} = 1,155 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{F}} = \sqrt{\frac{170,67 \cdot 10^{-8}}{0,0032}} = 2,309 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

### **Пример 3.8**

На кромке стальной полосы, нагруженной растягивающим усилием, появилась трещина (рис. 3.49). Чтобы трещина не распространялась, на ее месте была выфрезерована галтель. Найти, на сколько увеличилось от этого напряжение в полосе. Концентрацией напряжений пренебречь.

*Дано:*  $P = 40 \text{ кН}; b = 50 \text{ мм};$

$t = 8 \text{ мм}; a = 5 \text{ мм}.$

**Необходимо** сравнить наибольшие напряжения, действующие в цельной полосе и полосе с галтелью.

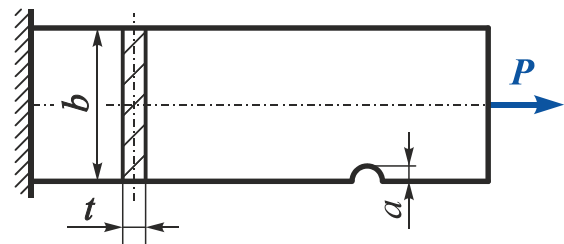


Рис. 3.49

### **Решение**

В поперечных сечениях полосы без галтели реализуется чистое растяжение. Поэтому нормальные напряжения распределены в сечении равномерно, их определяют из соотношения

$$\sigma_x = \frac{P}{bt} = \frac{40 \cdot 10^3}{50 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^{-3}} = 100 \text{ МПа}.$$

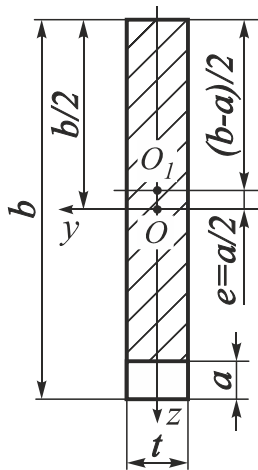


Рис. 3.50

В сечении с галтелью реализуется внецентренное растяжение, т.е. действуют продольная сила

$$N_x = P$$

и изгибающий момент

$$M_y = Pe = \left\{ \text{так как } e = \frac{b}{2} - \frac{b-a}{2} = \frac{a}{2} \right\} = P \frac{a}{2},$$

где  $e$  – эксцентриситет приложения силы (рис. 3.50).

На рис. 3.50  $O$  – точка приложения силы  $P$ ;  $O_1$  – центр тяжести сечения с галтелью.

Максимальные нормальные напряжения в сечении с галтелью будут действовать в нижней части сечения:

$$\begin{aligned} \sigma_{x \max} &= \frac{P}{F} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{P}{t(b-a)} + \frac{P(a/2) \cdot 6}{t(b-a)^2} = \frac{P}{t(b-a)} \left( 1 + \frac{3a}{b-a} \right) = \\ &= \frac{40 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{-3} \cdot (50 \cdot 10^{-3} - 5 \cdot 10^{-3})} \left( 1 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{50 \cdot 10^{-3} - 5 \cdot 10^{-3}} \right) = 148,15 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Напряжение увеличилось на величину

$$\Delta\sigma_x = \frac{\sigma_{x \max} - \sigma_x}{\sigma_x} = \frac{148,15 - 100}{100} \cdot 100 \% = 48,15 \%$$

### Замечание

Если такую же галтель вырезать симметрично с противоположной стороны полосы, то в этом сечении будет реализовано центральное (осевое) растяжение. С учетом уменьшения площади поперечного сечения получим

$$\sigma_x = \frac{P}{t(b-2a)} = \frac{40 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{-3} \cdot (50 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 5 \cdot 10^{-3})} = 125 \text{ МПа}.$$

Рассмотрим распределение нормальных напряжений по высоте сечения с галтелью:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{P}{F} + \frac{M_y}{I_y} z = \frac{P}{(b-a)t} + \frac{Pa \cdot 12}{2t(b-a)^3} \cdot z = \frac{P}{t(b-a)} \left( 1 + \frac{6a}{(b-a)^2} \cdot z \right) = \\ &= 111,11 \cdot 10^6 \cdot (1 + 14,815 \cdot z) \quad \Big|_{z_1} = 148,15 \text{ МПа} \quad \Big|_{z_2} = 74,07 \text{ МПа}, \end{aligned}$$

где  $z_1 = \frac{b-a}{2} = \frac{50 \cdot 10^{-3} - 5 \cdot 10^{-3}}{2} = 22,5 \cdot 10^{-3} \text{ м};$

$$z_2 = -z_1 = -22,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Эпюры нормальных напряжений по высоте в сечении без галтели и с галтелью показаны на рис. 3.51.

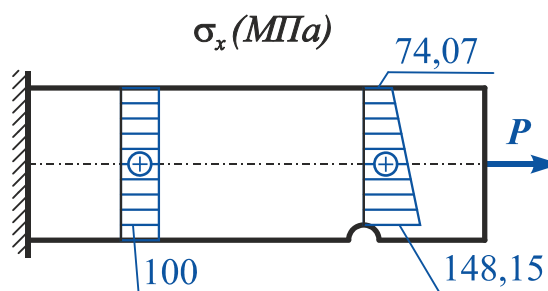


Рис. 3.51

### Пример 3.9

Определить размер  $h$  поперечного сечения струбицы (рис. 3.52), если сила сжатия деталей  $P = 10 \text{ кН}$ ,  $a = 80 \text{ мм}$ ,  $b = 14 \text{ мм}$ ,  $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$ .

*Дано:*  $P = 10 \text{ кН}$ ;  $a = 80 \text{ мм}$ ;  
 $b = 14 \text{ мм}$ ;  $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$ .

*Необходимо* определить  $h$ .

### Решение

В поперечном сечении струбицы реализуется внецентренное сжатие (рис. 3.53), при котором условие прочности имеет вид

$$\sigma_{x \max} = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma],$$

где  $F = bh$  – площадь поперечного сечения;

$N_x = P$  – продольная сила;

$M_y = Pe = P(a + h/2)$  – изгибающий момент относительно оси  $y$ ;

$W_y = bh^2/6$  – момент сопротивления относительно оси  $y$ .

Тогда

$$\sigma_{x \max} = \frac{P}{bh} + \frac{P(a + h/2) \cdot 6}{bh^2} = \frac{P}{bh} + \frac{6Pa}{bh^2} + \frac{3P}{bh} = \frac{4P}{bh} + \frac{6Pa}{bh^2} \leq [\sigma].$$

После преобразований получим квадратное уравнение относительно  $h$ :

$$[\sigma]bh^2 - 4Ph - 6Pa = 0.$$

Его решением является

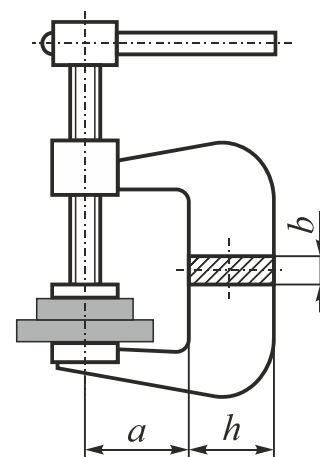


Рис. 3.52

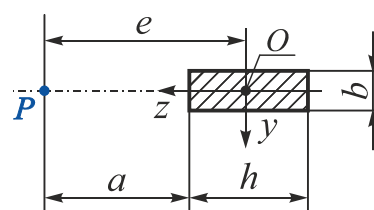


Рис. 3.53



$$h \geq \frac{-(-4P) \pm \sqrt{(4P)^2 - 4 \cdot [\sigma] \cdot b \cdot (-6Pa)}}{2 \cdot [\sigma] \cdot b} =$$

$$= \frac{40 \cdot 10^3 \pm \sqrt{(4 \cdot 10 \cdot 10^3)^2 + 4 \cdot 100 \cdot 10^6 \cdot 14 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 80 \cdot 10^{-3}}}{2 \cdot 100 \cdot 10^6 \cdot 14 \cdot 10^{-3}} =$$

$$= \frac{40 \cdot 10^3 \pm 168 \cdot 10^3}{2,8 \cdot 10^6}.$$

Откуда

$$h \geq 74,56 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Сравним вклад изгиба и растяжения в общее напряжение:

$$\sigma_{x \max} = \sigma_{x \max}(N_x) + \sigma_{x \max}(M_y) = \frac{P}{bh} + \frac{P(a + h/2) \cdot 6}{bh^2} =$$

$$= \frac{10 \cdot 10^3}{14 \cdot 10^{-3} \cdot 74,56 \cdot 10^{-3}} + \frac{10 \cdot 10^3(80 \cdot 10^{-3} + 74,56 \cdot 10^{-3}/2) \cdot 6}{14 \cdot 10^{-3} \cdot (74,56 \cdot 10^{-3})^2} =$$

$$= 9,58 \cdot 10^6 + 90,41 \cdot 10^6 = 99,99 \cdot 10^6 \text{ МПа.}$$

$$\frac{\sigma_{x \max}(N_x)}{\sigma_{x \max}} = \frac{9,58}{99,99} = 0,096; \quad \frac{\sigma_{x \max}(M_y)}{\sigma_{x \max}} = \frac{90,41}{99,99} = 0,904.$$

Таким образом,  $\sigma_{x \max}(M_y)$  в 9,42 раза превышают  $\sigma_{x \max}(N_x)$ .

### Замечание

Можно снизить долю растягивающих напряжений от действия изгибающего момента  $M_y$  за счет уменьшения эксцентриситета  $e$ . На практике обычно применяют тавровое или двутавровое поперечное сечение, смещая тем самым центр тяжести сечения  $O$  ближе к линии действия силы  $P$  и располагая больше материала в области растягивающих напряжений, к которым хрупкие материалы более чувствительны (рис. 3.54).

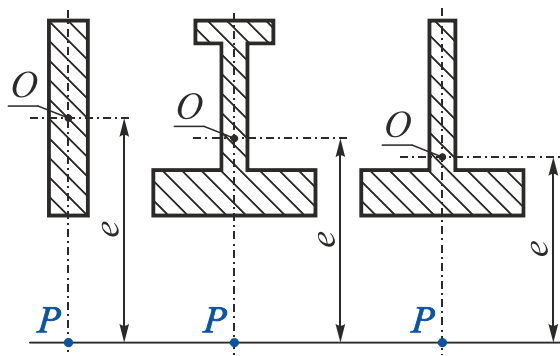


Рис. 3.54

### Пример 3.10

Построить ядро сечения для круглого поперечного сечения диаметром  $d$  (рис. 3.55).

### Решение

Если точка приложения растягивающего или сжимающего напряжения лежит на границе ядра сечения, то нейтральная линия касается сечения, не пересекая его.

Предположим, что нейтральная линия 1 – 1 касается окружности в точке  $A$  и параллельна оси  $z$  (рис. 3.55). В этом случае отрезки, которые отсекает нейтральная линия на координатных осях:

$$a_y = -r = -\frac{d}{2}; \quad a_z = \infty.$$

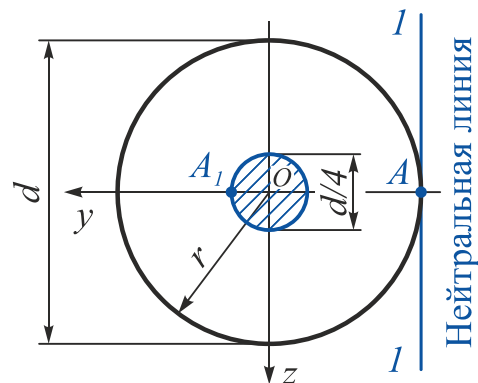


Рис. 3.55

Координаты точки приложения растягивающего или сжимающего усилия определим по формулам (3.51):

$$y_{я(A_1)} = y_P = -\frac{i_z^2}{a_y} = -\frac{I_z}{F a_y} = -\frac{\pi d^4}{64} \frac{4}{\pi d^2} \left(-\frac{2}{d}\right) = \frac{d}{8} = \frac{r}{4};$$

$$z_{я(A_1)} = z_P = -\frac{i_y^2}{a_z} = -\frac{I_y}{F a_z} = -\frac{\pi d^4}{64} \frac{4}{\pi d^2} \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0,$$

где  $F$  – площадь поперечного сечения;

$i_y, i_z$  – радиусы инерции относительно осей  $y$  и  $z$ ;

$I_y, I_z$  – моменты инерции относительно осей  $y$  и  $z$ .

Таким образом, для того, чтобы нейтральная линия касалась сечения в точке  $A$  необходимо, чтобы растягивающее или сжимающее усилие было приложено в точке  $A_1\{r/4; 0\}$ .

В силу симметрии сечения относительно любых осей, проходящих через геометрический центр окружности, следует, что при других положениях нейтральной линии на окружности диаметром  $d$  точки ядра сечения образуют концентрическую окружность диаметром  $d/4$ .

### Пример 3.11

Построить ядро сечения для прямоугольного поперечного сечения с размерами сторон  $b \times h$  (рис. 3.56).

### Решение

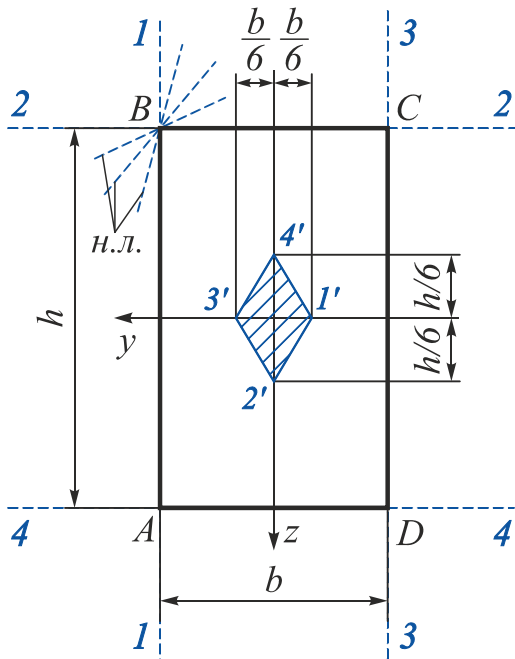


Рис. 3.56

Совместим нейтральную линию со стороной прямоугольника  $AB$  (положение 1 – 1). Тогда отрезки, которые отсекает нейтральная линия на координатных осях:

$$a_y = \frac{b}{2}; \quad a_z = \infty.$$

Согласно уравнениям (3.51) координаты соответствующей точки (1') ядра сечения

$$y_{я(1')} = y_P = -\frac{i_z^2}{a_y} = -\frac{I_z}{F a_y} = -\frac{hb^3}{12} \frac{1}{bh} \left(\frac{2}{b}\right) = -\frac{b}{6};$$

$$z_{я(1')} = z_P = -\frac{i_y^2}{a_z} = -\frac{I_y}{F a_z} = -\frac{bh^3}{12} \frac{1}{bh} \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0,$$

где  $F$  – площадь поперечного сечения;

$i_y, i_z$  – радиусы инерции относительно осей  $y$  и  $z$ ;

$I_y, I_z$  – моменты инерции относительно осей  $y$  и  $z$ .

Совместим теперь нейтральную линию со стороной  $BC$  (положение 2 – 2). Тогда отрезки, которые отсекает нейтральная линия на координатных осях:

$$a_y = \infty; \quad a_z = -\frac{h}{2},$$

а координаты соответствующей точки (2') ядра сечения будут иметь значения:

$$y_{я(2')} = y_P = -\frac{i_z^2}{a_y} = -\frac{I_z}{Fa_y} = -\frac{hb^3}{12bh} \frac{1}{\infty} = 0;$$

$$z_{я(2')} = z_P = -\frac{i_y^2}{a_z} = -\frac{I_y}{Fa_z} = \frac{bh^3}{12bh} \left(-\frac{2}{h}\right) = \frac{h}{6}.$$

Аналогично определим координаты точек 3' и 4', соответствующие положениям нейтральной линии 3 – 3 и 4 – 4.

Для построения ядра сечения воспользуемся таким свойством нейтральной линии: при повороте нейтральной линии вокруг некоторой фиксированной точки контура поперечного сечения точка приложения силы перемещается вдоль прямой линии. В данном случае при повороте нейтральной линии вокруг неподвижной точки *B* (штриховые линии на рис. 3.56) точка приложения силы *P* перемещается вдоль прямой, проходящей через точки 1' и 2'.

Соединив точки 1', 2', 3' и 4' прямыми линиями, получим контур ядра сечения в виде ромба с диагоналями, равными  $h/3$  и  $b/3$ .

Поэтому в прямоугольном поперечном сечении при внецентренном растяжении или сжатии напряжение будет одного знака, если точка приложения силы не выходит за пределы средней трети стороны сечения.

Рассмотрим частный случай внецентренного сжатия, когда один из эксцентриситетов равен нулю ( $z_P = 0$ ,  $y_P = e$ ). Покажем эпюры распределения нормальных напряжений по прямоугольному сечению при эксцентриситете  $e$ , равном нулю, меньшем, равном и большем одной шестой ширины сечения (рис. 3.57).

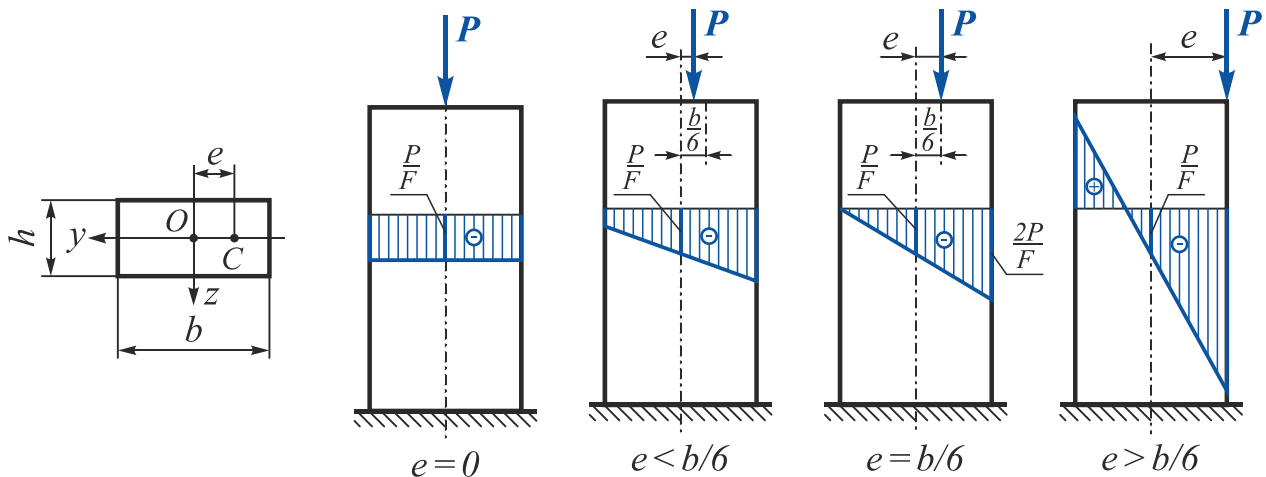


Рис. 3.57

Из рис. 3.57 видно, что при всех положениях силы  $P$  напряжение в центре тяжести (точка  $O$ ) одинаково и равно  $P/F$ .

### Пример 3.12

Построить ядро сечения для швеллера № 10 (рис. 3.58).

#### Решение:

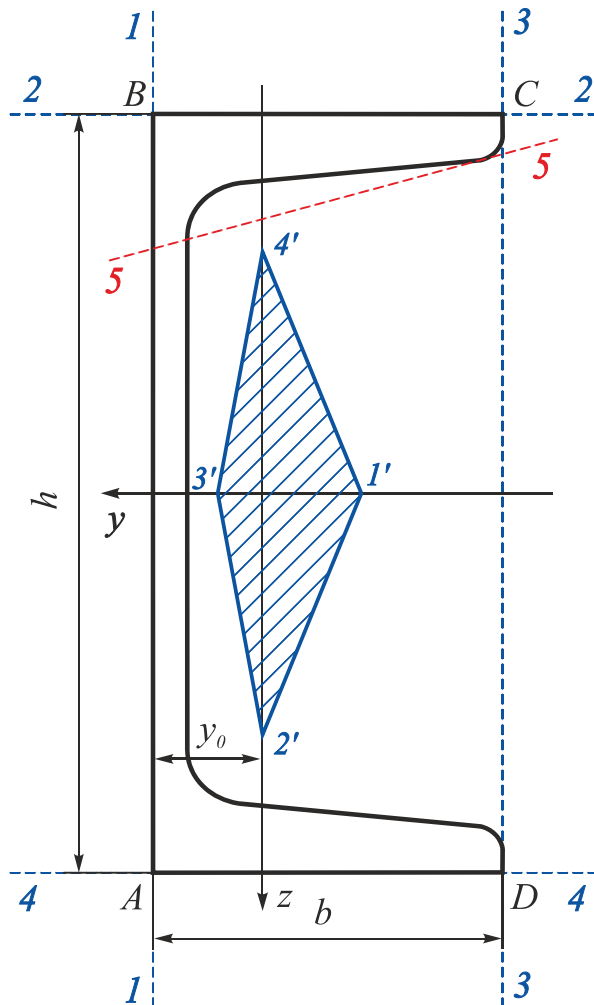


Рис. 3.58

1. Из таблиц сортамента выпишем все геометрические характеристики швеллера № 10:

$$h = 10 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$b = 4,6 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$i_y = 3,99 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$i_z = 1,37 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$y_0 = 1,44 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

2. Выполним в масштабе рисунок швеллера.

3. Совместим нейтральную линию со стороной  $AB$  (положение 1 – 1). Тогда определим отрезки, которые отсекает нейтральная линия на координатных осях:

$$a_y = y_0 = 1,44 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$a_z = \infty.$$

Согласно выражению (3.51) координаты соответствующей точки (1') ядра сечения:

$$y_{я(1')} = y_P = -\frac{i_z^2}{a_y} = -\frac{(1,37 \cdot 10^{-2})^2}{1,44 \cdot 10^{-2}} = -1,30 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$z_{я(1')} = z_P = -\frac{i_y^2}{a_z} = -\frac{(3,99 \cdot 10^{-2})^2}{\infty} = 0,$$

где  $i_y, i_z$  – радиусы инерции относительно осей  $y$  и  $z$ .

4. Совместим теперь нейтральную линию со стороной  $BC$  (положение 2 – 2). Получим отрезки, которые отсекает нейтральная линия на координатных осях:

$$a_y = \infty; \quad a_z = -\frac{h}{2} = -\frac{10 \cdot 10^{-2}}{2} = -5 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

а координаты соответствующей точки (2') ядра сечения будут иметь значения:

$$y_{я(2')} = y_P = -\frac{i_z^2}{a_y} = -\frac{(1,37 \cdot 10^{-2})^2}{\infty} = 0;$$

$$z_{я(2')} = z_P = -\frac{i_y^2}{a_z} = -\frac{(3,99 \cdot 10^{-2})^2}{-5 \cdot 10^{-2}} = 3,18 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

5. Совместим теперь нейтральную линию со стороной  $CD$  (положение 3 – 3). Найдем отрезки, которые отсекает нейтральная линия на координатных осях:

$$a_y = -(b - y_0) = -(4,6 \cdot 10^{-2} - 1,44 \cdot 10^{-2}) = -3,16 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad a_z = \infty,$$

а координаты соответствующей точки (3') ядра сечения будут иметь значения:

$$y_{я(3')} = y_P = -\frac{i_z^2}{a_y} = -\frac{(1,37 \cdot 10^{-2})^2}{-3,16 \cdot 10^{-2}} = 0,59 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$z_{я(3')} = z_P = -\frac{i_y^2}{a_z} = -\frac{(3,99 \cdot 10^{-2})^2}{\infty} = 0,$$

6. Совместим теперь нейтральную линию со стороной  $DA$  (положение 4 – 4). Тогда отрезки, которые отсекает нейтральная линия на координатных осях:

$$a_y = \infty; \quad a_z = \frac{h}{2} = \frac{100 \cdot 10^{-2}}{2} = 50 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

а координаты соответствующей точки (2') ядра сечения будут иметь значения:

$$y_{я(2')} = y_P = -\frac{i_z^2}{a_y} = -\frac{(1,37 \cdot 10^{-2})^2}{\infty} = 0;$$

$$z_{я(2')} = z_P = -\frac{i_y^2}{a_z} = -\frac{(3,99 \cdot 10^{-2})^2}{5 \cdot 10^{-2}} = -3,18 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Соединив точки 1', 2', 3' и 4' прямыми линиями, получим контур ядра сечения, который имеет вид четырехугольника, асимметричного относительно оси  $z$ .

**Замечание**

1. Положение и форма ядра сечения зависят лишь от формы и размеров поперечного сечения, но не зависят от величины приложенной силы.
2. При окатывании нейтральной линией по контуру сечения нельзя допускать, чтобы в каком-либо положении эта линия пересекла сечение (положение 5 – 5 на рис. 3.58 недопустимо).

## Вопросы для самопроверки

1. Что такое предельное напряженное состояние?
2. Что такое теории прочности и для какой цели их применяют?
3. Какие напряженные состояния в точке называют равноопасными?
4. Что такое эквивалентное напряжение?
5. Какое назначение имеют гипотезы прочности (теории предельных напряженных состояний)?
6. Как формулируется теория наибольших нормальных напряжений (первая теория прочности), условие прочности по ней?
7. Как формулируется теория наибольших линейных деформаций (вторая теория прочности), условие прочности по ней?
8. Как формулируется теория наибольших касательных напряжений (третья теория прочности), условие прочности по ней?
9. Как формулируется энергетическая теория прочности (четвертая теория прочности), условие прочности по ней?
10. В чем состоит теория прочности Мора?
11. Запишите условия прочности по третьей и четвертой теориям прочности при плоском напряженном состоянии частного вида.
12. Что такое эпюры? Приведите основные правила их построения и правила знаков при построении эпюр.
13. Что такое плоско-пространственный ломаный брус?
14. Что такое сложное сопротивление бруса?
15. Сформулируйте принципы, на которых строится расчет брусков при сложном сопротивлении.
16. Какие точки прямоугольного поперечного сечения будут потенциально опасными и какое напряженное состояние возникает в этих точках при совместном действии изгиба с кручением и растяжением?
17. Запишите условия прочности для опасных точек бруса прямоугольного поперечного сечения при изгибе с кручением и растяжением.
18. Каков порядок подбора размеров бруса прямоугольного поперечного сечения при сложном нагружении?
19. Какие точки круглого поперечного сечения являются опасными и какое напряженное состояние возникает в этих точках при совместном действии изгиба с кручением?
20. Запишите условия прочности для опасных точек бруса круглого поперечного сечения при совместном действии изгиба и кручения.
21. Каков порядок подбора диаметра бруса круглого поперечного сечения при совместном действии изгиба с кручением и растяжением (сжатием)?

22. Как найти величину расчетного (приведенного) момента по третьей и четвертой теориям прочности при изгибе с кручением бруса круглого поперечного сечения?
23. Какая точка круглого поперечного сечения будет опасной при совместном действии изгиба с кручением и растяжением (сжатием)? Запишите условия прочности для этой точки.
24. Почему обычно не учитывают касательные напряжения от действия поперечных сил при расчете стержней на изгиб с кручением?
25. Какой изгиб называется косым?
26. Что называется чистым косым изгибом и поперечным косым изгибом?
27. Для каких форм поперечных сечений брусьев косой изгиб невозможен?
28. К каким равнодействующим приводят внутренние усилия при косом изгибе?
29. Как определить положение нейтральной линии при косом изгибе?
30. Проходит ли нейтральная линия при косом изгибе через центр тяжести сечения?
31. Как определить опасные точки в сечении при косом изгибе?
32. Каков порядок расчета брусьев при косом изгибе?
33. Какой вид сложного сопротивления называется внецентренным растяжением-сжатием?
34. Какие виды напряжений испытывает стержень при внецентренном приложении растягивающей или сжимающей нагрузки?
35. По каким формулам определяют нормальные напряжения в поперечных сечениях стержня при внецентренном растяжении и сжатии? Какой вид имеет эпюра этих напряжений?
36. Как определить положение нейтральной линии при внецентренном растяжении-сжатии?
37. Как перемещается нейтральная линия при изменении координат точки приложения внешней силы?
38. Как определить положение наиболее опасной точки поперечного сечения бруса при внецентренном растяжении-сжатии?
39. Что называется ядром сечения?
40. Как построить ядро сечения?
41. Какое положение занимает нейтральная линия, когда центр давления лежит на контуре ядра сечения?
42. Какими будут напряжения во всех точках поперечного сечения, если известно, что растягивающая сила находится внутри ядра сечения?
43. Могут ли при внецентренном растяжении возникать сжимающие напряжения в точках поперечного сечения?



## Порядок и пример выполнения домашнего задания

**Цель.** Выполнить расчет на прочность ломаного бруса при совместном действии изгиба с кручением.

1. Начертить в масштабе расчетную схему ломаного бруса с заданными нагрузками.
2. Разбить ломаный брус на участки.
3. В произвольных сечениях каждого участка на расстоянии  $x$  от его начала расположить систему координат так, чтобы ось  $x$  совпала с продольной осью бруса, ось  $z$  была направлена вниз, а горизонтальная ось  $y$  составила бы с двумя первыми правый ортогональный базис.

### Замечание

Чтобы получить на всех участках формально упорядоченную систему знаков для внутренних силовых факторов, желательно систему координат на участке II находить простым перемещением, т.е. поворотом относительно оси  $z$  на  $90^\circ$  системы координат на участке I и т.д.

4. Используя метод сечений, записать выражения для всех внутренних силовых факторов в произвольных сечениях в пределах каждого из участков, руководствуясь принятыми правилами знаков.
5. Построить эпюры внутренних силовых факторов.

### Замечания

При построении эпюр внутренних силовых факторов для ломаного бруса необходимо помнить следующее:

- а) эпюры  $N_x$  и  $M_x$  можно строить в любой плоскости;
- б) эпюры  $Q_z, Q_y, M_y, M_z$  необходимо строить только **в плоскостях их действия**;
- в) эпюры **изгибающих моментов** необходимо строить на **растянутых волокнах**.

6. Проверить правильность построения эпюр (равновесие в узловых точках).
7. Определить опасное сечение.

### Замечание

Если из эпюр положение опасного сечения неочевидно, то в расчетах на прочность необходимо рассмотреть все потенциально опасные сечения.

8. Подобрать прямоугольное поперечное сечение ( $k = h/b$  задается преподавателем). Расчет провести для всех потенциально опасных точек опасного сечения. Применить гипотезу максимальных касательных напряжений (третья теория прочности). Построить эпюры распределения нормальных и касательных напряжений в опасном сечении рассматриваемого элемента бруса от действия продольной силы  $N_x$ , крутящего момента  $M_x$ , изгибающих моментов  $M_y$  и  $M_z$ . Определить действительно опасную точку. Во всех потенциально опасных точках определить и изобразить вид напряженного состояния. Построить суммарную эпюру нормальных напряжений и показать положение нейтральной оси сечения.

**Замечание**

Если  $M_y > M_z$ , сечение следует расположить **горизонтально**; если  $M_z > M_y$  – **вертикально**, чтобы большему изгибающему моменту противопоставить большую изгибную жесткость сечения (обеспечение прочности сечения при меньших его размерах и соответственно уменьшении веса конструкции).

9. Подобрать круглое поперечное сечение. Применить гипотезу максимальных касательных напряжений (третья теория прочности) и энергетическую гипотезу прочности (четвертая теория прочности). В опасной точке изобразить вид напряженного состояния.

**Замечания**

1. Расчет на прочность проводят с учетом нормальных напряжений от действия изгиба и продольной силы (если она имеется в рассматриваемом сечении), а также касательных напряжений от кручения. Касательными напряжениями, соответствующими поперечным силам, пренебречь.
2. В случае наличия продольной силы подбор размеров поперечного сечения в первом приближении проводить без учета этой продольной силы. После вычисления размеров поперечного сечения определить действительные расчетные напряжения в опасном сечении. Если это напряжение более чем на 5 % превосходит допускаемое напряжение, то размеры сечения необходимо увеличить, чтобы перегрузка не превышала 5 %;
3. Принять для материала  $[\sigma] = 160 \dots 240$  МПа, коэффициенты  $\alpha$  и  $\gamma$  для соотношения  $k = h/b$  даны в приложении.

10. Сравнить по весу прямоугольное и круглое поперечные сечения.

## Пример

Построить эпюры внутренних силовых факторов для заданного ломаного бруса. Для опасного сечения определить размеры  $h$  и  $b$  прямоугольного поперечного сечения и диаметр  $d$  круглого поперечного сечения (рис. 1).

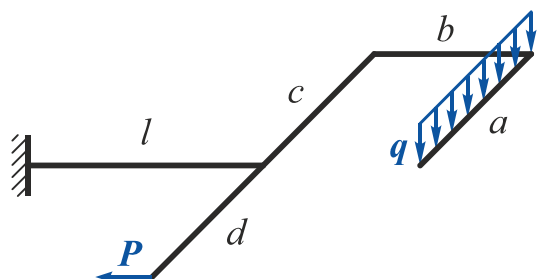


Рис. 1

*Дано:*  $P = 2 \text{ кН}$ ;  $q = 5 \text{ кН/м}$ ;  $a = 2 \text{ м}$ ;

$b = 0,5 \text{ м}$ ;  $c = 2 \text{ м}$ ;  $d = 0,5 \text{ м}$ ;

$l = 1 \text{ м}$ ;  $[\sigma] = 180 \text{ МПа}$ ;

$k = h/b = 1,5$ ;  $\alpha = 0,231$ ;  $\gamma = 0,859$ .

*Необходимо* построить эпюры  $N_x$ ,  $Q_z$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ; определить размеры прямоугольного и диаметр круглого поперечных сечений.

### Решение

**1. Начертим в масштабе расчетную схему ломаного бруса с заданными нагрузками.** В произвольных сечениях каждого участка на расстоянии  $x$  от его начала расположим систему координат  $xuz$  так, чтобы ось  $x$  совпала с продольной осью бруса, ось  $z$  была направлена вниз, а горизонтальная ось  $y$  составила бы с двумя первыми правый ортогональный базис (рис. 2).

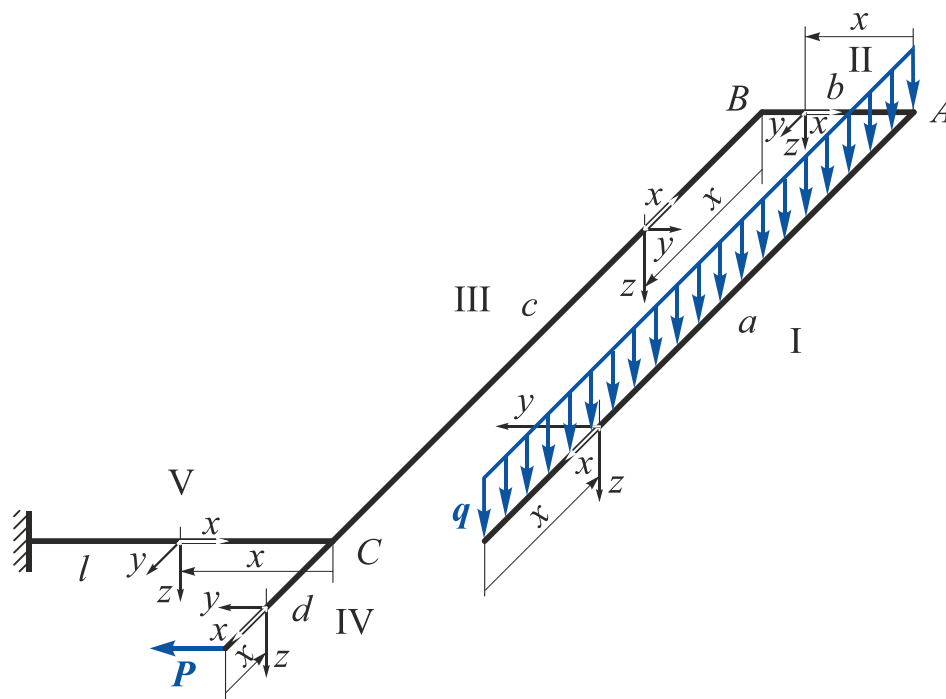


Рис. 2

2. Используя метод сечений, запишем выражения для всех внутренних силовых факторов в произвольных сечениях в пределах каждого из участков, руководствуясь принятыми правилами знаков.

Участок I ( $0 \leq x \leq a$ ,  $a = 2 \text{ м}$ ).

$$N_x^I = 0;$$

$$Q_z^I = 0;$$

$$Q_y^I = qx = 5x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=a=2} = 10 \text{ кНм};$$

$$M_x^I = 0;$$

$$M_y^I = -\frac{qx^2}{2} = -\frac{5x^2}{2} \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=a=2} = -10 \text{ кНм};$$

$$M_z^I = 0.$$

Участок II ( $0 \leq x \leq b$ ,  $b = 0,5 \text{ м}$ ).

Построим отдельную расчетную схему, заменив распределенную нагрузку, действующую в пределах первого участка, равнодействующей (рис. 3).

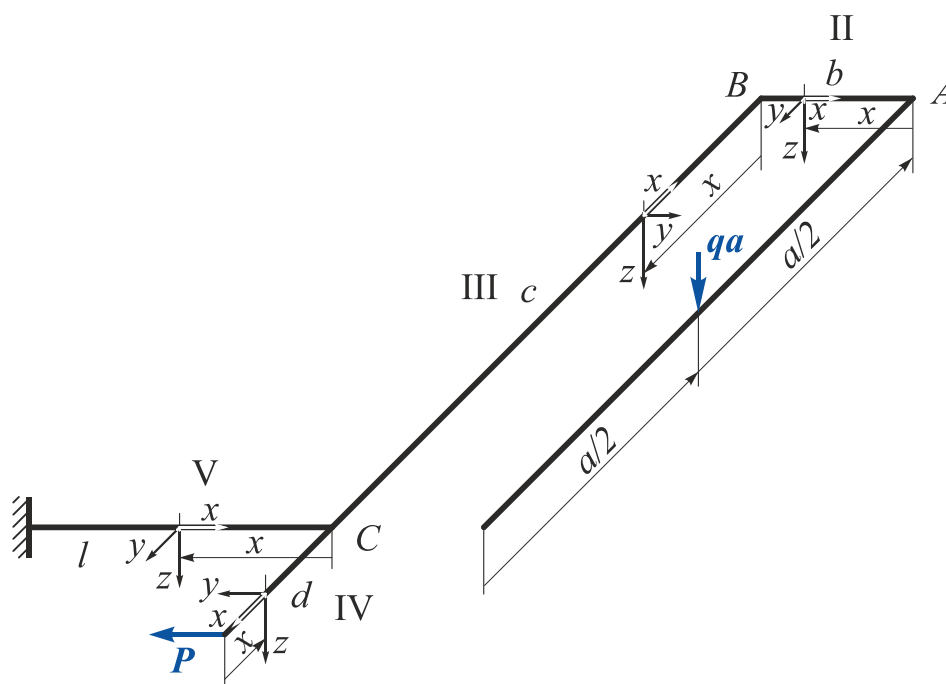


Рис. 3

$$N_x^{II} = 0;$$

$$Q_z^{II} = qa = 5 \cdot 2 = 10 \text{ кНм};$$

$$Q_y^{II} = 0 \text{ кН};$$

$$M_x^{II} = qa \frac{a}{2} = 5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = 10 \text{ кНм};$$

$$M_y^{II} = -qax = -5 \cdot 2 \cdot x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=b=0,5} = -5 \text{ кНм};$$

$$M_z^{II} = 0.$$

**Участок III** ( $0 \leq x \leq c$ ,  $c = 2 \text{ м}$ ).

$$N_x^{III} = 0;$$

$$Q_z^{III} = qa = 5 \cdot 2 = 10 \text{ кН};$$

$$Q_y^{III} = 0;$$

$$M_x^{III} = qab = 5 \cdot 2 \cdot 0,5 = 5 \text{ кНм};$$

$$M_y^{III} = qa \frac{a}{2} - qax = 5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} - 5 \cdot 2 \cdot x \quad \Big|_{x=0} = 10 \text{ кНм} \quad \Big|_{x=c=2} = -10 \text{ кНм};$$

$$M_z^{III} = 0.$$

**Участок IV** ( $0 \leq x \leq d$ ,  $d = 0,5 \text{ м}$ ).

$$N_x^{IV} = 0;$$

$$Q_z^{IV} = 0;$$

$$Q_y^{IV} = -P = -2 \text{ кН};$$

$$M_x^{IV} = 0;$$

$$M_y^{IV} = 0;$$

$$M_z^{IV} = -Px = -2 \cdot x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=d=0,5} = -1 \text{ кНм}.$$

**Участок V** ( $0 \leq x \leq l$ ,  $l = 1 \text{ м}$ ).

$$N_x^V = -P = -2 \text{ кН};$$

$$Q_z^V = qa = 5 \cdot 2 = 10 \text{ кН};$$

$$Q_y^V = 0;$$

$$M_x^V = -qa \frac{a}{2} = -5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = -10 \text{ кНм};$$

$$M_y^V = -qa(b+x) = 5 \cdot 2 \cdot (0,5+x) \quad \Big|_{x=0} = -5 \text{ кНм} \quad \Big|_{x=l=1} = -15 \text{ кНм};$$

$$M_z^V = -Pd = -2 \cdot 0,5 = -1 \text{ кНм}.$$

### 3. Построим эпюры внутренних силовых факторов (рис. 4).

Эпюры  $N_x$ ,  $Q_y$  и  $M_z$  выполнены в большом масштабе.

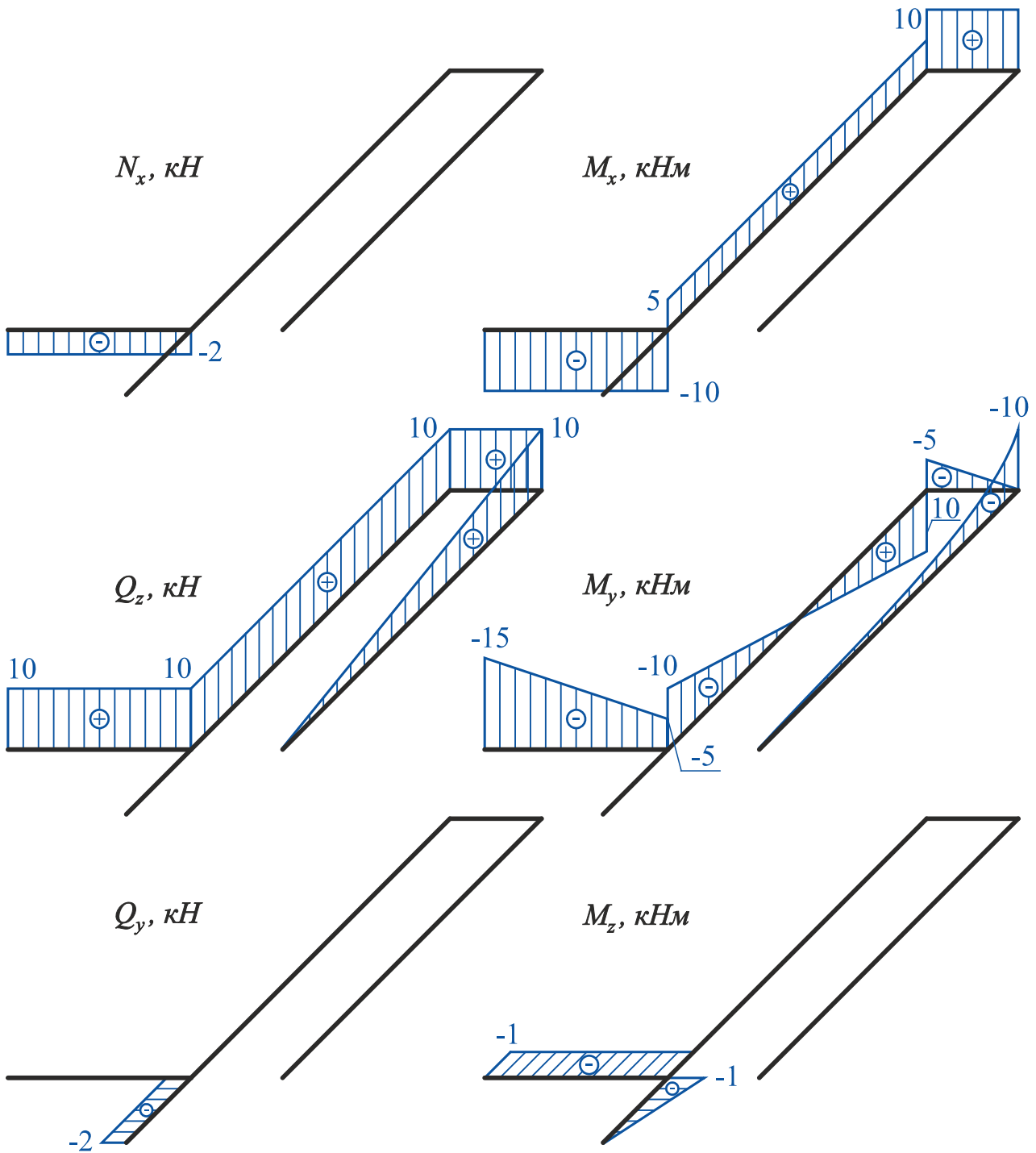


Рис. 4

### 4. Проверим правильность построения эпюр.

Для этого выделим бесконечно малые элементы ломаного бруса в местах сочленения его частей (узлы  $A$ ,  $B$  и  $C$ ) и рассмотрим их равновесие под действием внутренних усилий и внешних сил, приложенных в пределах этих узлов (рис. 5).

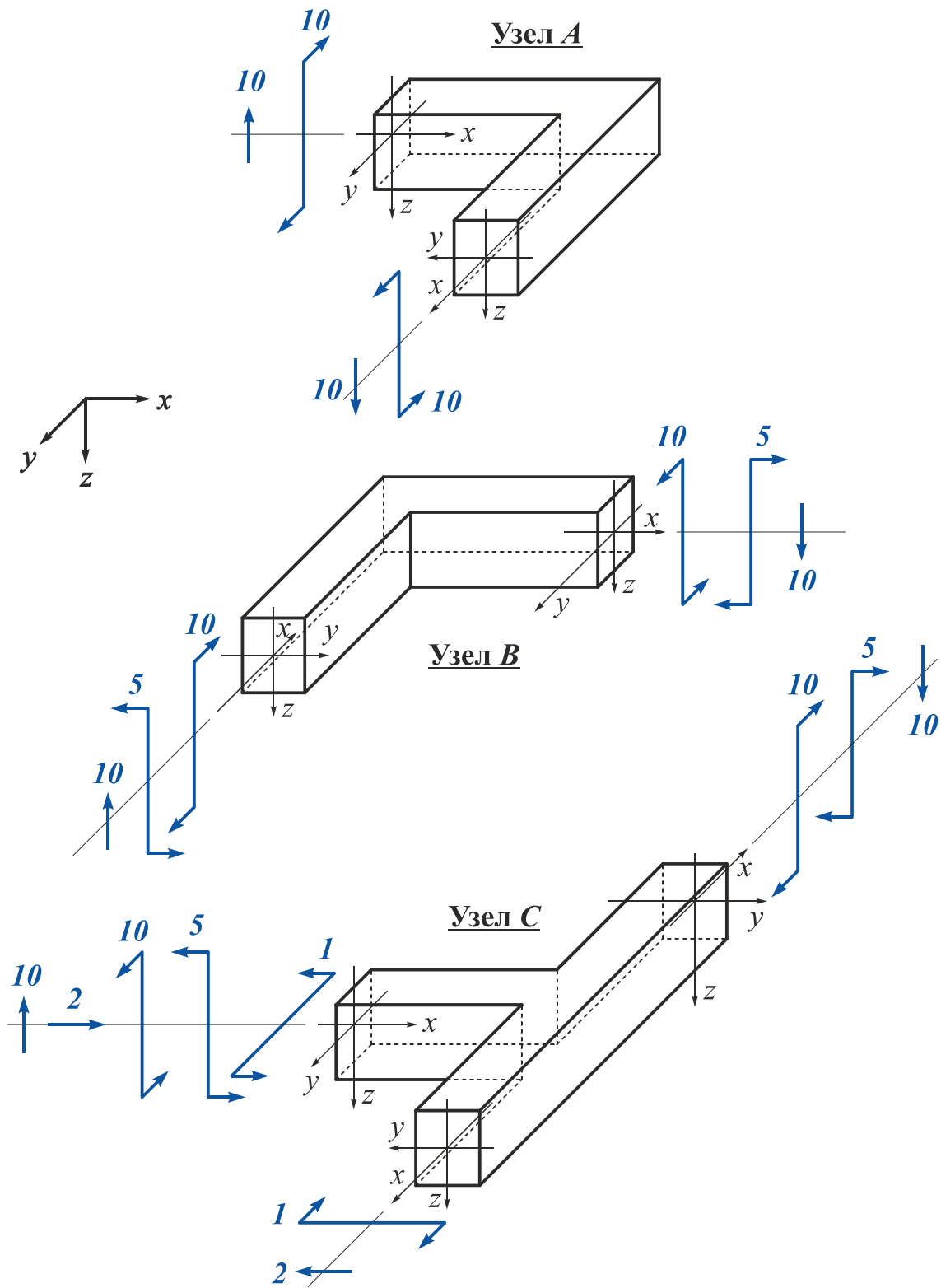


Рис. 5

Уравнения равновесия узла А:

$$\sum P_x = 0;$$

$$\sum P_y = 0;$$

$$\sum P_z = 10 - 10 = 0;$$

$$\sum M_x = 10 - 10 = 0;$$

$$\sum M_y = 0;$$

$$\sum M_z = 0.$$

Уравнения равновесия узла  $B$ :

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 0; & \sum P_y &= 0; & \sum P_z &= 10 - 10 = 0; \\ \sum M_x &= 10 - 10 = 0; & \sum M_y &= 5 - 5 = 0; & \sum M_z &= 0. \end{aligned}$$

Уравнения равновесия узла  $C$ :

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 2 - 2 = 0; & \sum P_y &= 0; & \sum P_z &= 10 - 10 = 0; \\ \sum M_x &= 10 - 10 = 0; & \sum M_y &= 5 - 5 = 0; & \sum M_z &= 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

### 5. Найдем опасное сечение.

Из анализа эпюр внутренних усилий видно, что самым опасным является сечение в заделке, в котором действуют:

$$N_x = -2 \text{ кН}; \quad M_x = -10 \text{ кНм}; \quad M_y = -15 \text{ кНм}; \quad M_z = -1 \text{ кНм}.$$

### 6. Определим размеры прямоугольного поперечного сечения.

Так как  $M_z > M_y$ , расположим сечение вертикально для обеспечения прочности сечения при меньших его размерах.

Сечение с приложенными внутренними усилиями показано на рис. 6.

Внутренние усилия приложены в соответствии с принятыми правилами знаков:

- отрицательная продольная сила  $N_x$  означает сжатие;
- отрицательный крутящий момент  $M_x$  – вращение по часовой стрелке;
- отрицательный изгибающий момент  $M_y$  – растяжение верхних и сжатие нижних волокон;
- отрицательный изгибающий момент  $M_z$  – растяжение правых и сжатие левых волокон.

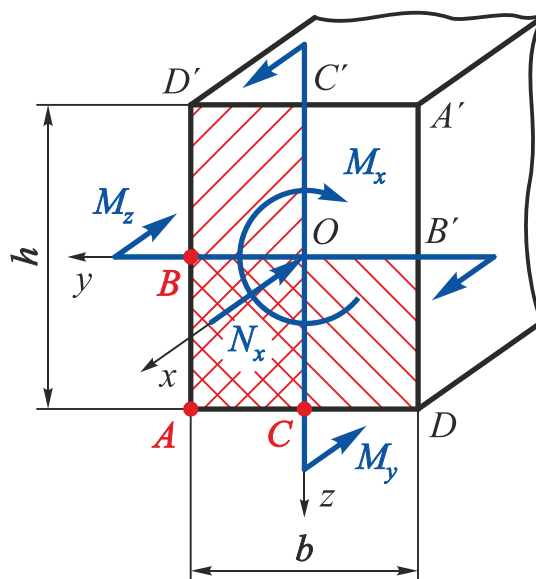


Рис. 6

Определим потенциально опасные точки сечения. Выделим трехкратно сжатую (т.к.  $N_x < 0$ ) четверть сечения (заштрихованная область на рис. 6) и отметим три ее угловые точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Они и будут потенциально опасными.

Построим эпюры распределения нормальных и касательных напряжений по сечению (рис. 7–10).



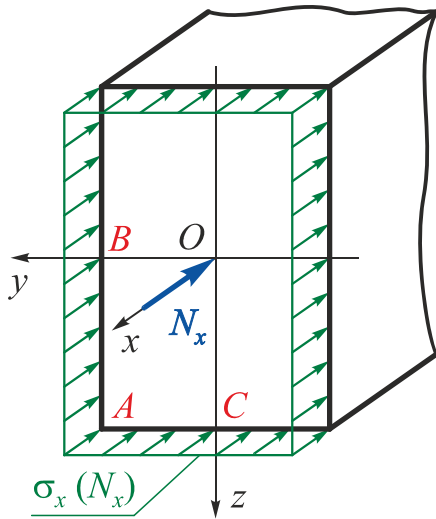


Рис. 7

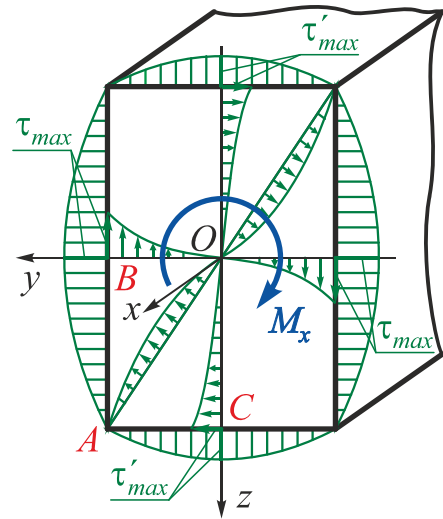


Рис. 8

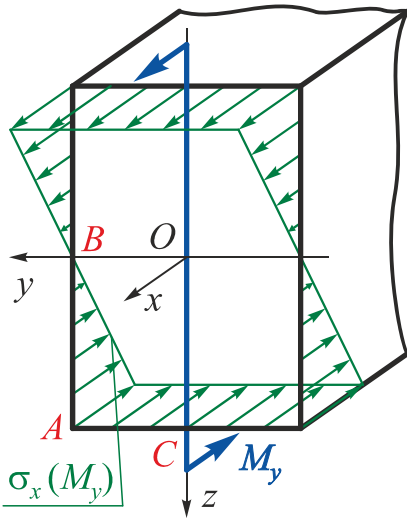


Рис. 9

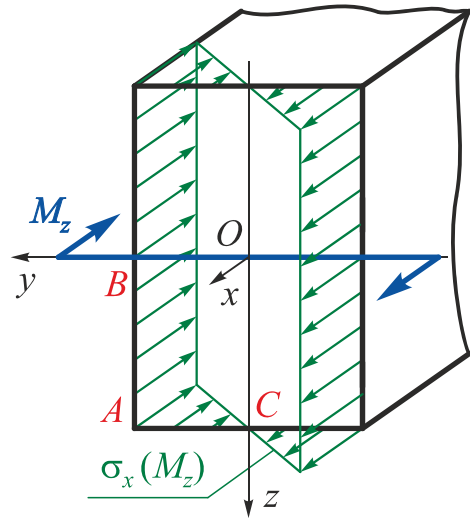


Рис. 10

Для каждой из трёх потенциально опасных точек ( $A$ ,  $B$  и  $C$ ) поперечного сечения покажем вид напряженного состояния и запишем условия прочности (без учета влияния продольной силы  $N_x$ ).

**Точка A**

В точке  $A$  поперечного сечения реализуется линейное напряженное состояние (рис. 11).

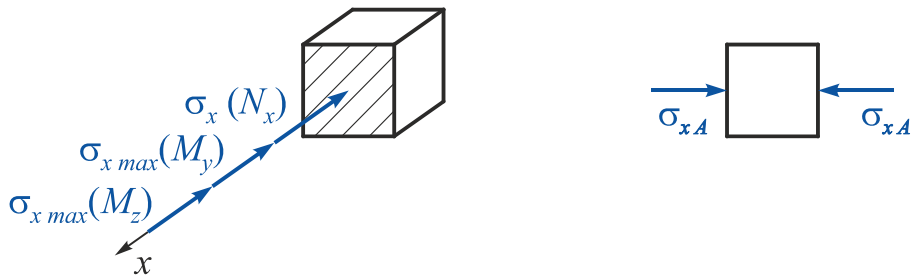


Рис. 11

Условие прочности в этой точке имеет вид

$$\sigma_{xA} = \sigma_{x_{max}} = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \leq [\sigma],$$

где  $W_y = \frac{bh^2}{6} = \left\{ \text{так как } k = \frac{h}{b} \Rightarrow h = kb \right\} = \frac{k^2 b^3}{6};$

$$W_z = \frac{hb^2}{6} = \left\{ \text{так как } k = \frac{h}{b} \Rightarrow h = kb \right\} = \frac{kb^3}{6}.$$

Подставив значения  $W_y$  и  $W_z$  в условие прочности и проведя преобразования, получим

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{6|M_y| + 6k|M_z|}{k^2[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot |-15 \cdot 10^3| + 6 \cdot 1,5 \cdot |-1 \cdot 10^3|}{1,5^2 \cdot 180 \cdot 10^6}} = 0,0625 \text{ м.}$$

### Точка В

В точке В поперечного сечения реализуется плоское напряженное состояние (рис. 12).

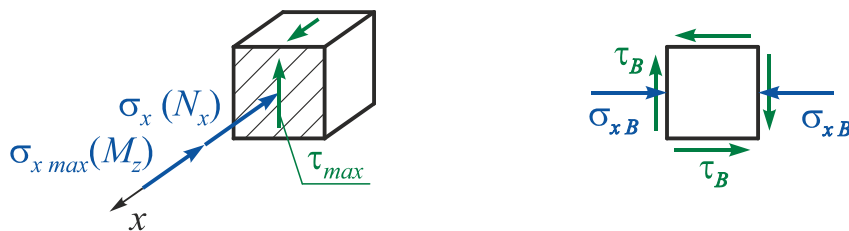


Рис. 12

Используя третью теорию прочности, запишем условие прочности

$$\sigma_{\text{экв} B}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_z}{W_z}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{W_K}\right)^2} \leq [\sigma],$$

где  $W_z = \frac{hb^2}{6} = \left\{ \text{так как } k = \frac{h}{b} \Rightarrow h = kb \right\} = \frac{kb^3}{6};$

$$W_K = \alpha hb^2 = \left\{ \text{так как } k = \frac{h}{b} \Rightarrow h = kb \right\} = \alpha kb^3;$$

$\alpha = 0,231$  – коэффициент, зависящий от соотношения  $h/b = 1,5$  (см. приложение).

Подставив значения  $W_z$  и  $W_K$  в условие прочности, получим

$$b^{III} \geq \sqrt[6]{\frac{\left(\frac{6M_z}{k}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{\alpha k}\right)^2}{[\sigma]^2}} = \sqrt[6]{\frac{\left(\frac{6 \cdot (-1 \cdot 10^3)}{1,5}\right)^2 + 4\left(\frac{-10 \cdot 10^3}{0,231 \cdot 1,5}\right)^2}{(180 \cdot 10^6)^2}} = 0,0685 \text{ м.}$$

## Точка С

В точке С поперечного сечения реализуется плоское напряженное состояние (рис. 13).

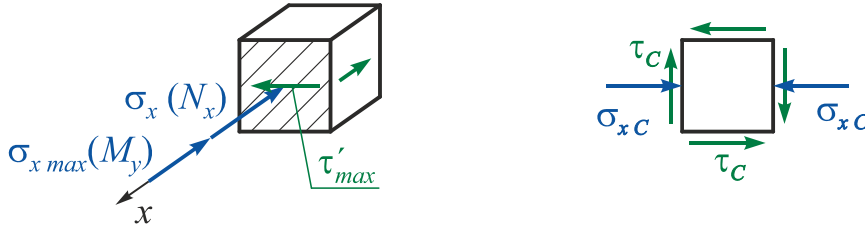


Рис. 13

Используя третью теорию прочности, запишем условие прочности

$$\sigma_{\text{ЭКВ } C}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4\left(\gamma \frac{M_x}{W_k}\right)^2} \leq [\sigma],$$

где  $W_y = \frac{bh^2}{6} = \left\{ \text{так как } k = \frac{h}{b} \Rightarrow h = kb \right\} = \frac{k^2 b^3}{6};$

$$W_k = \alpha hb^2 = \left\{ \text{так как } k = \frac{h}{b} \Rightarrow h = kb \right\} = \alpha kb^3;$$

$\alpha = 0,231$ ,  $\gamma = 0,859$  – коэффициенты, зависящие от соотношения  $h/b = 1,5$  (см. приложение).

Подставив значения  $W_y$  и  $W_k$  в условие прочности, получим

$$b^{III} \geq \sqrt{\frac{6 \left( \left( \frac{6M_y}{k^2} \right)^2 + 4 \left( \gamma \frac{M_x}{\alpha k} \right)^2 \right)}{[\sigma]^2}} = \sqrt{\frac{6 \left( \left( \frac{6 \cdot (-15 \cdot 10^3)}{1,5^2} \right)^2 + 4 \left( 0,859 \cdot \frac{-10 \cdot 10^3}{0,231 \cdot 1,5} \right)^2 \right)}{(180 \cdot 10^6)^2}} = 0,0707 \text{ м.}$$

Выберем бóльший из трех размеров  $b$ .

Расчетные размеры прямоугольного поперечного сечения и его геометрические характеристики:

$$b = 0,0707 \text{ м}, \quad h = kb = 1,5 \cdot 0,0707 = 0,1061 \text{ м};$$

$$F = bh = 0,0707 \cdot 0,1061 = 0,0075 \text{ м}^2;$$

$$W_y = \frac{bh^2}{6} = \frac{0,0707 \cdot 0,1061^2}{6} = 1,3265 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3;$$

$$W_z = \frac{hb^2}{6} = \frac{0,1061 \cdot 0,0707^2}{6} = 0,8839 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3;$$

$$W_k = \alpha hb^2 = 0,231 \cdot 0,1061 \cdot 0,0707^2 = 1,2251 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Точка  $C$  – самая опасная точка поперечного сечения.

Определим действительные расчетные напряжения в опасной точке с учетом действия продольной силы  $N_x$

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{ЭКВ } C}^{\text{III}} &= \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{|N_x|}{F} + \frac{|M_y|}{W_y}\right)^2 + 4\left(\gamma \frac{M_x}{W_k}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{|-2 \cdot 10^3|}{0,0075} + \frac{|-15 \cdot 10^3|}{1,3265 \cdot 10^{-4}}\right)^2 + 4\left(0,859 \cdot \frac{-10 \cdot 10^3}{1,2251 \cdot 10^{-4}}\right)^2} = 180,31 \text{ МПа.}\end{aligned}$$

Перенапряжение

$$\Delta\sigma \% = \frac{\sigma_{\text{ЭКВ } C}^{\text{III}} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 \% = \frac{180,31 - 180}{180} \cdot 100 \% = 0,17 \% < 5 \%$$

Таким образом, прочность ломаного бруса обеспечена.

Для опасного сечения построим эпюру распределения нормальных напряжений и покажем положение нейтральной оси сечения.

Определим нормальные напряжения в угловых точках сечения, предварительно вычислив модули напряжений от каждого из внутренних силовых факторов  $N_x$ ,  $M_y$  и  $M_z$ :

$$|\sigma_x(N_x)| = \frac{N_x}{F} = \frac{2 \cdot 10^3}{0,0075} = 0,27 \text{ МПа};$$

$$|\sigma_{x \max}(M_y)| = \frac{M_y}{W_y} = \frac{15 \cdot 10^3}{1,3265 \cdot 10^{-4}} = 113,08 \text{ МПа};$$

$$|\sigma_{x \max}(M_z)| = \frac{M_z}{W_z} = \frac{1 \cdot 10^3}{0,8839 \cdot 10^{-4}} = 11,31 \text{ МПа}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\sigma_{x A} &= -\sigma_x(N_x) - \sigma_{x \max}(M_y) - \sigma_{x \max}(M_z) = -0,27 - 113,08 - 11,31 = \\ &= -124,66 \text{ МПа};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{x D} &= -\sigma_x(N_x) - \sigma_{x \max}(M_y) + \sigma_{x \max}(M_z) = -0,27 - 113,08 + 11,31 = \\ &= -102,04 \text{ МПа};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{x A'} &= -\sigma_x(N_x) + \sigma_{x \max}(M_y) + \sigma_{x \max}(M_z) = -0,27 + 113,08 + 11,31 = \\ &= 124,12 \text{ МПа};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{x D'} &= -\sigma_x(N_x) + \sigma_{x \max}(M_y) - \sigma_{x \max}(M_z) = -0,27 + 113,08 - 11,31 = \\ &= 101,50 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

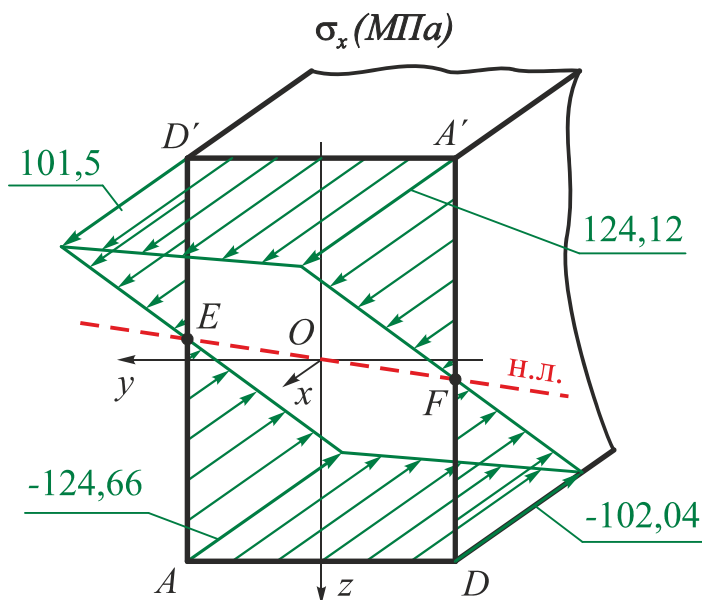


Рис. 14

Вычертим прямоугольное сечение в масштабе по полученным размерам ( $b = 0,0707 \text{ м}$ ,  $h = 0,1061 \text{ м}$ ) и построим эпюру нормальных напряжений (рис. 14).

Для нахождения положения нейтральной линии соединим прямой точки пересечения эпюры с плоскостью поперечного сечения ( $E$  и  $F$ ).

### 7. Определим диаметр круглого поперечного сечения.

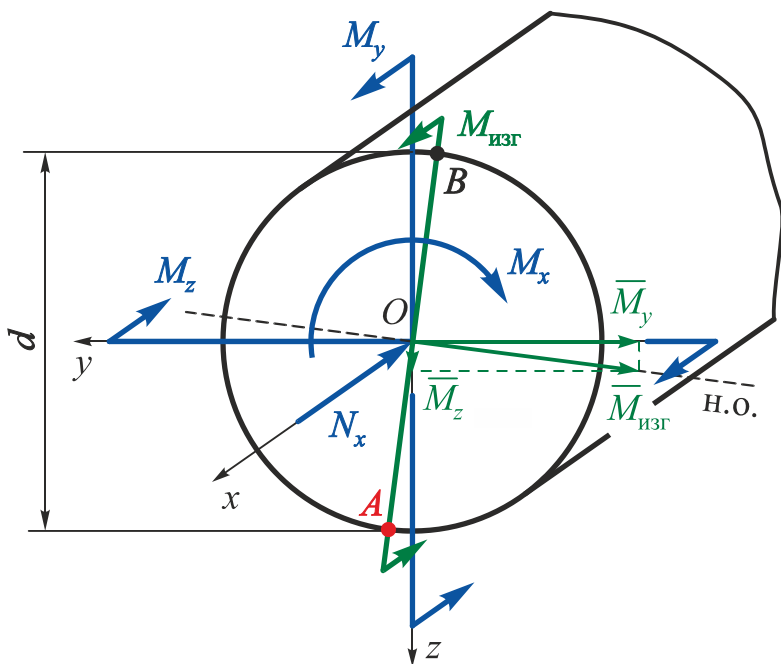


Рис. 15

Поскольку все оси, проходящие через центр тяжести круглого поперечного сечения, являются главными центральными осями инерции сечения, то изгиб следует рассматривать в плоскости действия суммарного изгибающего момента  $M_{\text{изг}} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$ , что и определяет положение точек наибольших изгибных нормальных напряжений (точки  $A$  и  $B$ ) (рис. 15).

Из-за наличия нормальных напряжений сжатия, вызванных продольной силой  $N_x$ , наибольшая величина нормального напряжения будет в точке  $A$ , в которой напряжения от действия продольной силы и изгибающего момента суммируются. Одновременно она является точкой наибольших касательных напряжений от действия кручения, поскольку лежит на окружности поперечного сечения.

Таким образом, точка  $A$  является единственной опасной точкой круглого поперечного сечения.

Поскольку напряженное состояние в рассматриваемой точке плоское, то расчет на прочность необходимо проводить по одной из теорий прочности (третьей или четвертой) (рис. 16).

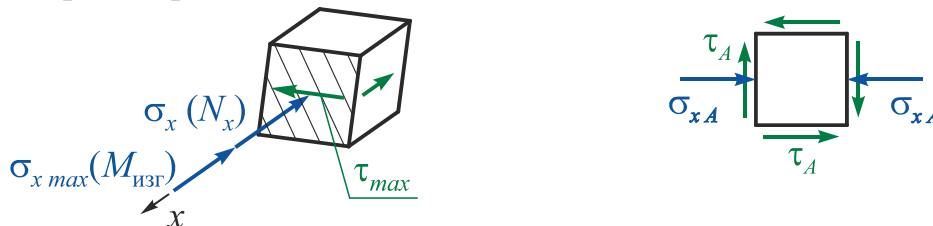


Рис. 16

Используя *третью теорию прочности*, запишем условие прочности

$$\sigma_{\text{ЭКВ A}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{|N_x|}{F} + \frac{|M_{\text{изг}}|}{W_{\text{н.о.}}}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{W_\rho}\right)^2} \leq [\sigma],$$

где  $M_{\text{изг}} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$  – суммарный изгибающий момент;

$F = \frac{\pi d^2}{4}$  – площадь поперечного сечения;

$W_{\text{н.о.}} = \frac{\pi d^3}{32}$  – момент сопротивления относительно нейтральной оси;

$W_\rho = \frac{\pi d^3}{16} = 2W_{\text{н.о.}}$  – полярный момент инерции.

В первом приближении для определения диаметра  $d$  запишем условие прочности без учета влияния продольной силы  $N_x$

$$\sigma_{\text{ЭКВ A}}^{\text{III}} = \sqrt{\left(\frac{M_{\text{изг}}}{W_{\text{н.о.}}}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{W_\rho}\right)^2} = \sqrt{\frac{M_{\text{изг}}^2}{W_{\text{н.о.}}^2} + \frac{M_x^2}{W_{\text{н.о.}}^2}} = \frac{\sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_x^2}}{W_{\text{н.о.}}} \leq [\sigma].$$

Обозначим

$$M_{\text{расч}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_x^2} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + M_x^2} = \sqrt{15^2 + 1^2 + 10^2} = 18,055 \text{ кНм},$$

где  $M_{\text{расч}}^{\text{III}}$  – расчетный момент, определенный по третьей теории прочности.

Тогда условие прочности примет вид

$$\sigma_{\text{ЭКВ A}}^{\text{III}} = \frac{M_{\text{расч}}^{\text{III}}}{W_{\text{н.о.}}} = \frac{32M_{\text{расч}}^{\text{III}}}{\pi d^3} \leq [\sigma],$$

откуда

$$d^{\text{III}} \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{\text{расч}}^{\text{III}}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 18,055 \cdot 10^3}{\pi \cdot 180 \cdot 10^6}} = 0,1007 \text{ м}.$$

Определим действительные расчетные напряжения в опасной точке с учетом действия продольной силы  $N_x$ :

$$M_{изг} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{15^2 + 1^2} = 15,033 \text{ кНм};$$

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,1007^2}{4} = 7,964 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2;$$

$$W_{н.о.} = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 0,1007^3}{32} = 1,0025 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3;$$

$$W_\rho = \frac{\pi d^3}{16} = 2W_{н.о.} = \frac{\pi \cdot 0,1007^3}{16} = 2,005 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3;$$

$$\begin{aligned} \sigma_{эКВ A}^{III} &= \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{|N_x|}{F} + \frac{|M_{изг}|}{W_{н.о.}}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{W_\rho}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{|-2 \cdot 10^3|}{7,964 \cdot 10^{-3}} + \frac{|-15,033 \cdot 10^3|}{1,0025 \cdot 10^{-4}}\right)^2 + 4\left(\frac{-10 \cdot 10^3}{2,005 \cdot 10^{-4}}\right)^2} = 180,31 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Перенапряжение

$$\Delta\sigma \% = \frac{\sigma_{эКВ A}^{III} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 \% = \frac{180,31 - 180}{180} \cdot 100 \% = 0,17 \% < 5 \%$$

Таким образом, прочность ломаного бруса обеспечена.

Определим диаметр, используя **четвертую теорию прочности**:

$$\begin{aligned} M_{расч}^{IV} &= \sqrt{M_{изг}^2 + 0,75 \cdot M_x^2} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + 0,75 \cdot M_x^2} = \\ &= \sqrt{15^2 + 1^2 + 0,75 \cdot 10^2} = 17,349 \text{ кНм}; \end{aligned}$$

$$d^{IV} \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{расч}^{IV}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 17,349 \cdot 10^3}{\pi \cdot 180 \cdot 10^6}} = 0,0994 \text{ м}.$$

**8. Сравним по весу** брусья прямоугольного и круглого поперечных сечений:

$$\frac{G^\circ}{G^\square} = \frac{F^\circ}{F^\square} = \frac{7,964 \cdot 10^{-3}}{0,0075} = 1,062.$$

Таким образом, при заданном сочетании внутренних силовых факторов и соотношения сторон прямоугольника  $k = h/b = 1,5$  для уменьшения веса конструкции выгоднее применять прямоугольное поперечное сечение.

В то же время наибольший габаритный размер прямоугольного поперечного сечения больше диаметра круглого:  $h = 0,1061 \text{ м} > d = 0,1007 \text{ м}$ .

## Варианты заданий

Рисунок 1 (табл. 1)

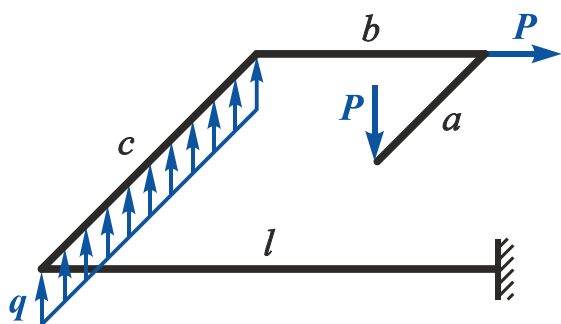


Рисунок 2 (табл. 1)

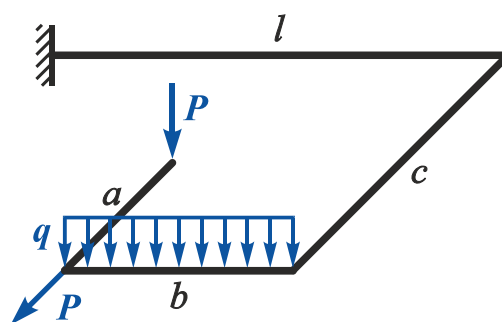


Рисунок 3 (табл. 1)

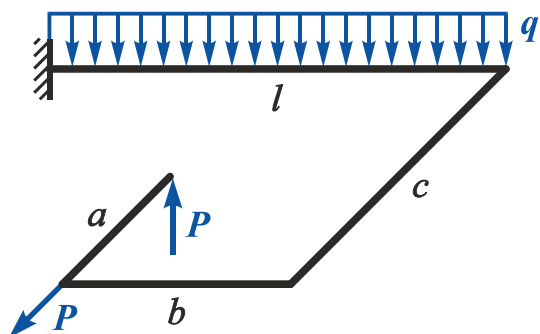


Рисунок 4 (табл. 1)

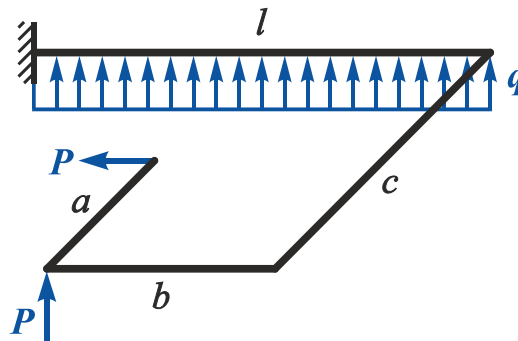


Рисунок 5 (табл. 1)

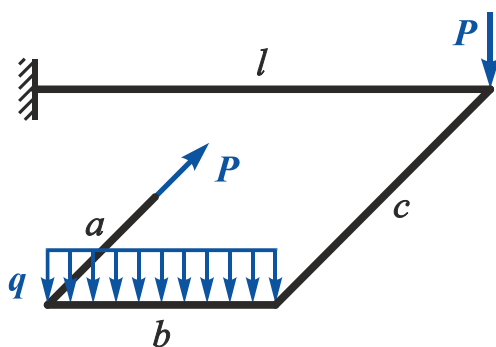


Рисунок 6 (табл. 5)

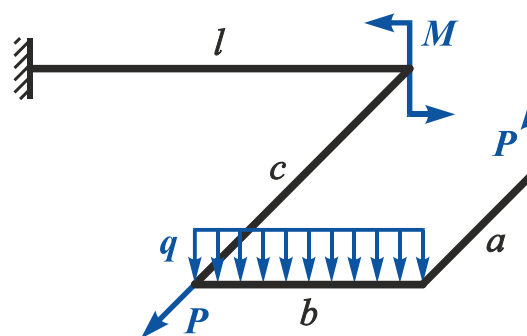


Рисунок 7 (табл. 6)

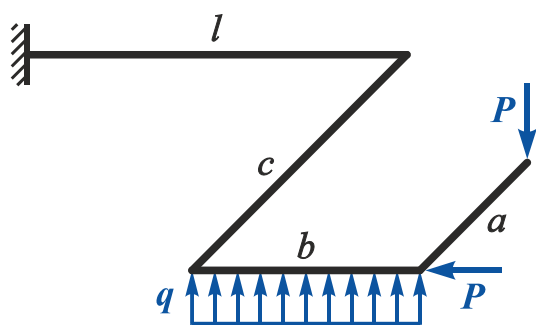
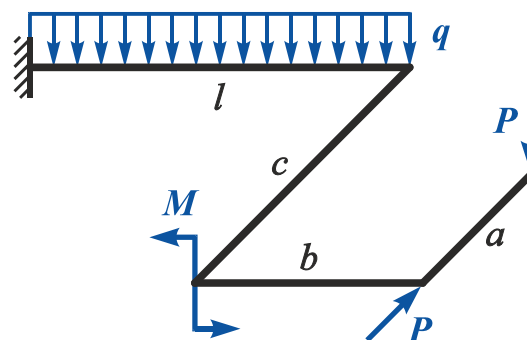


Рисунок 8 (табл. 5)





## Варианты заданий

Рисунок 9 (табл. 1)

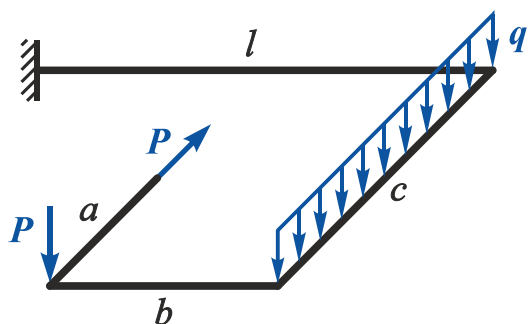


Рисунок 10 (табл. 1)

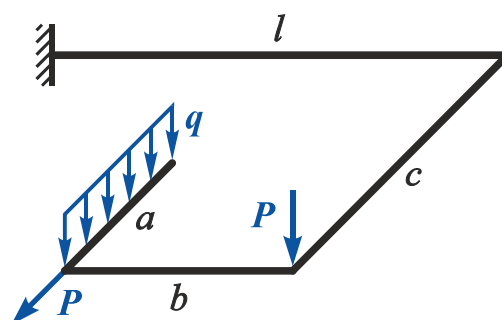


Рисунок 11 (табл. 1)

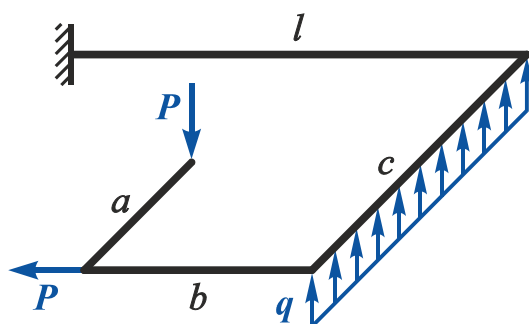


Рисунок 12 (табл. 1)

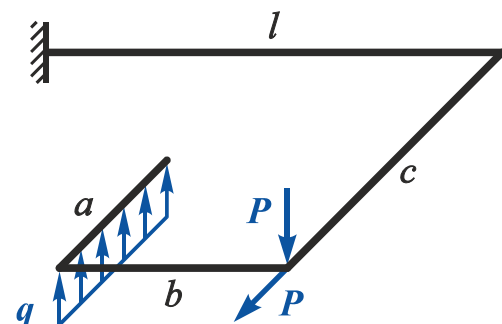


Рисунок 13 (табл. 2)

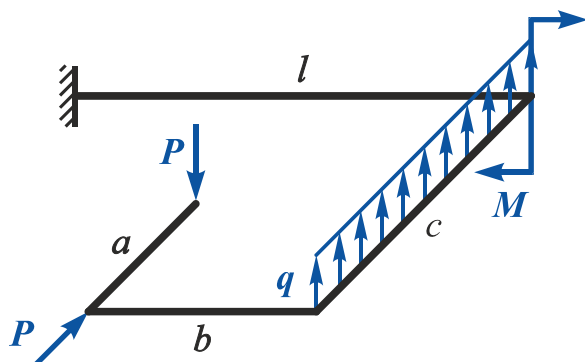


Рисунок 14 (табл. 2)

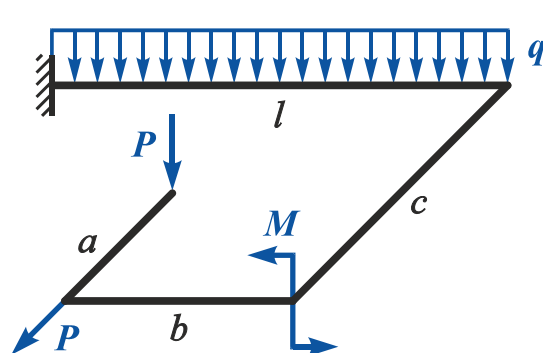


Рисунок 15 (табл. 2)

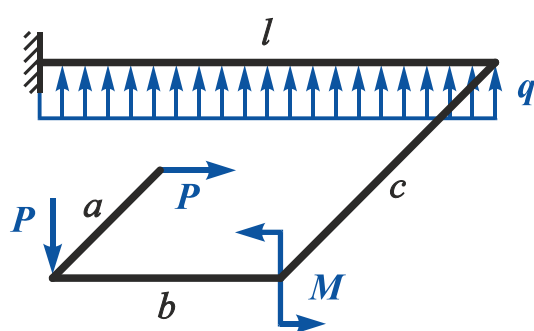
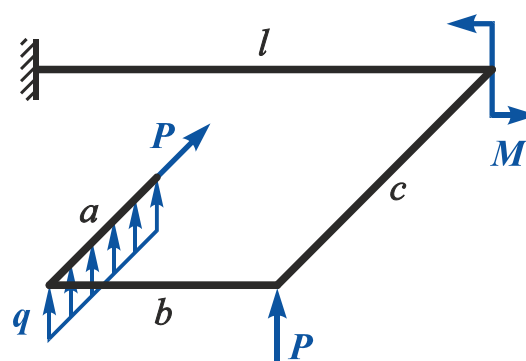


Рисунок 16 (табл. 2)



## Варианты заданий

Рисунок 17 (табл. 2)

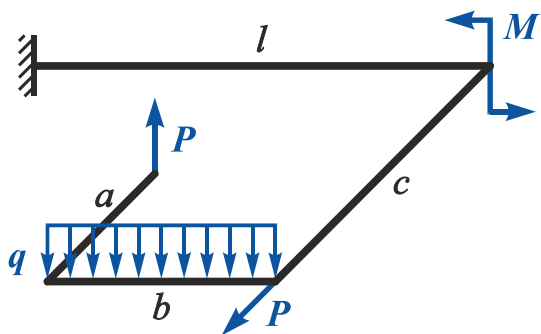


Рисунок 18 (табл. 5)

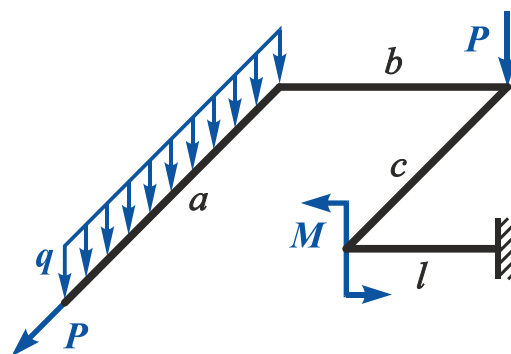


Рисунок 19 (табл. 2)

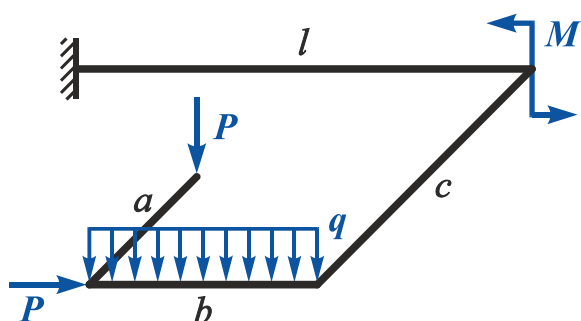


Рисунок 20 (табл. 5)

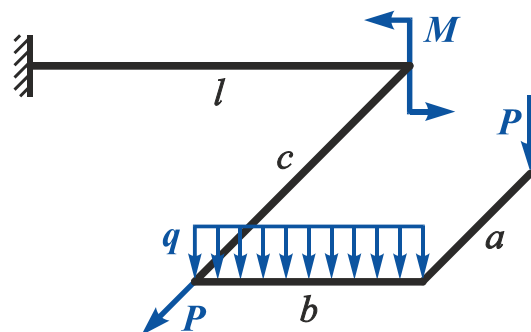


Рисунок 21 (табл. 3)

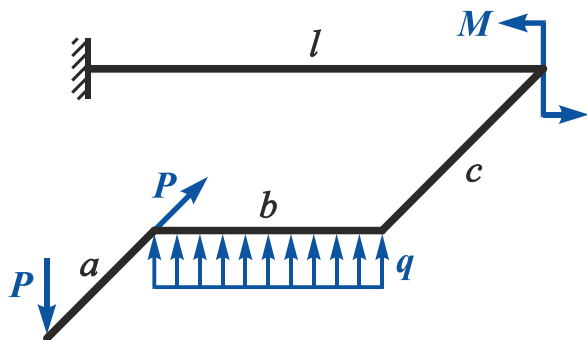


Рисунок 22 (табл. 3)

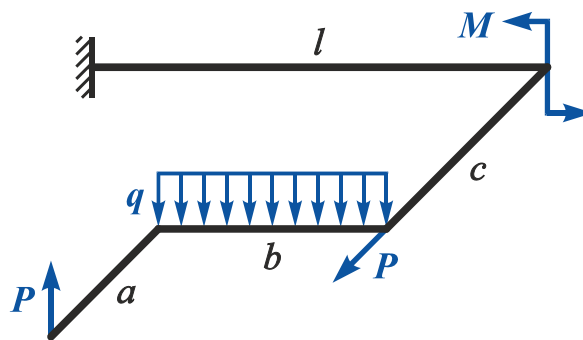


Рисунок 23 (табл. 3)

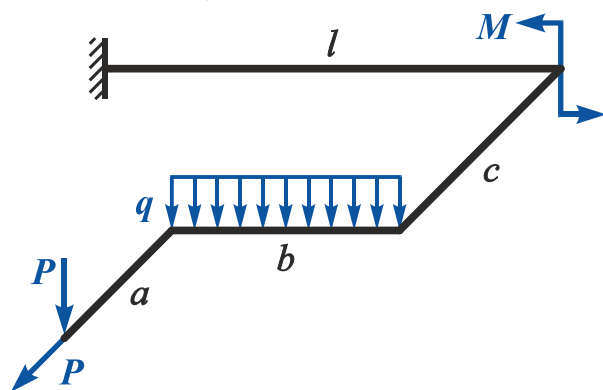
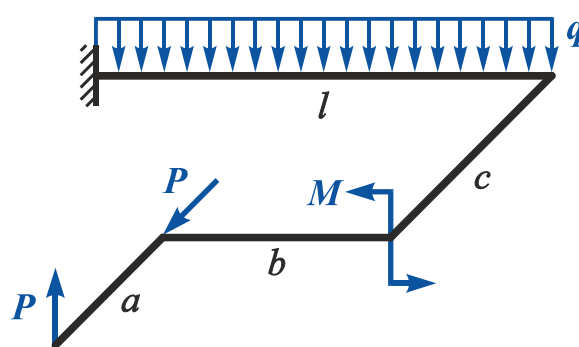


Рисунок 24 (табл. 3)



## Варианты заданий

Рисунок 25 (табл. 3)

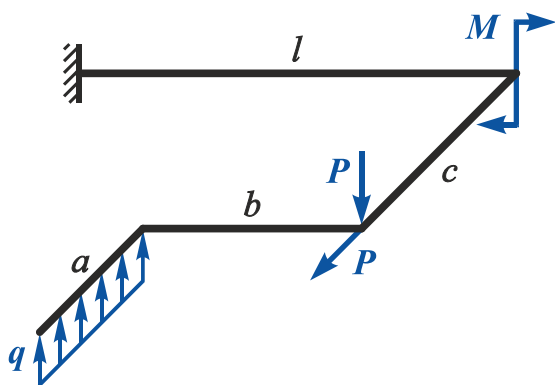


Рисунок 26 (табл. 3)

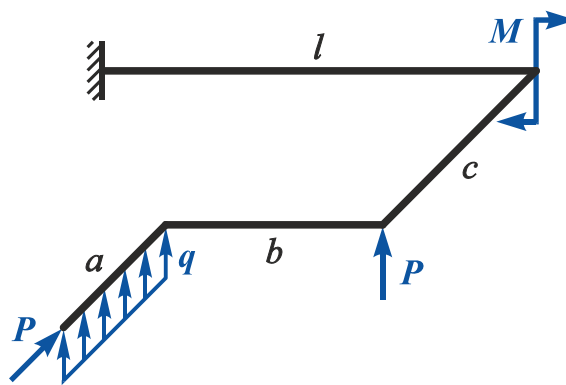


Рисунок 27 (табл. 4)

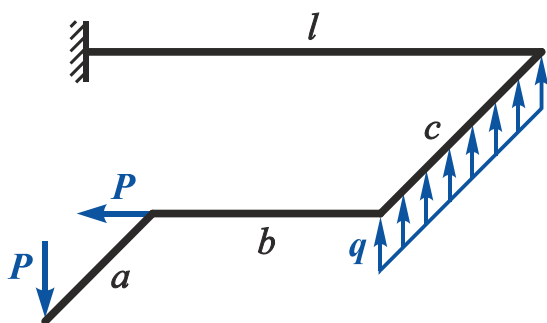


Рисунок 28 (табл. 4)

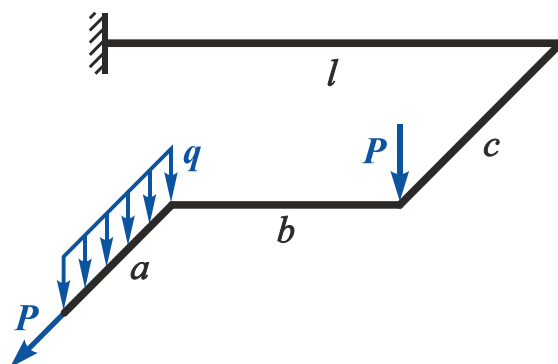


Рисунок 29 (табл. 4)

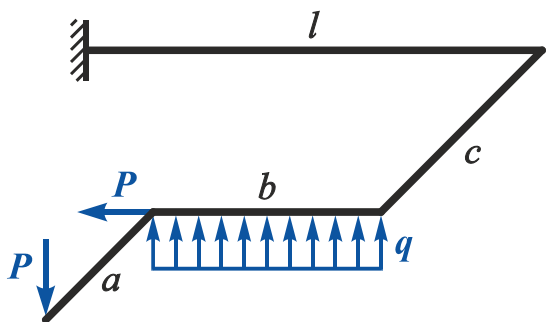


Рисунок 30 (табл. 4)

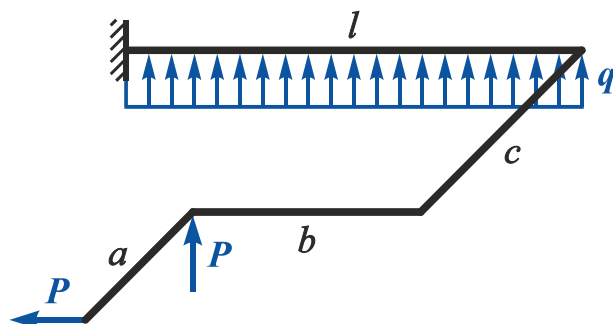


Рисунок 31 (табл. 4)

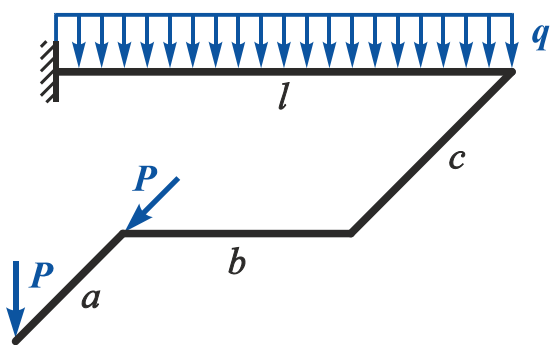
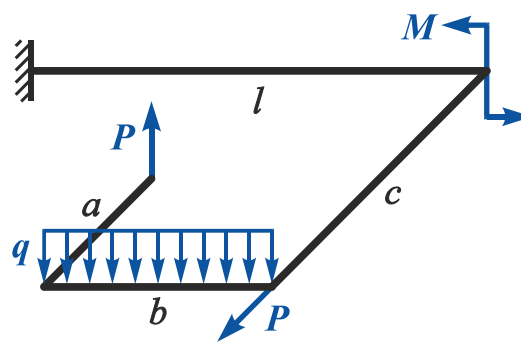


Рисунок 32 (табл. 2)



## Варианты заданий

Рисунок 33 (табл. 4)

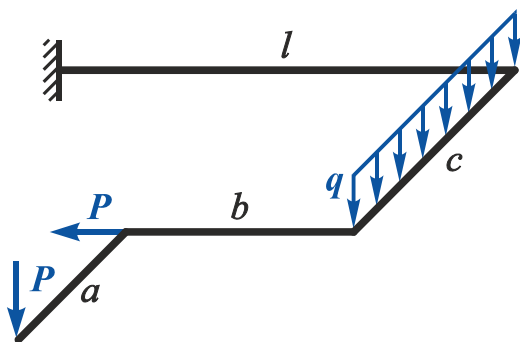


Рисунок 34 (табл. 4)

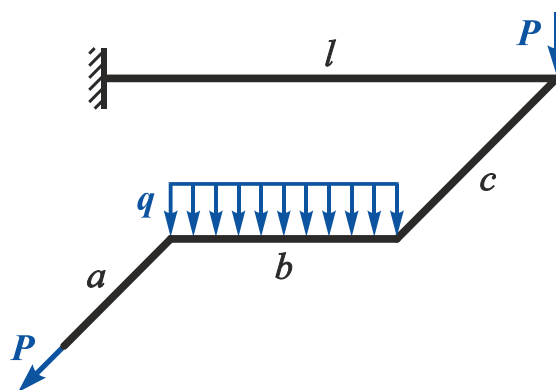


Рисунок 35 (табл. 4)

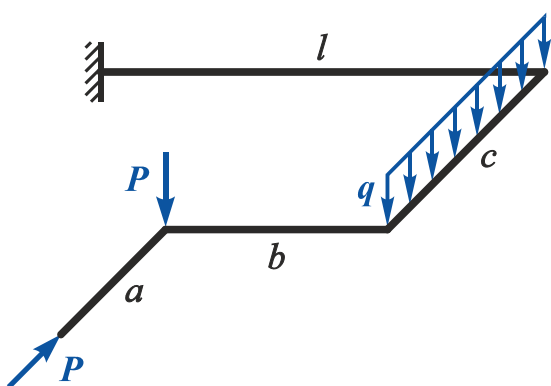


Рисунок 36 (табл. 4)

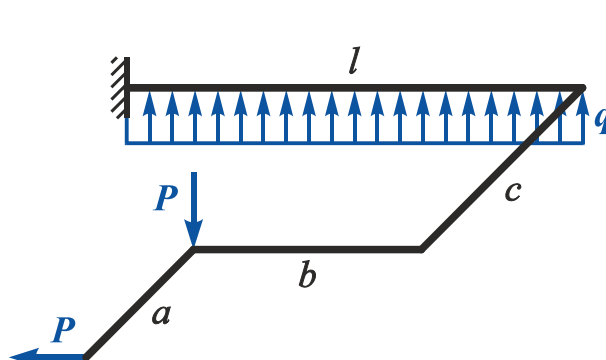


Рисунок 37 (табл. 6)

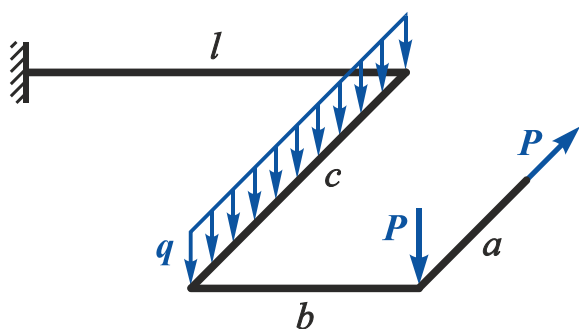


Рисунок 38 (табл. 6)

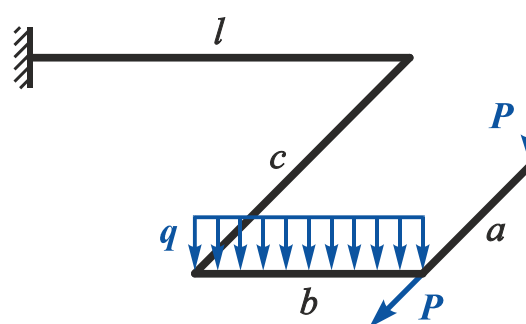


Рисунок 39 (табл. 6)

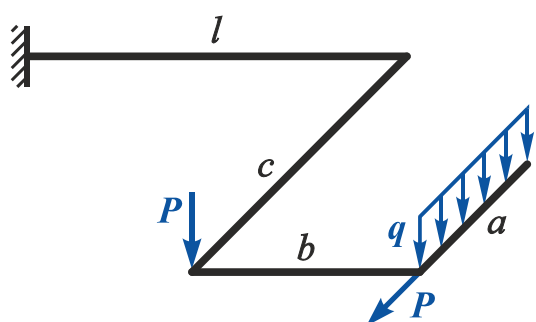
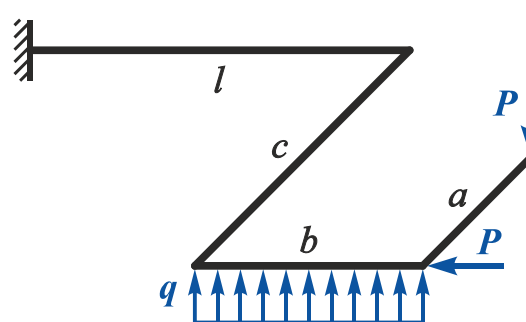


Рисунок 40 (табл. 6)



## Варианты заданий

Рисунок 41 (табл. 6)

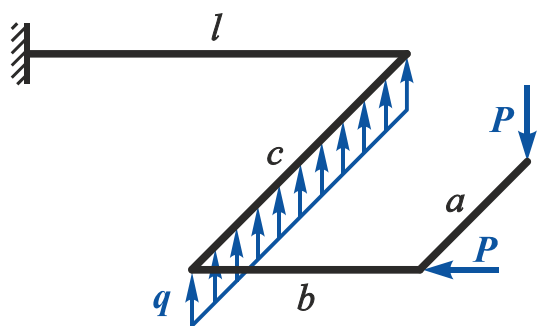


Рисунок 42 (табл. 6)

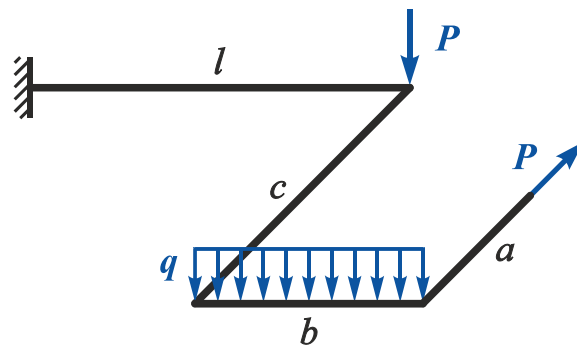


Рисунок 43 (табл. 6)

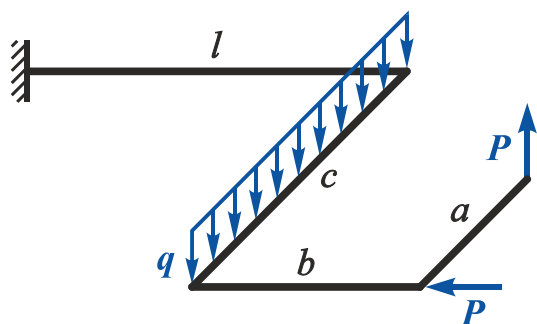


Рисунок 44 (табл. 6)

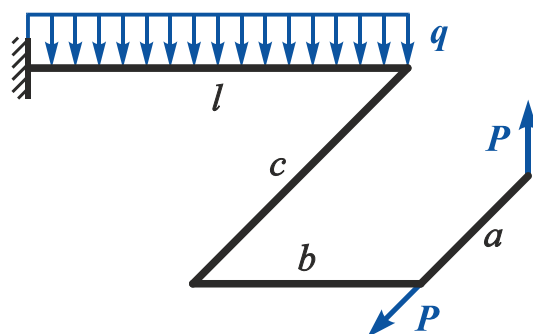


Рисунок 45 (табл. 6)

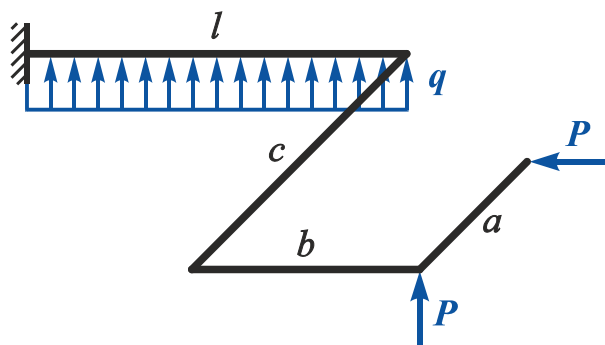


Рисунок 46 (табл. 6)

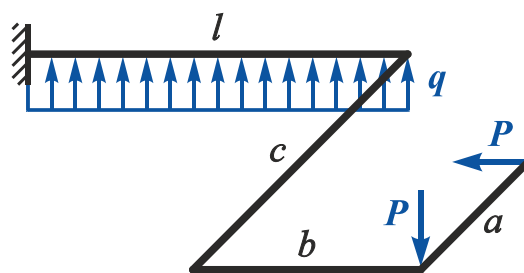


Рисунок 47 (табл. 6)

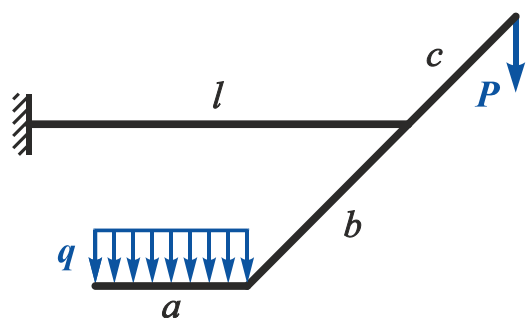
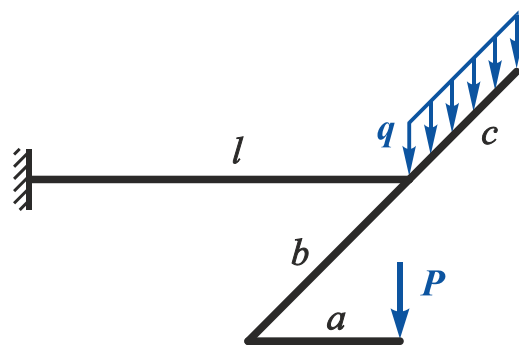


Рисунок 48 (табл. 6)



## Варианты заданий

Рисунок 49 (табл. 8)

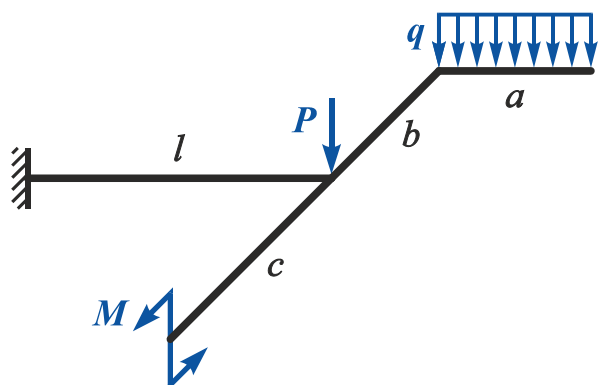


Рисунок 50 (табл. 8)

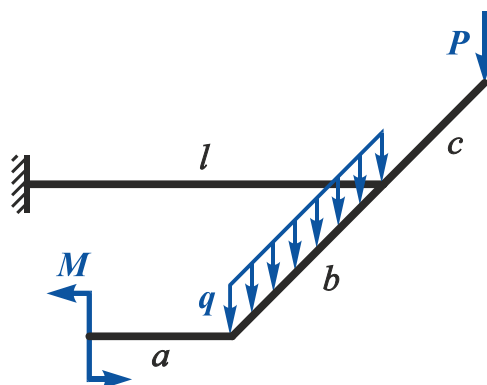


Рисунок 51 (табл. 8)

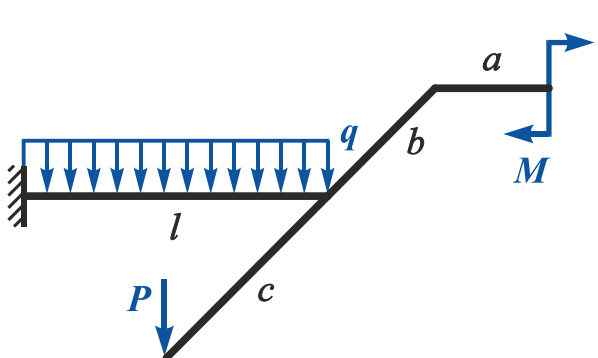


Рисунок 52 (табл. 8)

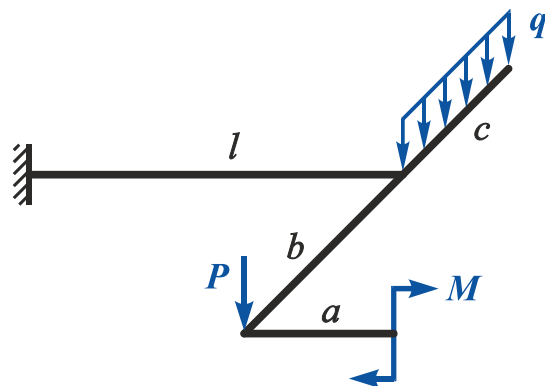


Рисунок 53 (табл. 7)

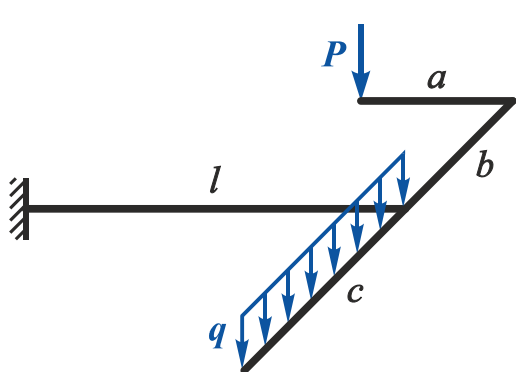


Рисунок 54 (табл. 7)

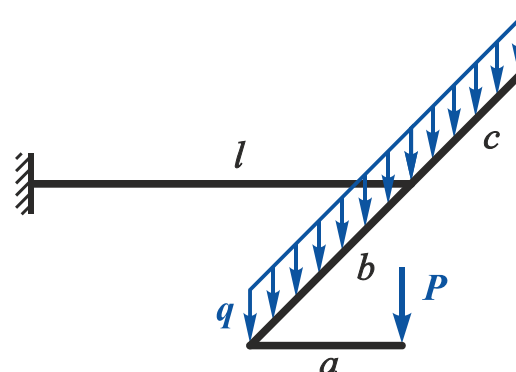


Рисунок 55 (табл. 7)

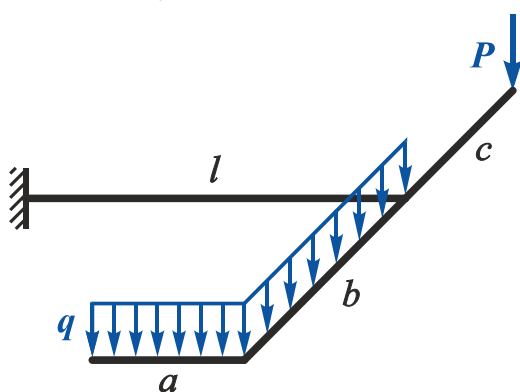


Рисунок 56 (табл. 8)

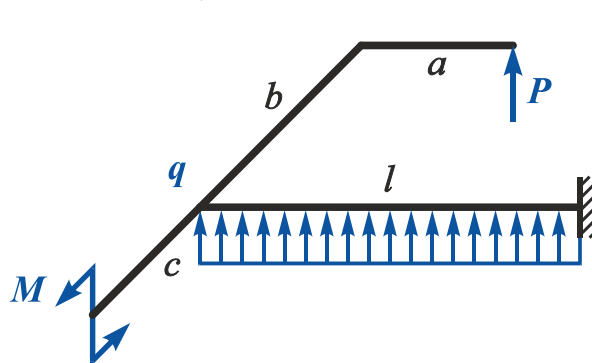


Таблица 1

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$a, м$	0,5	0,8	0,5	0,8	0,5	0,2	1	1,2	0,5	0,8	0,8	1	1	1,1	0,4	0,6	1,5	0,4	1	1,2
$b, м$	0,5	0,4	1	0,8	0,5	1,2	1,5	1,2	1,5	1,5	1,5	1,2	1,5	1,2	1	0,8	1	1,2	1,5	1,2
$c, м$	1,5	1,2	1,5	1,2	1	0,3	0,5	0,4	1	0,9	1	1,2	1,5	1,2	0,5	0,4	0,5	0,4	0,5	0,4
$l, м$	1,5	1,2	1,5	1,2	1	0,8	1	0,8	1	0,8	1	0,8	1	0,8	0,5	0,4	0,5	0,4	0,5	0,4
$P, кН$	10	5	20	10	10	5	10	12	8	5	4	5	6	5	20	10	5	8	12	8
$q, кН/м$	5	10	5	4	10	20	8	4	10	25	6	8	5	4	10	15	10	10	8	12

Таблица 2

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$a, м$	0,5	0,5	0,5	1	0,5	0,5	1	1,5	0,5	1,5	0,5	1	1,5	0,5	1	1,5	0,5	0,5	0,5	0,5
$b, м$	0,5	0,5	1	1	0,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,2	1,5	1,5	1,5	1	1	1,5	0,5	0,5	0,5	0,5
$c, м$	1,5	1,5	1,5	1,5	1	1	1,5	1,5	1	1,5	1,5	1,5	1,5	0,7	1,2	2	1	1,5	1,5	1,5
$l, м$	1,5	1,5	2	1,5	1	1	1	0,5	1,5	1	1	1	1	0,5	0,5	2	1,5	0,5	1	1,5
$P, кН$	10	5	10	10	10	5	10	12	8	5	4	5	6	5	20	10	5	8	10	8
$M, кНм$	10	15	20	30	10	15	20	30	10	15	20	30	10	15	20	30	10	15	20	30
$q, кН/м$	5	10	5	4	10	10	8	4	10	10	6	8	5	4	10	10	10	10	8	12

Таблица 3

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$a, м$	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1,5	1,5
$b, м$	1,5	1,5	1,5	1,5	1	1	1	1	1	0,5	1,5	1	1,5	1	0,5	0,5	1	1,6	0,5	0,5
$c, м$	0,5	0,5	1	1	0,5	0,5	1	1	1	1	1	0,5	1	1	1	1,5	1,5	1,5	0,5	1
$l, м$	0,5	1	0,5	1	0,5	0,8	0,5	0,8	0,5	0,4	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1
$P, кН$	5	10	5	4	10	10	8	4	10	10	6	8	5	4	10	10	10	10	8	12
$M, кНм$	10	15	20	30	10	15	20	30	10	15	20	25	30	10	15	20	25	30	10	15
$q, кН/м$	10	5	20	10	10	5	10	12	8	5	4	5	6	5	20	10	5	8	10	8

Таблица 4

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$a, м$	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1,5	1,5
$b, м$	1,8	1,5	1,5	1,5	1	1	1	1	0,5	0,5	1,5	1	1,5	1	0,5	0,5	1	1	0,5	0,5
$c, м$	0,5	0,5	1	1	0,5	0,5	1	1	1	1	1	0,5	1	1	1	1,5	1,5	1,5	0,5	1
$l, м$	0,5	1	0,5	1	0,5	0,8	0,5	0,8	0,5	0,4	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1
$P, кН$	10	5	10	10	10	5	10	12	8	5	4	5	6	5	20	10	5	8	10	8
$q, кН/м$	5	10	5	4	10	10	8	4	10	10	8	8	5	4	10	10	10	10	8	12

Таблица 5

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$a, м$	1	1	1	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1,5	1,5	1,5	1,5	0,5
$b, м$	1,5	1	1,5	1	0,5	0,5	1	1	1	1,5	1	0,5	0,5	1	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
$c, м$	0,5	0,5	1	1	1	1,5	1,5	1,5	0,6	1	1	1	1,5	1,5	1,5	0,5	1	1	0,5	1
$l, м$	1	1	1	1	1	1	1	1	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1	1	0,5
$P, кН$	10	5	20	10	10	5	10	12	8	5	4	5	5	5	20	10	5	8	10	8
$M, кНм$	10	15	20	25	30	10	15	20	25	30	10	15	20	25	30	10	15	20	25	30
$q, кН/м$	5	10	5	4	10	10	8	4	10	10	6	8	5	4	10	10	10	10	8	12

Таблица 6

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$a, м$	1	1	1	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1,5	1,5	1,5	1,5	0,5
$b, м$	1,5	1	1,5	1	0,5	0,5	1	1	1	1,5	1	0,5	0,5	1	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
$c, м$	0,5	0,5	1	1	1	1,5	1,5	1,5	0,5	1	1	1	1,5	1,5	1,5	0,5	1	1	0,5	1
$l, м$	1	1	1	1	1	1	1	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1	0,5
$P, кН$	10	5	12	10	10	5	10	12	8	5	4	5	6	5	20	10	5	8	10	8
$q, кН/м$	5	10	5	4	10	10	8	4	10	10	6	8	5	4	10	10	10	10	8	12

Таблица 7

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$a, м$	0,5	0,5	0,5	1,5	0,5	0,5	1	1	1,5	1	1	0,5	0,5	1	1,5	1	1	1,5	0,5	0,5
$b, м$	0,5	0,5	1	1	1,5	1	0,5	0,5	1	0,5	1	1,5	1	1	0,5	1,5	1	0,5	0,5	1
$c, м$	1	0,5	1	1	0,5	0,5	0,5	1	0,5	0,5	0,5	1	1,5	1,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1,5
$l, м$	1	1	2	2	1,8	1	2	2	2	1,5	1,5	1	1,5	1,5	2	1,5	1,5	2	1,5	1,5
$P, кН$	10	5	12	10	10	5	10	12	8	5	6	5	20	10	5	8	5	8	10	8
$q, кН/м$	5	10	5	4	10	10	8	4	10	10	6	8	5	4	10	10	10	10	8	12

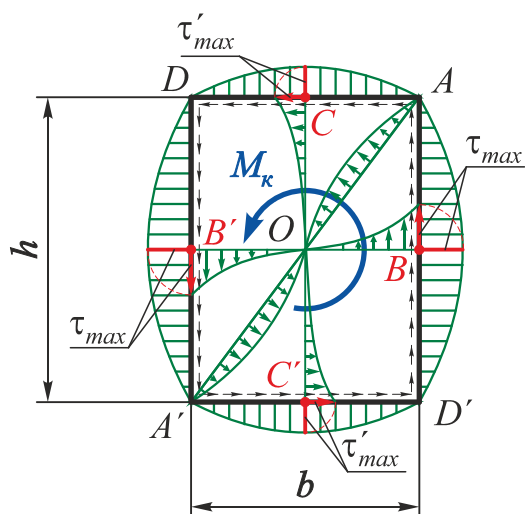
Таблица 8

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$a, м$	0,5	0,5	0,5	1,5	0,5	0,5	1	1	1,5	1	1	0,5	0,5	1	1,5	1	1	1,5	0,5	0,5
$b, м$	0,5	0,5	1	1	1,5	1	0,5	0,5	1	0,5	1	1,5	1	1	0,5	1,5	1	0,5	0,5	1
$c, м$	1	0,5	1	1	0,5	0,5	0,5	1	0,5	0,5	0,5	1	1,5	1,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1,5
$l, м$	1	1	2	2	1,8	1	2	2	2	1,5	1,5	1	1,5	1,5	2	1,5	1,5	2	1,5	1,5
$P, кН$	10	5	12	10	10	5	10	12	8	5	4	5	6	5	20	10	5	8	10	8
$M, кНм$	10	15	20	25	30	10	15	20	25	30	10	15	20	25	30	10	15	20	25	30
$q, кН/м$	5	10	5	4	10	10	8	4	10	10	6	8	5	4	10	10	10	10	8	12



## Приложение

### Кручение стержня прямоугольного поперечного сечения



Посередине длинных сторон

$$\tau_{max} = \tau_B = \tau_{B'} = \frac{M_K}{W_K};$$

посередине коротких сторон

$$\tau'_{max} = \tau_C = \tau_{C'} = \gamma \tau_{max};$$

в угловых точках и центре

$$\tau_A = \tau_{A'} = \tau_D = \tau_{D'} = \tau_O = 0;$$

угол закручивания

$$\varphi = \frac{M_K l}{GI_K};$$

$$W_K = \alpha h b^2; \quad I_K = \beta h b^3,$$

где  $M_K$  – крутящий момент, действующий в сечении;

$W_K$  – момент сопротивления кручению прямоугольного сечения;

$I_K$  – момент инерции при кручении прямоугольного поперечного сечения;

$GI_K$  – жесткость прямоугольного сечения при кручении;

$\alpha, \beta, \gamma$  – коэффициенты, зависящие от соотношения сторон  $k = h/b$ .

$k = \frac{h}{b}$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
1,0	0,208	0,141	1,000
1,2	0,219	0,166	0,935
1,25	0,221	0,172	0,910
1,5	0,231	0,196	0,859
1,75	0,239	0,214	0,820
2,0	0,246	0,229	0,795
2,5	0,258	0,249	0,766
3,0	0,267	0,263	0,753
4,0	0,282	0,281	0,745
5,0	0,291	0,291	0,744
6,0	0,299	0,299	0,743
8,0	0,307	0,307	0,742
10,0	0,313	0,313	0,742
> 10,0	0,333	0,333	0,742

## Библиографический список

Беляев, Н. М. Сопротивление материалов [Текст] / Н. М. Беляев. – М.: Гос-техиздат, 1953. – 856 с.

Пособие к решению задач по сопротивлению материалов [Текст] / И. Н. Миролюбов, С. А. Енгальчев, Н. Д. Сергиевский и др. – М.: Высш. шк., 1967. – 484 с.

Работнов, Ю. Н. Сопротивление материалов [Текст] / Ю. Н. Работнов. – М.: Физматгиз, 1962. – 455 с.

Справочник по сопротивлению материалов [Текст] / Е. Ф. Винокуров, М. К. Балыкин, И. А. Голубев и др. – Мн.: Наука и техника, 1988. – 464 с.

Сопротивление материалов [Текст] / Г. С. Писаренко, В. А. Агарев, А. Л. Квитка и др. – К.: Вища шк., 1986. – 775 с.

Сборник задач по сопротивлению материалов [Текст] / Н. М. Беляев, Л. А. Белявский, Я. И. Кипнис и др.; под ред. В. К. Качурина. – М.: Наука, 1970. – 432 с.

Тимошенко, С. П. Сопротивление материалов [Текст]: в 2 т. / С. П. Тимошенко. – М.: Физматгиз, 1960. – Т. 1: Элементарная теория и задачи. – 379 с.

Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов [Текст] / В. И. Феодосьев. – М.: Наука, 1986. – 512 с.

# Оглавление

Основные обозначения .....	3
1. Теории (гипотезы) прочности .....	4
1.1. Постановка вопроса и основные определения .....	4
1.1.1. Понятие о предельном напряженном состоянии .....	4
1.1.2. Необходимость создания теорий прочности и их назначение ...	4
1.1.3. Понятие о равноопасных (равнопрочных) напряженных состояниях .....	6
1.1.4. Понятие об эквивалентном напряжении .....	7
1.2. Основные теории прочности .....	8
1.2.1. Теория наибольших нормальных напряжений (первая теория прочности) .....	8
1.2.2. Теория наибольших линейных деформаций (вторая теория прочности) .....	9
1.2.3. Теория наибольших касательных напряжений (третья теория прочности) .....	10
1.2.4. Энергетическая теория прочности (четвертая гипотеза прочности, гипотеза энергии формоизменения) .....	12
1.2.5. Теория прочности Мора (пятая теория прочности) .....	17
1.2.6. Условие прочности по третьей и четвертой теориям прочности при плоском напряженном состоянии частного вида .....	21
1.3. Примеры решения задач .....	23
2. Построение эпюр внутренних силовых факторов для произвольно нагруженных ломаных брусев .....	26
2.1. Эпюры и основные правила их построения .....	26
2.2. Построение эпюр внутренних силовых факторов для плоско-пространственного ломаного бруса .....	28
2.2.1. Первый метод построения эпюр .....	28
2.2.2. Второй метод построения эпюр .....	38
2.3. Построение эпюр внутренних силовых факторов для пространственного ломаного бруса .....	48
3. Сложное сопротивление .....	57
3.1. Общие положения .....	57
3.2. Прямоугольное поперечное сечение .....	58
3.2.1. Изгиб с кручением и растяжением бруса прямоугольного поперечного сечения .....	58
3.2.2. Порядок подбора размеров прямоугольного поперечного сечения .....	62

3.3. Круглое поперечное сечение .....	64
3.3.1. Изгиб с кручением бруса круглого сечения .....	64
3.3.2. Изгиб с кручением и растяжением бруса круглого поперечного сечения .....	67
3.4. Примеры решения задач .....	68
3.5. Частные случаи сложного сопротивления .....	81
3.5.1. Косой изгиб .....	81
3.5.2. Примеры решения задач .....	86
3.5.3. Внецентренное растяжение-сжатие .....	94
3.5.4. Ядро сечения .....	97
3.5.5. Примеры решения задач .....	99
Вопросы для самопроверки .....	110
Порядок и пример выполнения домашнего задания .....	112
Варианты заданий .....	127
Приложение. Кручение стержня прямоугольного поперечного сечения .....	136
Библиографический список .....	137

Навчальне видання

**Гребенніков Михайло Миколайович  
Пекельний Микола Іванович**

**ТЕОРІЇ МІЦНОСТІ.  
СКЛАДНИЙ ОПІР**

(Російською мовою)

Редактор В. М. Коваль

Зв. план, 2016

Підписано до друку 12.10.2016

Формат 60×84 1/16. Папір офс. №2. Офс. друк

Ум. друк. арк. 7,6. Обл.-вид. арк. 8,75. Наклад 100 пр.

Замовлення 266. Ціна вільна

---

Видавець і виготовлювач

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського

«Харківський авіаційний інститут»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

<http://www.khai.edu>

Видавничий центр «ХАІ»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

[izdat@khai.edu](mailto:izdat@khai.edu)

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи  
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів  
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001

