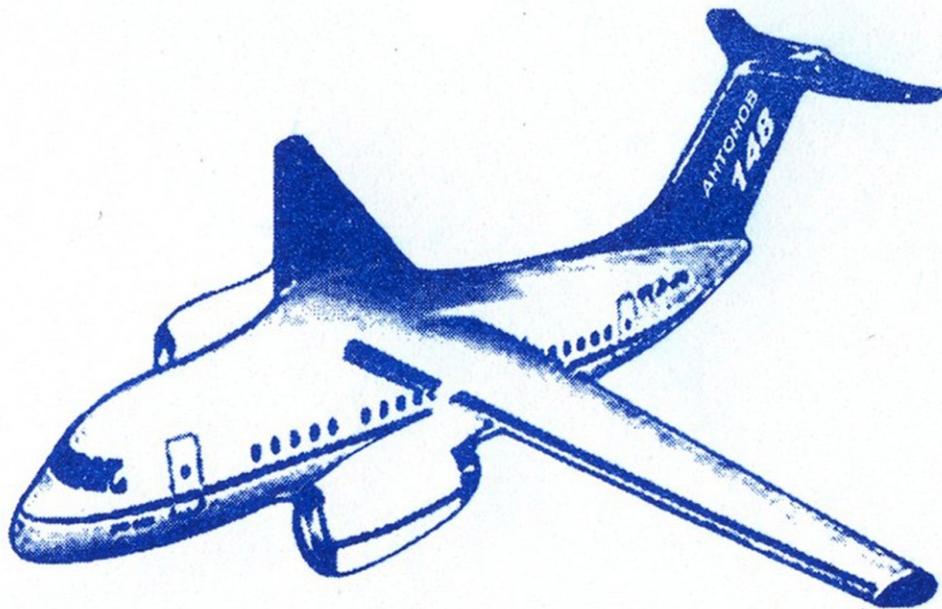




М. Н. Гребенников, Н. И. Пекельный

# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ



2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского  
«Харьковский авиационный институт»

М. Н. Гребенников, Н. И. Пекельный

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ  
ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ**

Учебное пособие

Харьков «ХАИ» 2015

УДК 539.3 / .6 (075.8)

ББК 30.121я73

Г79

Викладено методику визначення центру ваги, моментів інерції складених плоских фігур. Наведено таблиці довідкових даних, приклади розв'язання задач і рекомендації до виконання домашнього завдання з даної теми з урахуванням кінематичної перевірки правильності розв'язання.

Для студентів, які вивчають курси «Опір матеріалів» і «Механіка матеріалів і конструкцій», при самостійній роботі.

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. С. А. Бычков,  
канд. техн. наук, доц. Е. Т. Василевский

**Гребенников, М. Н.**

Г79

Геометрические характеристики плоских сечений [Текст]: учеб. пособие / М. Н. Гребенников, Н. И. Пекельный. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «Харьк. авиац. ин-т», 2015. – 92 с.

ISBN 978-966-662-409-6

Изложена методика определения центра тяжести, моментов инерции составных плоских фигур. Приведены таблицы справочных данных, примеры решения задач и рекомендации к выполнению домашнего задания по данной теме с учетом кинематической проверки правильности решения.

Для студентов, изучающих курсы «Сопротивление материалов» и «Механика материалов и конструкций», при самостоятельной работе.

Ил. 38. Табл. 9. Библиогр.: 8 назв.

УДК 539.3/.6 (075.8)

ББК 30.121я73

© Гребенников М. Н., Пекельный Н. И., 2015

© Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», 2015

ISBN 978-966-662-409-6

## Введение

При проведении расчетов на прочность, жесткость и устойчивость конструктивных элементов типа бруса (стержня) возникает необходимость использовать некоторые геометрические характеристики (свойства) плоских поперечных сечений бруса (плоских фигур), т. е. следует знать площадь сечения, положение его центра тяжести, статические моменты, осевые, полярный и центробежные моменты инерции, радиусы инерции, осевые и полярный моменты сопротивления.

Эти характеристики вследствие своего узкого прикладного значения в общем курсе геометрии не изучают, но они тесно связаны с механикой материалов и конструкций, поэтому всегда входят в курс механики материалов и конструкций в качестве неотъемлемой части.

В дальнейшем будем отождествлять понятия «плоская фигура» и «сечение», подразумевая «плоское поперечное сечение бруса».

В этом пособии рассмотрены не все используемые в курсе «Механика материалов и конструкций» геометрические характеристики плоских сечений. Некоторые из них применяются только при расчете брусьев на прочность при кручении и изгибе, а также в расчетах на устойчивость.

## Основные обозначения

- $d$  – диаметр круглого поперечного сечения;
- $b$  – ширина поперечного сечения;
- $h$  – высота поперечного сечения;
- $F$  – площадь поперечного сечения;
- $y_c, z_c$  – координаты центра тяжести сечения;
- $S_y, S_z$  – статические моменты поперечного сечения;
- $I_y, I_z$  – осевые моменты инерции поперечного сечения;
- $I_{yz}$  – центробежный момент инерции поперечного сечения;
- $I_\rho$  – полярный момент инерции поперечного сечения;
- $W_y, W_z$  – момент сопротивления поперечного сечения;
- $W_\rho$  – полярный момент сопротивления сечения;
- $i_y, i_z$  – радиус инерции поперечного сечения;
- $\alpha$  – угол поворота осей.

# 1. Статические моменты сечения

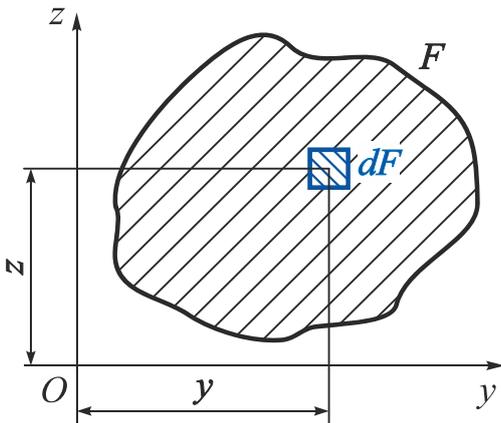


Рис. 1

Рассмотрим поперечное сечение бруса  $F$ , связанное с системой координат  $yOz$  (рис. 1). Выделим элементарную площадку  $dF$  с координатами  $y, z$ .

Произведение элементарной площади  $dF$  на расстояние  $z$  от оси  $Oy$

$$dS_y = zdF \quad (1)$$

называется элементарным *статическим моментом* площадки относительно оси  $Oy$ .

Аналогично  $dS_z = ydF$  – элементарный *статический момент* площадки относительно оси  $Oz$ .

Проведя суммирование величин  $dS_y$  и  $dS_z$  по площади сечения  $F$ , получим

$$S_y = \int_F zdF, \quad S_z = \int_F ydF, \quad (2)$$

где  $S_y, S_z$  – статические моменты сечения  $F$  относительно осей  $y$  и  $z$  соответственно.

Из выражений (2) видно, что статические моменты могут быть положительными, отрицательными или равными нулю и измеряются в единицах длины в кубе (например,  $m^3$ ).

## Замечание

Статический момент составной площади равен сумме статических моментов ее составных частей относительно той же оси:

$$S_y = \sum_{i=1}^n S_y^{(i)}; \quad S_z = \sum_{i=1}^n S_z^{(i)}.$$

# 2. Центральные оси и центр тяжести сечения

Поскольку равнодействующие внутренних усилий проходят через «центр тяжести» сечения, то определение положения центра тяжести является важной задачей.

Рассмотрим изменение статического момента сечения при параллельном переносе осей координат.

Дано:  $F, S_y, S_z, a, b$  (рис. 2).

Необходимо определить  $S_{y_1}, S_{z_1}$ , т.е. следует установить, каким образом изменяются статические моменты сечения при параллельном переносе осей.

По определению (2)

$$\begin{aligned} S_{y_1} &= \int_F z_1 dF, \\ S_{z_1} &= \int_F y_1 dF. \end{aligned} \quad (3)$$

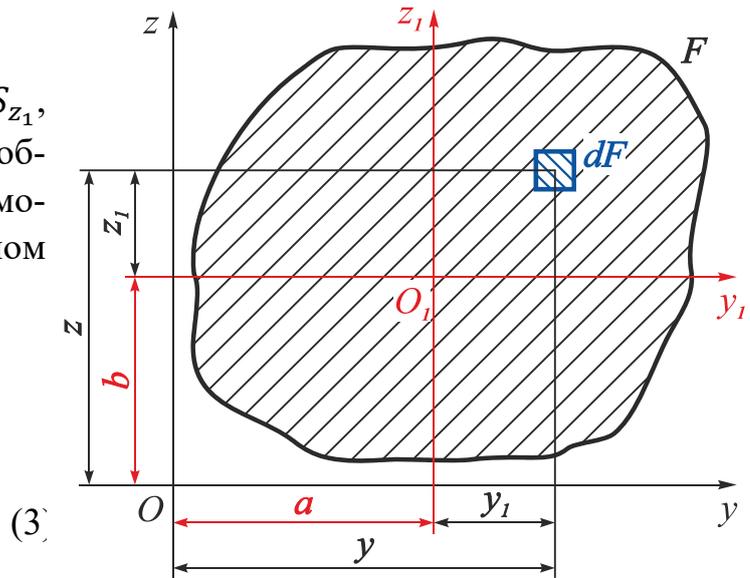


Рис. 2

Из рис. 2 видно, что

$$\begin{aligned} z_1 &= z - b; \\ y_1 &= y - a. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставив значения  $z_1$  и  $y_1$  из соотношений (4) в выражения (3), получим

$$\begin{aligned} S_{y_1} &= \int_F (z - b) dF = \int_F z dF - b \int_F dF, \\ S_{z_1} &= \int_F (y - a) dF = \int_F y dF - a \int_F dF. \end{aligned} \quad (5)$$

В выражениях (5)

$$\int_F z dF = S_y, \quad \int_F y dF = S_z, \quad \int_F dF = F.$$

Все эти величины заданы, поэтому окончательно

$$\begin{aligned} S_{y_1} &= S_y - bF, \\ S_{z_1} &= S_z - aF. \end{aligned} \quad (6)$$

Поскольку  $a$  и  $b$  – действительные числа, то существует такое **единственное** значение  $b$ , при котором  $S_{y_1} = 0$ , и такое **единственное** значение  $a$ , при котором  $S_{z_1} = 0$ . Эти значения  $a$  и  $b$  являются координатами центра тяжести сечения, их обозначают  $y_c$  и  $z_c$  соответственно, т.е., если  $a = y_c$  и  $b = z_c$ , то

$$\begin{aligned} 0 &= S_y - z_c F, \\ 0 &= S_z - y_c F. \end{aligned} \quad (7)$$

- || Оси, относительно которых статический момент сечения равен нулю, называются *центральными осями* этого сечения.
- || Точка пересечения центральных осей сечения называется его *центром тяжести (ЦТ)*.

Система соотношений (7) позволяет решать важные задачи двух типов:

1. Определение статических моментов сечения:

а) простейшего, если известны значения  $F$ ,  $z_c$  и  $y_c$ , по соотношениям

$$\begin{aligned} S_y &= z_c F; \\ S_z &= y_c F; \end{aligned} \quad (8)$$

б) составного, если известны значения  $F_i$ ,  $z_{ci}$  и  $y_{ci}$ , по выражениям

$$S_y = \sum_{i=1}^n z_{ci} F_i; \quad S_z = \sum_{i=1}^n y_{ci} F_i, \quad (9)$$

где  $n$  – количество простых частей составного сечения.

Соотношения (8) и (9) являются более простой формой реализации системы (2), так как исключают операцию интегрирования, если известна площадь сечения и расстояние от его центра тяжести до оси, относительно которой вычисляют статический момент сечения.

2. Определение координат центра тяжести сечения:

а) простейшего, если даны значения  $F$ ,  $S_y$  и  $S_z$ , по соотношениям

$$y_c = \frac{S_z}{F}; \quad z_c = \frac{S_y}{F}; \quad (10)$$

б) составного, если даны значения  $F_i$ ,  $S_y^{(i)}$  и  $S_z^{(i)}$ , по выражениям

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_z^{(i)}}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_y^{(i)}}{\sum_{i=1}^n F_i}, \quad (11)$$

где  $n$  – количество простых частей составного сечения.

**Правило симметрии.** Если сечение имеет ось симметрии, то статический момент сечения относительно этой оси *тождественно равен нулю*. Следовательно:

а) ось симметрии всегда является центральной осью сечения;

б) центр тяжести сечения всегда лежит на его оси симметрии, если таковая имеется;

в) если в сечении имеется две оси симметрии, то центр тяжести (геометрический центр) этого сечения будет находиться в точке пересечения обеих осей симметрии.

Справедливость правила симметрии очевидна из рис. 3, так как каждая площадка  $dF$ , расположенная выше оси  $y$ , для которой  $zdF > 0$ , имеет ответную, расположенную ниже оси  $y$ , для которой  $zdF < 0$ . Поэтому

$$S_y = \int_F zdF = 0.$$

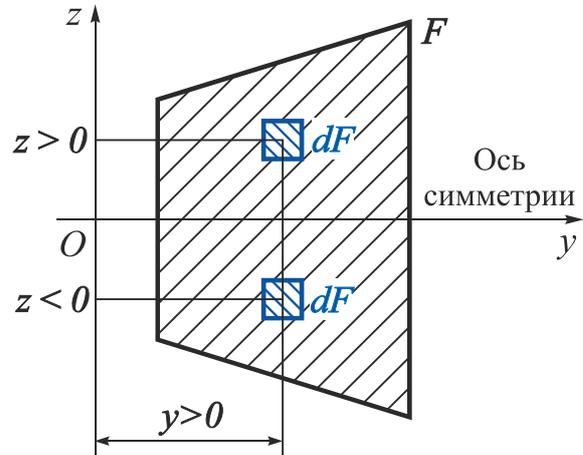


Рис. 3

### 3. Примеры определения координат центра тяжести простых сечений

#### Пример 1

Определить координаты центра тяжести прямоугольника с основанием  $b$  и высотой  $h$  в системе осей  $yOz$  (рис. 4).

Дано:  $b, h$ .

Необходимо найти  $z_c, y_c$ .

#### Решение

Воспользовавшись выражением (10), запишем

$$z_c = \frac{S_y}{F}, \quad \text{где } F = bh, \quad S_y = \int_F zdF.$$

С учетом того, что  $dF = bdz$ , перейдем к интегралу по координате  $z$ :

$$S_y = b \int_0^h zdz = \frac{bh^2}{2}.$$

Тогда  $z_c = \frac{bh^2}{2bh} = +\frac{h}{2}$ ; аналогично  $y_c = +\frac{b}{2}$ .

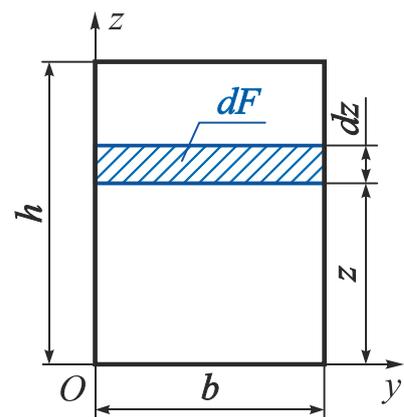


Рис. 4

### Пример 2

Определить, на каком расстоянии от основания  $b$  расположен центр тяжести треугольника (рис. 5).

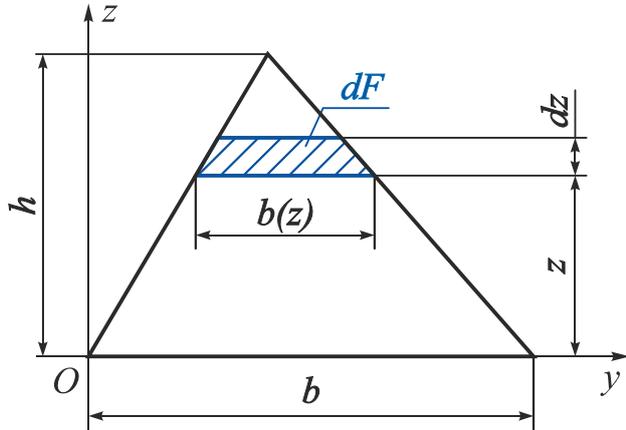


Рис. 5

Из подобия треугольников

$$\frac{b(z)}{b} = \frac{h-z}{h} \Rightarrow b(z) = b \left(1 - \frac{z}{h}\right), \text{ тогда } dF = b \left(1 - \frac{z}{h}\right) dz.$$

Подставим  $dF$  в выражение

$$S_y = \int_0^h b \left(1 - \frac{z}{h}\right) dz = b \left( \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3h} \right) \Big|_0^h = \frac{bh^2}{6}.$$

Окончательно 
$$z_c = \frac{bh^2}{6} \frac{2}{bh} = \frac{h}{3}.$$

Дано:  $b, h$ .

Необходимо найти  $z_c$ .

### Решение

Для решения задачи воспользуемся соотношением (10):

$$z_c = \frac{S_y}{F}, \text{ где } F = \frac{bh}{2}; \quad S_y = \int_F z dF.$$

В последнем выражении  $dF = b(z)dz$ .

### Пример 3

Определить координаты центра тяжести треугольника с основанием  $b$  и высотой  $h$  в системе осей  $yOz$  (рис. 6).

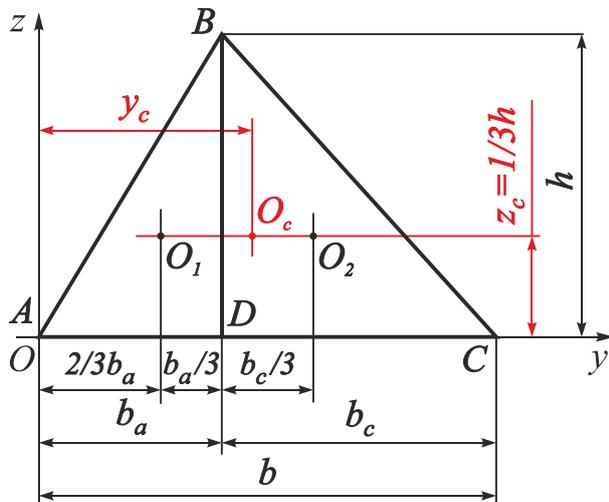


Рис. 6

Дано:  $b, h$ .

Необходимо найти  $z_c, y_c$ .

### Решение

Разобьем треугольник  $ABC$  на два прямоугольных треугольника, опустив из вершины  $B$  на его основание  $AC$  перпендикуляр  $BD$ .

Обозначим на рис. 6 центры тяжести треугольников  $ABD$  и  $BCD$ , которые находятся на расстоянии  $1/3$  от катетов ( $O_1$  и  $O_2$ ).

Составим сумму статических моментов этих треугольников относительно оси  $Oz$ :

$$S_z = \sum_{i=1}^2 S_z^{(i)} = \frac{b_a h}{2} \frac{2}{3} b_a + \frac{b_c h}{2} \left( b_a + \frac{b_c}{3} \right) = \frac{2b_a^2 h + b_c h(3b_a + b_c)}{6}.$$

Разделим эту величину на площадь треугольника  $ABC$ , получим искомую абсциссу  $y_c$  центра тяжести  $O$  треугольника:

$$y_c = \frac{S_z}{F} = \frac{2b_a^2 h + b_c h(3b_a + b)}{6 \frac{bh}{2}} = \frac{2b_a^2 + b_c(3b_a + b)}{3b}.$$

Упростим это выражение, подставив значение  $b_a + b_c = b$ :

$$y_c = \frac{2b_a^2 + b_c(2b_a + b)}{3b} = \frac{2b_a(b_a + b_c) + b_c b}{3b} = \frac{2b_a + b_c}{3} = \frac{b + b_a}{3}.$$

Центры тяжести  $O_1$  и  $O_2$  прямоугольных треугольников  $ABD$  и  $BCD$  расположены на прямой  $O_1 O_2$ , параллельной основанию треугольника  $ABC$  и находящейся на расстоянии, равном одной трети высоты. На этой же линии будет находиться и центр тяжести  $O_c$  треугольника  $ABC$ .

Таким образом, ордината центра тяжести треугольника  $ABC$

$$z_c = \frac{h}{3}.$$

#### Пример 4

Определить положение центра тяжести полукруга радиусом  $r$  относительно оси  $y$  (рис. 7).

Дано:  $r$ .

Необходимо найти  $z_c$ .

#### Решение

Так как сечение симметрично относительно оси  $z$ , то центр тяжести  $C$  полукруга расположен на этой оси. Поэтому необходимо определить только ординату  $z_c$  центра тяжести.

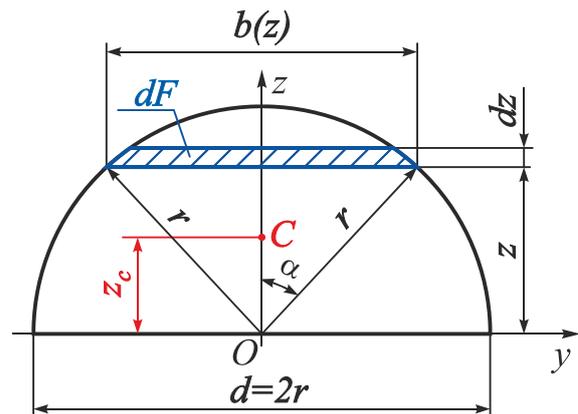


Рис. 7

Выделим в полукруге на расстоянии  $z$  от оси  $y$  элементарную площадку шириной  $b(z)$  и высотой  $dz$ . Площадь этой площадки

$$dF = b(z)dz.$$

Как видно из рис. 7,  $b(z) = 2r \sin \alpha$  и  $z = r \cos \alpha$ , следовательно,  
 $dz = (-r \sin \alpha) d\alpha$ .

Тогда статический момент относительно оси  $y$

$$S_y = \int_F z dF = \int_0^r z \cdot 2r \sin \alpha \cdot dz = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 r \cos \alpha \cdot 2r \sin \alpha (-r \sin \alpha) d\alpha =$$

$$= -2r^3 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 \alpha \cos \alpha d\alpha = -2r^3 \left( \frac{\sin^3 \alpha}{3} \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{2}{3} r^3.$$

Для нахождения положения центра тяжести воспользуемся соотношением  
 (10)

$$z_c = \frac{S_y}{F} = \frac{\frac{2}{3} r^3}{\frac{\pi r^2}{2}} = \frac{4r}{3\pi} = 0,4244r.$$

### Пример 5

Определить координаты центра тяжести составного сечения и показать систему центральных осей  $y$  и  $z$  (рис. 8).

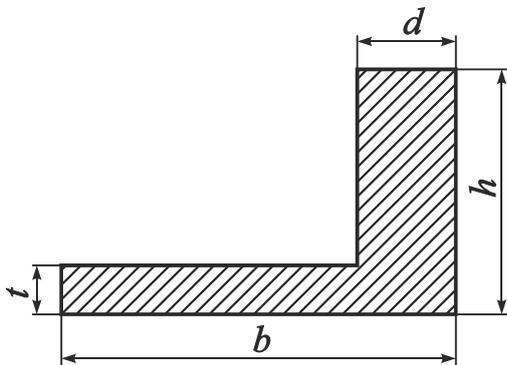


Рис. 8

Дано:  $h = 5$  см,  $b = 8$  см,  $d = 2$  см,  
 $t = 1$  см.

Необходимо найти  $y_c, z_c$ .

### Решение

1. Выполним чертеж составного сечения в масштабе (рис. 9).
2. Разобьем сечение на простейшие части и присвоим этим частям номера (1 и 2).

3. В центре тяжести каждой из простейших частей сечения расположим центральные системы координат  $y_i O_i z_i$  (в рассматриваемом случае  $y_1 O_1 z_1$  и  $y_2 O_2 z_2$ ).

4. Выберем рабочую (базовую) систему координат, в которой будут определены координаты центра тяжести всего сечения. Примем в качестве рабочей систему осей  $y_1 O_1 z_1$ .

### Замечание

Задачу можно решить в любой системе координат, однако для минимизации и упрощения вычислений целесообразно выбрать в качестве рабочей (базовой) центральную систему осей одного из элементов составного сечения.

5. Запишем формулы для определения координат центра тяжести составного сечения:

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^2 S_{z_1}^{(i)}}{\sum_{i=1}^2 F_i}; \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^2 S_{y_1}^{(i)}}{\sum_{i=1}^2 F_i}.$$

6. Вычислим площадь составного сечения

$$\sum_{i=1}^2 F_i = F_1 + F_2 = (b - d)t + hd = (8 - 2) \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 6 + 10 = 16 \text{ см}^2.$$

7. Определим статические моменты составного сечения относительно осей  $y_1$  и  $z_1$ :

$$S_{z_1} = \sum_{i=1}^2 S_{z_1}^{(i)} = S_{z_1}^{(1)} + S_{z_1}^{(2)} = F_1 \cdot 0 + F_2 \left( \frac{b-d}{2} + \frac{d}{2} \right) = 10 \cdot 4 = 40 \text{ см}^3;$$

$$S_{y_1} = \sum_{i=1}^2 S_{y_1}^{(i)} = S_{y_1}^{(1)} + S_{y_1}^{(2)} = F_1 \cdot 0 + F_2 \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 10 \cdot 2 = 20 \text{ см}^3.$$

8. Подставим полученные результаты в соотношения (см. п. 5) и вычислим координаты центра тяжести составного сечения в системе осей  $y_1 O_1 z_1$ :

$$y_c = \frac{S_{z_1}}{F} = \frac{40}{16} = 2,5 \text{ см}; \quad z_c = \frac{S_{y_1}}{F} = \frac{20}{16} = 1,25 \text{ см}.$$

9. В соответствии с результатами вычислений покажем на рис. 9 систему центральных осей  $yOz$  и центр тяжести составного сечения – точку  $O$ .

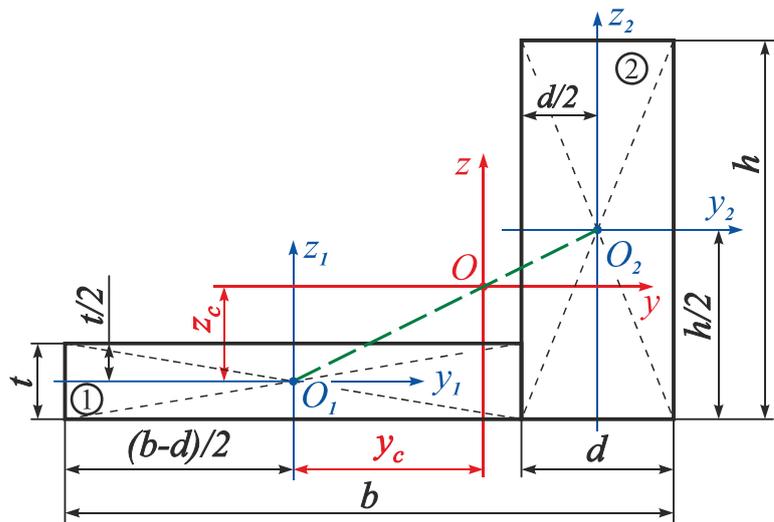


Рис. 9

**Проверка правильности решения.** Центр тяжести составного сечения, состоящего из двух простых частей, *всегда лежит на линии, соединяющей центры тяжести простых частей*. При этом точка  $O$  делит отрезок  $O_1 O_2$  на части, обратно пропорциональные площадям простых частей сечения, т.е.

$$\frac{|OO_1|}{|OO_2|} = \frac{F_2}{F_1};$$

$$\frac{|OO_1|}{|OO_2|} = \frac{\sqrt{y_c^2 + z_c^2}}{\sqrt{\left(\frac{b}{2} - y_c\right)^2 + \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} - z_c\right)^2}} = \frac{2,795}{1,677} = 1,667; \quad \frac{F_2}{F_1} = \frac{10}{6} = 1,667.$$

## 4. Осевые, полярный и центробежный моменты инерции сечения

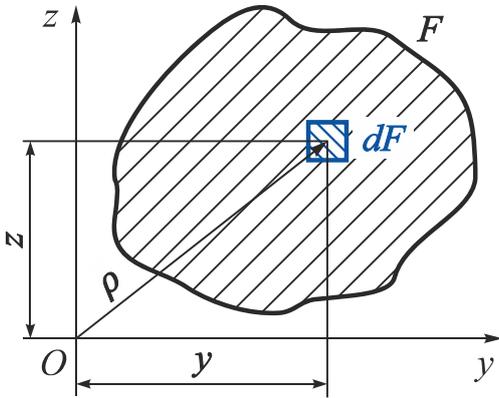


Рис. 10

По аналогии с понятием момента инерции массы тела относительно произвольной оси введем понятие моментов инерции площади.

**Осевым** (экваториальным) **моментом инерции** сечения относительно какой-либо оси называется сумма произведений элементарных площадок  $dF$  на квадраты расстояний от их центров тяжести до этой оси (рис. 10):

$$I_y = \int_F z^2 dF; \quad I_z = \int_F y^2 dF. \quad (12)$$

**Центробежным моментом инерции** сечения называется сумма произведений элементарных площадок  $dF$  на координаты центров тяжести этих площадок относительно двух ортогональных координатных осей, расположенных в плоскости фигуры:

$$I_{yz} = \int_F yz dF. \quad (13)$$

**Полярным моментом инерции** сечения называется сумма произведений элементарных площадок  $dF$  на квадрат расстояния от их центров тяжести до какого-либо полюса, причем в качестве полюса обычно выбирают начало координат (точка  $O$  на рис. 10):

$$I_\rho = \int_F \rho^2 dF, \quad \rho = \sqrt{y^2 + z^2}. \quad (14)$$

Моменты инерции измеряют в единицах длины в четвертой степени (например,  $m^4$ ).

Из соотношений (12) – (14) следует, что при  $F > 0$ :

1) **осевые** и **полярный** моменты всегда **больше нуля**:

$$I_y > 0; \quad I_z > 0; \quad I_\rho > 0;$$

2) величина **центробежного момента** инерции  $I_{yz}$  может быть **положительной, отрицательной** или **равной нулю**.

## Правило симметрии

Если сечение имеет *ось симметрии*, то в системе координат, содержащих эту ось, центробежный момент инерции тождественно *равен нулю*. Справедливость этого правила очевидна из рис. 3.

- || Пара ортогональных осей, относительно которых  $I_{yz} = 0$ , называются *главными осями инерции* сечения.

Таким образом, если одна из двух осей является осью симметрии, то она и любая перпендикулярная ей будут главными осями инерции, поскольку относительно этих осей центробежный момент инерции равен нулю.

### Замечание

Момент инерции составного сечения, состоящего из  $n$  простых частей, равен сумме моментов инерции его простых составных частей относительно той же оси:

$$I_y = \sum_{i=1}^n I_y^{(i)}; \quad I_z = \sum_{i=1}^n I_z^{(i)}; \quad I_{yz} = \sum_{i=1}^n I_{yz}^{(i)},$$

где  $I_y^{(i)}$ ,  $I_z^{(i)}$ ,  $I_{yz}^{(i)}$  – моменты инерции  $n$ -ой простой составной части сечения;

$n$  – количество составных частей всего сечения.

## 5. Связь между величинами $I_\rho$ , $I_y$ и $I_z$

По определению (14)

$$I_\rho = \int_F \rho^2 dF.$$

Если полюс  $O$  совпадает с началом координат системы осей  $yOz$ , то

$$\rho^2 = z^2 + y^2$$

и поэтому

$$I_\rho = \int_F \rho^2 dF = \int_F (z^2 + y^2) dF = \int_F z^2 dF + \int_F y^2 dF = I_y + I_z. \quad (15)$$

Таким образом, сумма осевых моментов инерции сечения относительно *ортогональных* осей  $y$  и  $z$  равна полярному моменту инерции сечения относительно начала координат и инвариантна при повороте системы координат.

## 6. Примеры определения моментов инерции простейших геометрических фигур

### Пример 1

Определить моменты инерции прямоугольного сечения, указанного на рис. 11, относительно осей  $y$  и  $z$ , которые являются осями симметрии сечения.

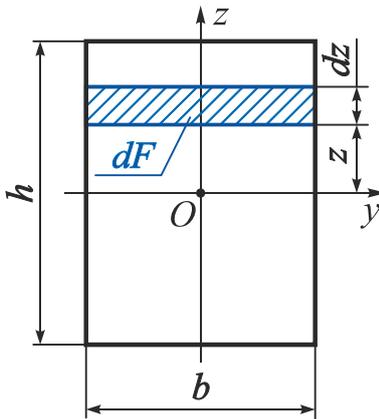


Рис. 11

**Дано:**  $h, b, O$  – центр тяжести сечения.

**Необходимо найти**  $I_y, I_z, I_{yz}, I_\rho$ .

### Решение

1. Определим момент инерции относительно оси  $y$ .

Выделим в прямоугольнике на расстоянии  $z$  от оси  $y$  элементарную площадку шириной  $b$  и высотой  $dz$ . Площадь этой площадки

$$dF = b dz.$$

Подставим значение  $dF$  в формулу (12) для вычисления осевого момента инерции

$$I_y = \int_F z^2 dF = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b z^2 dz = b \frac{z^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{b}{3} \left( \frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right) = \frac{bh^3}{12}.$$

2. Определим момент инерции относительно оси  $z$ .

Выполним выкладки, аналогичные предыдущим, получим

$$I_z = \frac{hb^3}{12}.$$

3. Поскольку оси  $y$  и  $z$  – оси симметрии сечения, то они являются главными центральными осями сечения. Следовательно, центробежный момент инерции сечения относительно системы осей  $yOz$  равен нулю:

$$I_{yz} = 0.$$

4. Определим полярный момент инерции

$$I_\rho = I_y + I_z = \frac{bh}{12} (h^2 + b^2) = \frac{F}{12} (h^2 + b^2).$$

### Пример 2

Определить моменты инерции сечения коробчатого типа при условии, что оси  $y$  и  $z$  – оси симметрии сечения (рис. 12).

**Дано:**  $B, H, b, h$ .

**Необходимо найти**  $I_y, I_z, I_{yz}$ .

#### Решение

1. Поскольку оси  $y$  и  $z$  – оси симметрии сечения, то они являются главными центральными осями этого сечения, поэтому положение центра тяжести этого сечения определено – точка пересечения осей  $y$  и  $z$  (точка  $O$ ), тогда

$$I_{yz} = 0.$$

2. Найдем  $I_y$ . Интеграл суммы равен сумме интегралов, поэтому

$$I_y = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12}.$$

3. Определим по аналогии

$$I_z = \frac{HB^3}{12} - \frac{hb^3}{12}.$$

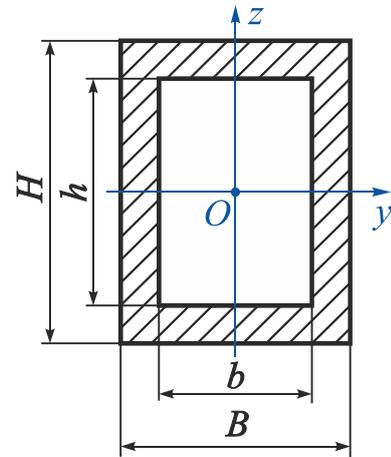


Рис. 12

### Пример 3

Определить моменты инерции круглого сечения (рис. 13) относительно центральных осей  $y$  и  $z$ .

**Дано:**  $d$ .

**Необходимо найти**  $I_y, I_z, I_{yz}, I_\rho$ .

#### Решение

1. Определим полярный момент инерции  $I_\rho$ .

Выделим в круглом сечении элементарную кольцевую площадку толщиной  $d\rho$  и радиусом  $\rho$ . Площадь этой площадки  $dF = 2\pi\rho d\rho$ .

Подставим значение  $dF$  в формулу (14):

$$I_\rho = \int_F \rho^2 dF = \int_0^{\frac{d}{2}} 2\pi\rho^3 d\rho = 2\pi \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{\frac{d}{2}} = \frac{2\pi d^4}{4 \cdot 16} = \frac{\pi d^4}{32}.$$

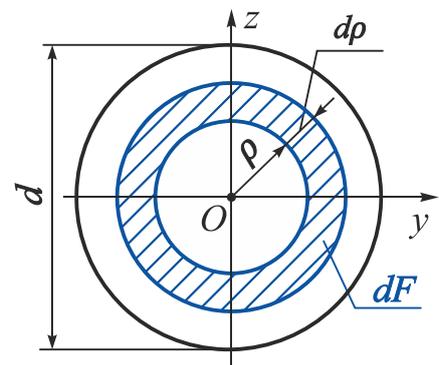


Рис. 13

2. Определим осевые моменты инерции  $I_y$  и  $I_z$ .

Осевые моменты инерции круглого сечения относительно всех осей, проходящих через центр тяжести, имеют одинаковое значение, т.е.  $I_y = I_z$ .

Тогда

$$I_\rho = I_y + I_z = 2I_y = 2I_z.$$

Отсюда

$$I_y = I_z = \frac{I_\rho}{2} = \frac{\pi d^4}{64}.$$

3. Поскольку оси  $y$  и  $z$  – оси симметрии сечения, то они являются главными центральными осями сечения. Следовательно, центробежный момент инерции сечения относительно системы осей  $yOz$  равен нулю:

$$I_{yz} = 0.$$

#### **Пример 4**

Определить моменты инерции кольцевого сечения относительно центральных осей  $y$  и  $z$  (рис. 14).

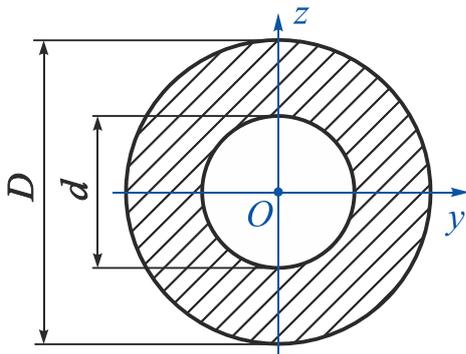


Рис. 14

**Дано:**  $D, d, \alpha = d/D$ .

**Необходимо найти**  $I_y, I_z, I_{yz}, I_\rho$ .

#### **Решение**

1. Поскольку оси  $y$  и  $z$  – оси симметрии сечения, то они являются главными центральными осями этого сечения и точка  $O$  – центр тяжести, то

$$I_{yz} = 0.$$

2. Определим полярный момент инерции

$$I_\rho = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \{ \text{с учетом } d = \alpha D \} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4).$$

3. Найдем осевые моменты инерции относительно осей  $y$  и  $z$ .

Осевые моменты инерции кольцевого сечения относительно всех осей, проходящих через центр тяжести, имеют одинаковое значение, т.е.  $I_y = I_z$ .

Тогда

$$I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \{ \text{с учетом } d = \alpha D \} = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4).$$

### Пример 5

Определить моменты инерции прямоугольного треугольника относительно осей, совпадающих с катетами (рис. 15).

**Дано:**  $h, b$ .

**Необходимо найти**  $I_{y_1}, I_{z_1}, I_{y_1z_1}$ .

#### Решение

1. Найдем осевой момент инерции относительно оси  $y_1$ .

Выделим в прямоугольном треугольнике на расстоянии  $z_1$  от оси  $y_1$  элементарную площадку шириной  $b(z_1)$  и высотой  $dz_1$ . Площадь этой площадки

$$dF = b(z_1)dz_1.$$

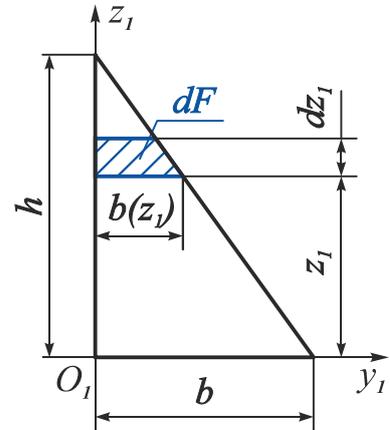


Рис. 15

Из подобия треугольников определим  $b(z_1)$ :

$$\frac{b(z_1)}{b} = \frac{h - z_1}{h} \Rightarrow b(z_1) = b \left(1 - \frac{z_1}{h}\right).$$

Тогда

$$I_{y_1} = \int_F z_1^2 dF = \int_0^h b z_1^2 \left(1 - \frac{z_1}{h}\right)^2 dz_1 = b \left( \frac{z_1^3}{3} - \frac{z_1^4}{4h} \right) \Big|_0^h = \frac{bh^3}{12}.$$

2. По аналогии найдем осевой момент инерции относительно оси  $z_1$

$$I_{z_1} = \frac{hb^3}{12}.$$

3. Вычислим центробежный момент инерции относительно осей  $y_1$  и  $z_1$

$$I_{y_1z_1} = \int_0^h y_1 z_1 dF = \int_0^h z_1 \left( \int_0^{b(z_1)} y_1 dy_1 \right) dz_1 = \int_0^h z_1 \frac{b^2(z_1)}{2} dz_1.$$

После подстановки  $b(z_1)$  получим

$$\begin{aligned} I_{y_1z_1} &= \int_0^h \frac{b^2}{2} z_1 \left(1 - \frac{z_1}{h}\right)^2 dz_1 = \frac{b^2}{2} \left( \frac{z_1^2}{2} - \frac{2z_1^3}{3h} + \frac{z_1^4}{4h^2} \right) \Big|_0^h = \\ &= \frac{b^2 h^2}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = + \frac{b^2 h^2}{24}. \end{aligned}$$

### Пример 6

Определить моменты инерции прямоугольного треугольника относительно центральных осей  $y$  и  $z$  (рис. 16).

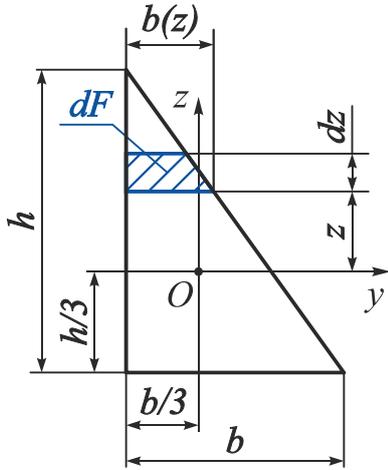


Рис. 16

Дано:  $h, b$ .

Необходимо найти  $I_y, I_z, I_{yz}$ .

#### Решение

1. Найдем осевой момент инерции относительно оси  $y$ .

Выделим в прямоугольном треугольнике на расстоянии  $z$  от оси  $y$  элементарную площадку шириной  $b(z)$  и высотой  $dz$ . Площадь этой площадки

$$dF = b(z)dz.$$

Из подобия треугольников определим  $b(z)$ :

$$\frac{b(z)}{b} = \frac{\frac{2h}{3} - z}{h} \Rightarrow b(z) = \frac{b}{h} \left( \frac{2h}{3} - z \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_y &= \int_F z^2 dF = \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2}{3}h} z^2 \frac{b}{h} \left( \frac{2h}{3} - z \right) dz = \frac{b}{3h} \left( \frac{2hz^3}{3} - \frac{3z^4}{4} \right) \Big|_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2}{3}h} = \\ &= \frac{b}{3h} \left[ \frac{2h \left( \frac{2}{3}h \right)^3}{3} - \frac{3 \left( \frac{2}{3}h \right)^4}{4} - \frac{2h \left( -\frac{h}{3} \right)^3}{3} + \frac{3 \left( -\frac{h}{3} \right)^4}{4} \right] = \frac{bh^3}{36}. \end{aligned}$$

2. По аналогии найдем осевой момент инерции относительно оси  $z$

$$I_z = \frac{hb^3}{36}.$$

3. Вычислим центробежный момент инерции относительно осей  $y$  и  $z$

$$\begin{aligned} I_{yz} &= \int_0^h yz dF = \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2}{3}h} z \left( \int_{-\frac{b}{3}}^{\frac{b(z)-b}{3}} y dy \right) dz = \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2}{3}h} z \frac{\left( \frac{b}{h} \left( \frac{2h}{3} - z \right) - \frac{b}{3} \right)^2 - \left( -\frac{b}{3} \right)^2}{2} dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2}{3}h} \left( -\frac{2b^2z^2}{3h} + \frac{b^2z^3}{h^2} \right) dz = \frac{b^2h^2}{2} \left( -\frac{16}{3 \cdot 81} + \frac{4}{81} - \frac{2}{3 \cdot 81} - \frac{1}{8 \cdot 81} \right) = -\frac{b^2h^2}{72}. \end{aligned}$$

## Замечания

1. Любой треугольник можно представить как комбинацию прямоугольных треугольников, что позволяет использовать полученные соотношения для определения моментов инерции произвольных треугольных сечений.
2. Центробежный момент инерции прямоугольного треугольника относительно его центральных осей, параллельных катетам, может быть как положительным, так и отрицательным. Знак  $I_{yz}$  определяется взаиморасположением треугольника и его центральных осей. Рассмотрим варианты этого взаиморасположения (рис. 17).

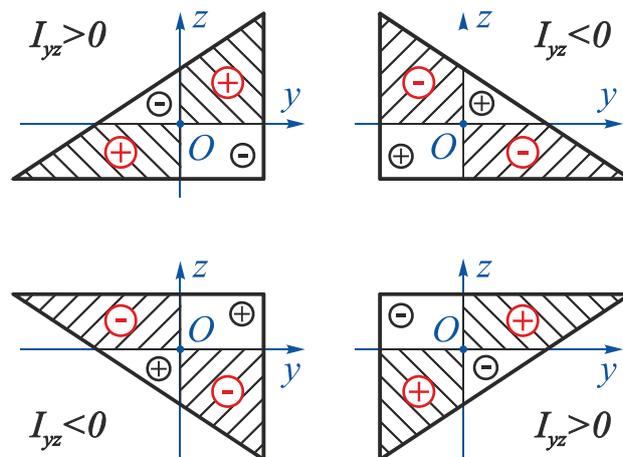


Рис. 17

Поскольку

$$I_{yz} = \int_F yz dF \text{ и } dF > 0,$$

то знак  $I_{yz}$  определяется знаком произведения  $yz$ , которое положительно в первой и третьей четвертях и отрицательно во второй и четвертой. Если чертеж сечения выполнен в масштабе, то в большинстве случаев можно визуально определить знак  $I_{yz}$ . На рисунках заштрихованы области, преобладающие в процессе суммирования (интегрирования) величин  $yzdF$ , что и определяет знак  $I_{yz}$ . Поэтому окончательно

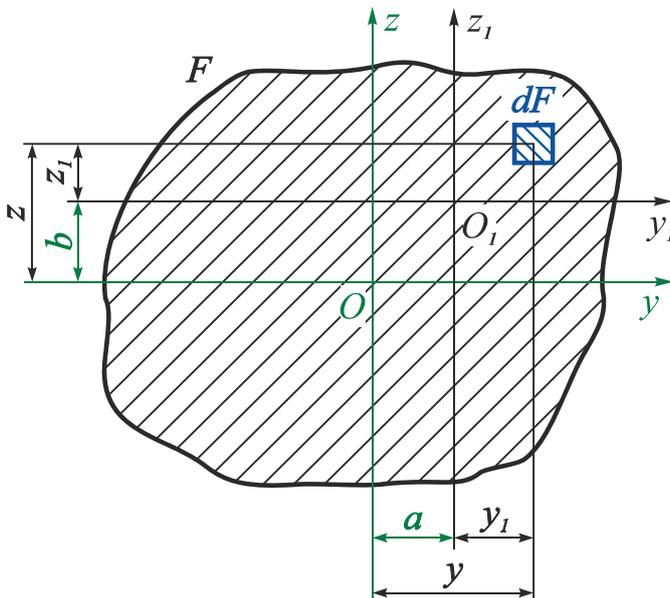
$$I_{yz} = \pm \frac{b^2 h^2}{72},$$

и знак выбирают или формально по результатам выкладок, или из этих простых соображений, которые требуют понимания смысла операции интегрирования.

## 7. Изменение осевых и центробежных моментов инерции сечения при параллельном переносе осей

В расчетах на прочность инженерных конструкций и сооружений часто возникает необходимость определения осевых и центробежных моментов инерции сложных сечений относительно осей, *произвольно* расположенных по отношению к *центральному*. Такие осевые и центробежные моменты инерции могут быть найдены путем выполнения двух операций – параллельного переноса и поворота относительно начала координат.

Рассмотрим вычисление осевых и центробежных моментов инерции при переходе к осям, которые параллельны центральным (рис. 18).



**Дано:**  $F, a, b, I_y, I_z, I_{yz}$ ; оси  $y$  и  $z$  являются центральными осями сечения  $F$ , т.е.

$$S_y = \int_F z dF = 0,$$

$$S_z = \int_F y dF = 0.$$

**Необходимо найти**  $I_{y_1}, I_{z_1}, I_{y_1 z_1}$ .

Рис. 18

По определению (12), (13)

$$I_{y_1} = \int_F z_1^2 dF;$$

$$I_{z_1} = \int_F y_1^2 dF; \tag{16}$$

$$I_{y_1 z_1} = \int_F y_1 z_1 dF.$$

Из рис. 18 видно, что

$$\begin{aligned} z_1 &= z - b, \\ y_1 &= y - a. \end{aligned} \tag{17}$$

Подставив значения  $z_1$  и  $y_1$  из уравнений (17) в соотношения (16), получим

$$I_{y_1} = \int_F (z - b)^2 dF = \int_F z^2 dF - 2b \int_F z dF + b^2 \int_F dF ;$$

$$I_{z_1} = \int_F (y - a)^2 dF = \int_F y^2 dF - 2a \int_F y dF + a^2 \int_F dF ;$$

$$I_{y_1 z_1} = \int_F (z - b)(y - a) dF = \int_F yz dF - b \int_F y dF - a \int_F z dF + ab \int_F dF .$$

В правых частях этих соотношений

$$\int_F z^2 dF = I_y; \quad \int_F y^2 dF = I_z; \quad \int_F yz dF = I_{yz}; \quad \int_F dF = F;$$

$$\int_F z dF = S_y = 0; \quad \int_F y dF = S_z = 0,$$

и все эти величины заданы, поэтому окончательно получим

$$\begin{aligned} I_{y_1} &= I_y + b^2 F; \\ I_{z_1} &= I_z + a^2 F; \\ I_{y_1 z_1} &= I_{yz} + abF. \end{aligned} \tag{18}$$

Таким образом осевой момент инерции плоского сечения относительно некоторой оси, лежащей в плоскости сечения фигуры и параллельной центральной оси, равен осевому моменту инерции этой фигуры относительно центральной оси плюс произведение площади сечения фигуры на квадрат координаты центра тяжести сечения в новой системе координат.

Центробежный момент инерции сечения относительно пары ортогональных осей, лежащих в плоскости сечения и параллельных центральным, равен центробежному моменту инерции сечения относительно пары ортогональных центральных осей плюс произведение площади сечения на координаты центра тяжести сечения в новой системе координат. При определении **центробежного момента инерции** обязательно **учитывают знаки координат** относительно заданных осей.

### Замечание

Из первых двух соотношений системы (18) следует, что из всего множества осей, параллельных какому-либо координатному направлению, центральная ось отличается тем, что осевой момент инерции относительно этой оси имеет минимальное значение.

## 8. Изменение осевых и центробежных моментов инерции сечения при повороте осей

**Дано:**  $F, I_y, I_z, I_{yz}, \alpha$ . Система  $y_1Oz_1$  получена из исходной путем поворота ее на угол  $\alpha$  относительно начала координат (показанное на рис. 19 направление поворота – против часовой стрелки – будем считать положительным).

**Необходимо определить**  $I_{y_1}, I_{z_1}, I_{y_1z_1}$ .

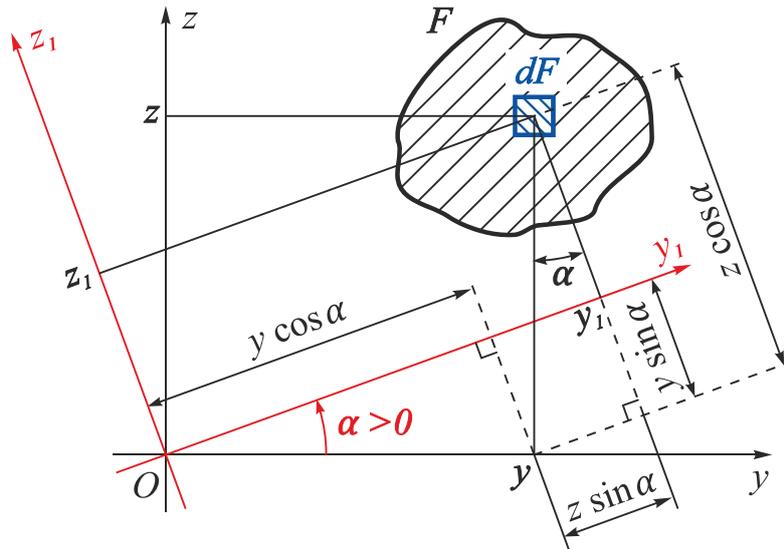


Рис. 19

По определению (12), (13)

$$\begin{aligned} I_{y_1} &= \int_F z_1^2 dF; \\ I_{z_1} &= \int_F y_1^2 dF; \\ I_{y_1z_1} &= \int_F y_1z_1 dF. \end{aligned} \tag{19}$$

Из рис. 16 видно, что

$$\begin{aligned} z_1 &= z \cos \alpha - y \sin \alpha; \\ y_1 &= y \cos \alpha + z \sin \alpha. \end{aligned} \tag{20}$$

Подставим значения  $z_1$  и  $y_1$  в выражения системы (19):

$$\begin{aligned} I_{y_1} &= \int_F (z \cos \alpha - y \sin \alpha)^2 dF = \\ &= \cos^2 \alpha \int_F z^2 dF - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_F yz dF + \sin^2 \alpha \int_F y^2 dF; \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 I_{z_1} &= \int_F (y \cos \alpha + z \sin \alpha)^2 dF = \\
 &= \cos^2 \alpha \int_F y^2 dF + 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_F yz dF + \sin^2 \alpha \int_F z^2 dF.
 \end{aligned} \tag{22}$$

С учетом того, что в выражениях (21) и (22)

$$\int_F z^2 dF = I_y; \quad \int_F y^2 dF = I_z; \quad \int_F yz dF = I_{yz}; \quad 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha,$$

и все эти величины заданы, получим окончательно выражения для определения осевых моментов инерции сечения при повороте осей:

$$\begin{aligned}
 I_{y_1} &= I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha - I_{yz} \sin 2\alpha; \\
 I_{z_1} &= I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha + I_{yz} \sin 2\alpha.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Перейдем к нахождению центробежного момента инерции сечения:

$$\begin{aligned}
 I_{y_1 z_1} &= \int_F (z \cos \alpha - y \sin \alpha) (y \cos \alpha + z \sin \alpha) dF = \\
 &= \cos^2 \alpha \int_F yz dF - \sin \alpha \cos \alpha \int_F y^2 dF + \sin \alpha \cos \alpha \int_F z^2 dF - \sin^2 \alpha \int_F yz dF = \\
 &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int_F yz dF + 2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{1}{2} \left( \int_F z^2 dF - \int_F y^2 dF \right).
 \end{aligned}$$

С учетом того, что в этом выражении

$$\begin{aligned}
 \int_F z^2 dF = I_y; \quad \int_F y^2 dF = I_z; \quad \int_F yz dF = I_{yz}; \\
 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha; \quad 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha,
 \end{aligned}$$

и все эти величины заданы, получим окончательно

$$I_{y_1 z_1} = I_{yz} \cos 2\alpha + \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha. \tag{24}$$

### Замечания

1. В формулах (23), (24) исходные оси – **произвольные** (не обязательно центральные).
2. Выражения (23), (24) являются периодическими функциями с наименьшим периодом  $\pi$  и зависят от  $\alpha$ .
3. При повороте осей на  $\pi/2$  центробежный момент инерции меняет свой знак, а осевые моменты инерции всегда остаются положительными (при любом  $\alpha$ ).

## 9. Инвариантность суммы осевых моментов инерции сечения относительно поворота осей

Найдем сумму осевых моментов инерции из уравнений (23):

$$\begin{aligned} I_{y_1} + I_{z_1} &= I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha - I_{yz} \sin 2\alpha + I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha + I_{yz} \sin 2\alpha = \\ &= I_y(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + I_z(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha). \end{aligned}$$

Отсюда с учетом того, что  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , получим

$$I_{y_1} + I_{z_1} = I_y + I_z = I_\rho = \text{const}. \quad (25)$$

Это положение, по существу, уже доказано ранее (см. разд. 5). Было показано (см. уравнение (15)), что

$$I_\rho = I_y + I_z.$$

Таким образом, при фиксированном положении полюса величина  $I_\rho$  не изменяется или, иными словами, **сумма двух осевых моментов инерции** относительно любой пары ортогональных осей, выходящих из одной точки, есть **величина постоянная**.

## 10. Главные оси и главные моменты инерции сечения

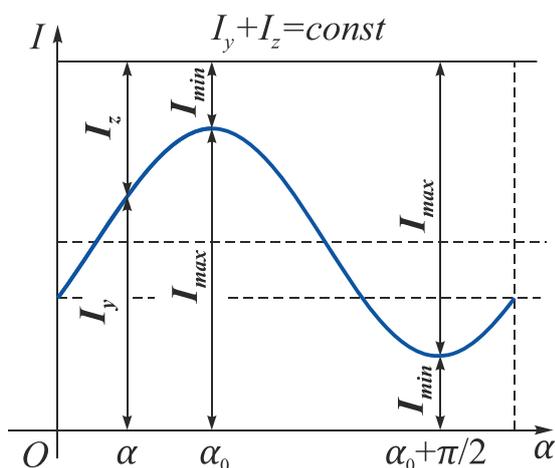


Рис. 20

Из соотношений (23) видно, что функции  $I_{y_1} = f_1(\alpha)$  и  $I_{z_1} = f_2(\alpha)$  являются непрерывными и периодическими с наименьшим периодом  $\pi$ . Кроме того, как следует из уравнения (25), сумма этих функций — величина постоянная и для сечения конечных размеров — величина конечная. Графически это показано на рис. 20.

Из этого рисунка видно, что в пределах периода существует такое значение  $\alpha = \alpha_0$  (а также  $\alpha = \alpha_0 + \pi/2$ ), при котором осевые моменты инерции сечения приобретают **одновременно** экстремальные значения.

Для определения величины  $\alpha_0$  продифференцируем одно из соотношений (23) (например, первое) по  $\alpha$  и приравняем его к нулю:

$$\frac{dI_{y_1}}{d\alpha} = I_y 2 \cos \alpha_0 (-\sin \alpha_0) + I_z 2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 - 2I_{yz} \cos 2\alpha_0 = 0.$$

Отсюда

$$(I_z - I_y) \sin 2\alpha_0 = 2I_{yz} \cos 2\alpha_0 \quad (26)$$

и окончательно

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{yz}}{(I_z - I_y)}. \quad (27)$$

Определим величину центробежного момента инерции сечения при  $\alpha = \alpha_0$ . Перепишем выражение (26) в виде

$$I_{yz} \cos 2\alpha_0 = \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha_0 \quad (28)$$

и подставим в уравнение (24) значение первого слагаемого правой части по формуле (28)

$$I_{y_1 z_1} = \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha_0 + \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha_0 \equiv 0. \quad (29)$$

Таким образом, при  $\alpha = \alpha_0$ :

- 1) осевые моменты инерции сечения приобретают одновременно экстремальные значения;
- 2) центробежный момент инерции сечения становится равным нулю.

На основе полученных результатов можно сформулировать следующие определения:

- || Оси, относительно которых осевые моменты инерции сечения приобретают одновременно экстремальные значения, а центробежный момент инерции сечения становится равным нулю, называются **главными осями инерции сечения**.
- || Если главные оси инерции сечения проходят через его центр тяжести, то они называются **главными центральными осями инерции сечения**.
- || Осевые моменты инерции сечения относительно его главных осей называются **главными моментами инерции сечения**.

Положение главных осей инерции сечения находят по формуле (27).

Для определения величин главных моментов инерции сечения (при  $\alpha = \alpha_0$ ) перепишем соотношения (23), используя тригонометрические соотношения

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

в виде

$$I_{y_1} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha_0 - I_{yz} \sin 2\alpha_0;$$

$$I_{z_1} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\alpha_0 + I_{yz} \sin 2\alpha_0;$$

или

$$I_{\min}^{max} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \left( \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\alpha_0 + I_{yz} \sin 2\alpha_0 \right). \quad (30)$$

Исключим из известных тригонометрических соотношений

$$\sin 2\alpha_0 = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0}}; \quad \cos 2\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0}}$$

$\alpha_0$  с помощью выражения (27) и получим

$$\sin 2\alpha_0 = \frac{2I_{yz}}{\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{yz}^2}}; \quad \cos 2\alpha_0 = \frac{I_z - I_y}{\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{yz}^2}}.$$

Тогда соотношение (30) можно записать в виде

$$I_{\min}^{max} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \left( \frac{I_z - I_y}{2} \frac{I_z - I_y}{\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{yz}^2}} + I_{yz} \frac{2I_{yz}}{\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{yz}^2}} \right).$$

После преобразований окончательно получим

$$I_{\min}^{max} = I_u = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{I_z - I_y}{2} \right)^2 + I_{yz}^2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{yz}^2}. \quad (31)$$

### Замечания

1. Полученный с помощью выражения (27) угол  $\alpha_0$  следует откладывать **против часовой стрелки**, если  $\alpha_0 > 0$ , и **по часовой стрелке**, если  $\alpha_0 < 0$ .
2. Ось, относительно которой главный момент инерции сечения имеет максимальное значение, находится на **кратчайшем угловом расстоянии** от той центральной оси сечения ( $y$  или  $z$ ), относительно которой осевой момент инерции больше.
3. Из рассмотренного ранее правила симметрии следует, что если хотя бы одна из осей является осью симметрии сечения, то эта система взаимно перпендикулярных осей является системой главных осей инерции сечения.

Рассмотрим частные случаи.

1. Если  $I_y = I_z$  и  $I_{yz} = 0$ , то из формулы (24)

$$I_{y_1z_1} = I_{yz} \cos 2\alpha + \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha$$

следует, что значение центробежного момента инерции относительно любой пары взаимно перпендикулярных осей  $I_{y_1z_1}$  равно нулю. Следовательно, любые оси, полученные путем поворота системы координат  $yOz$ , являются главными осями инерции (как и оси  $y$  и  $z$ ). Таким образом,

$$I_y = I_z = I_{max} = I_{min} = const.$$

2. Если фигура имеет более двух осей симметрии, то ее осевые моменты инерции относительно всех центральных осей равны между собой.

Направим одну из осей ( $y$  или  $z$ ) по одной из осей симметрии, а другую – перпендикулярно к ней. Относительно этих осей центробежный момент инерции  $I_{yz} = 0$ . Если фигура имеет более двух осей симметрии, то какая-либо из них составляет острый угол с осью  $z$ . Обозначим такую ось  $z_1$ , а перпендикулярную к ней ось –  $y_1$ .

Центробежный момент инерции  $I_{y_1z_1} = 0$ , так как ось  $z_1$  является осью симметрии. По формуле (24)

$$I_{y_1z_1} = I_{yz} \cos 2\alpha + \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha = 0,$$

но так как

$$I_{yz} = 0,$$

то

$$I_y = I_z.$$

Тогда согласно пункту 1 момент инерции относительно любой оси имеет одно и то же значение, и любые оси, полученные путем поворота системы координат  $yOz$ , являются главными осями инерции.

Из этого следует, что **для всех правильных фигур** (квадрата, круга, равно-стороннего треугольника и т.д.) **моменты инерции относительно всех центральных осей равны между собой, и все эти оси являются главными осями инерции.**

3. Если  $I_y = I_z$  и  $I_{yz} \neq 0$ , то по формуле (27)

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{yz}}{(I_z - I_y)};$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \infty; \quad 2\alpha_0 = 90^\circ; \quad \alpha_0 = 45^\circ.$$

В этом случае главные оси инерции наклонены к исходным осям  $y$  и  $z$  под углами  $45^\circ$ .

## 11. Примеры решения типовых задач

### Пример 1

Определить моменты инерции прямоугольного треугольника относительно центральных осей, параллельных катетам, используя формулы параллельного переноса (рис. 21).

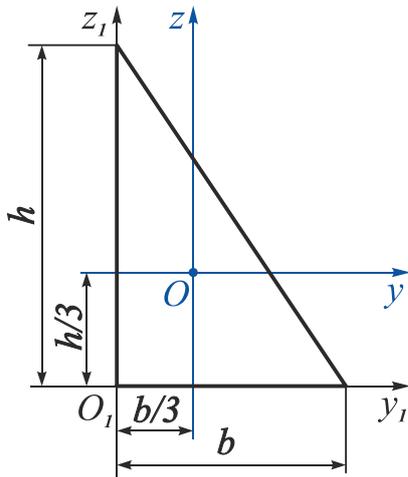


Рис. 21

Дано:  $h, b$ .

Необходимо найти  $I_y, I_z, I_{yz}$ .

### Решение

Для решения этой задачи воспользуемся результатами примера 5 (см. раздел 6) и соотношениями (18) параллельного переноса осей. Однако при этом необходимо учесть, что переход осуществляется от нецентральных осей  $y_1, z_1$  к центральным  $y, z$ , поэтому формулы параллельного переноса примут вид

$$I_y = I_{y_1} - b_1^2 F; \quad I_z = I_{z_1} - a_1^2 F; \quad I_{yz} = I_{y_1 z_1} - a_1 b_1 F,$$

где

$$b_1 = \frac{h}{3}; \quad a_1 = \frac{b}{3}; \quad F = \frac{bh}{2}; \quad I_{y_1} = \frac{bh^3}{12}; \quad I_{z_1} = \frac{hb^3}{12}; \quad I_{y_1 z_1} = \frac{b^2 h^2}{24}.$$

Определим осевые и центробежный моменты инерции:

$$I_y = \frac{bh^3}{12} - \frac{h^2}{9} \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36};$$

$$I_z = \frac{hb^3}{12} - \frac{b^2}{9} \frac{bh}{2} = \frac{hb^3}{36};$$

$$I_{yz} = \frac{b^2 h^2}{24} - \frac{bh}{9} \frac{bh}{2} = -\frac{b^2 h^2}{72}.$$

Рассмотренный вариант нахождения моментов инерции прямоугольного треугольника относительно центральных осей, параллельных катетам, является менее трудоемким по сравнению с вариантом непосредственного интегрирования по формулам (12), (13) (см. пример 6 из разд. 6).

## Пример 2

Определить моменты инерции равнобедренного треугольника относительно центральных осей  $yOz$  (рис. 22).

Дано:  $h, b$ .

Необходимо найти  $I_y, I_z, I_{yz}$ .

### Решение

1. Разобьем равнобедренный треугольник  $ABC$  на два прямоугольных треугольника  $ABD$  и  $BDC$ .

2. Определим  $I_y$ .

Момент инерции равнобедренного треугольника  $ABC$  относительно оси  $y$  будет равен сумме осевых моментов треугольников  $ABD$  и  $BDC$  относительно оси  $y$ :

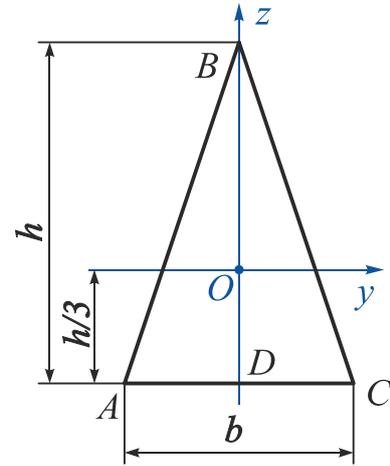


Рис. 22

$$I_y = I_y^{(ABD)} + I_y^{(BCD)} = 2I_y^{(ABD)} = 2I_y^{(BCD)} = 2 \cdot \frac{b}{2} \frac{h^3}{36} = \frac{bh^3}{36}.$$

### Замечание

Момент инерции любого треугольника относительно центральной оси  $y$ , параллельной основанию,

$$I_y = \frac{bh^3}{36}.$$

3. Найдем  $I_z$ .

Момент инерции равнобедренного треугольника  $ABC$  относительно оси  $z$  будет равен сумме осевых моментов треугольников  $ABD$  и  $BDC$  относительно оси  $z$ :

$$I_z = I_z^{(ABD)} + I_z^{(BCD)} = 2I_z^{(ABD)} = 2I_z^{(BCD)} = 2 \frac{h \left(\frac{b}{2}\right)^3}{12} = \frac{hb^3}{48}.$$

4. Определим  $I_{yz}$ .

Поскольку ось  $z$  является осью симметрии сечения, то она и перпендикулярная ей ось  $y$  являются главными центральными осями сечения. Следовательно, центробежный момент инерции сечения относительно системы осей  $yOz$  равен нулю:

$$I_{yz} = 0.$$

### Пример 3

Определить положение главных осей инерции, проходящих через точку  $A$  (рис. 23).

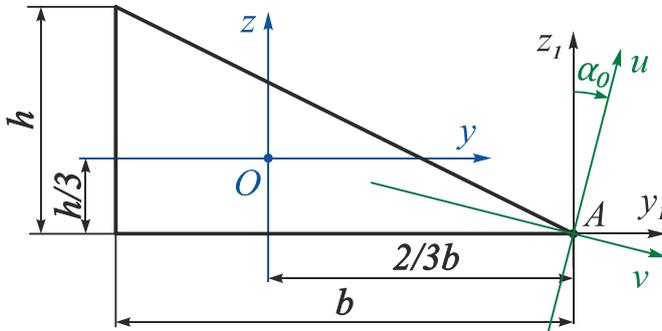


Рис. 23

Дано:  $h = 3 \text{ см}$ ,  $b = 6 \text{ см}$ .

Необходимо найти  $\alpha_0$ .

#### Решение

1. Определим моменты инерции относительно осей  $y_1, z_1$ , проходящих через точку  $A$  и параллельных граням треугольника, воспользовавшись теоремами о параллельном переносе осей:

$$I_{y_1} = I_y + \left(\frac{1}{3}h\right)^2 F = \frac{bh^3}{36} + \frac{1}{9}h^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{12} = \frac{6 \cdot 3^3}{12} = 13,5 \text{ см}^4;$$

$$I_{z_1} = I_z + \left(\frac{2}{3}b\right)^2 F = \frac{hb^3}{36} + \frac{4}{9}b^2 \frac{bh}{2} = \frac{hb^3}{4} = \frac{3 \cdot 6^3}{4} = 162 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_1 z_1} = I_{yz} + \left(-\frac{2}{3}b\right) \left(+\frac{1}{3}h\right) F = -\frac{b^2 h^2}{72} - \frac{2}{3}b \frac{1}{3}h \frac{bh}{2} = -\frac{b^2 h^2}{8} = \\ = -\frac{6^2 \cdot 3^2}{8} = -40,5 \text{ см}^4.$$

2. Определим угол  $\alpha_0$ , на который необходимо повернуть оси  $y_1 A z_1$ , чтобы они стали главными:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{y_1 z_1}}{(I_{z_1} - I_{y_1})} = \frac{2(-40,5)}{162 - 13,5} = -0,545;$$

$$2\alpha_0 = -28,59^\circ;$$

$$\alpha_0 = -14,295^\circ = -14^\circ 15' 32''.$$

Полученный отрицательный угол  $\alpha_0$  следует отложить по часовой стрелке. При этом ось большего осевого момента  $z_1$  станет осью максимального момента  $u$ , а ось меньшего из осевых моментов  $y_1$  – осью минимального момента  $v$ . Таким образом, выполнится условие

$$I_u > I_{z_1} > I_{y_1} > I_v.$$

### Пример 4

Определить главные центральные моменты инерции таврового сечения ( $z$  – ось симметрии) (рис. 24).

Дано:  $h = 16$  см,  $b = 10$  см,  $t = 4$  см,  
 $d = 2$  см.

Необходимо найти  $I_y, I_z$ .

#### Решение

1. Поскольку ось  $z$  – ось симметрии сечения, то центр тяжести лежит на оси  $z$ , т. е.  $y_c = 0$  и  $I_{yz} = 0$  ( $y$  – любая ось, перпендикулярная оси  $z$ ).

Найдем вторую координату центра тяжести. Разобьем сечение на два прямоугольника и расположим в центре тяжести каждого из них вторую центральную ось  $y_1$  и  $y_2$ . Примем в качестве рабочей систему координат  $zO_1y_1$ . Тогда

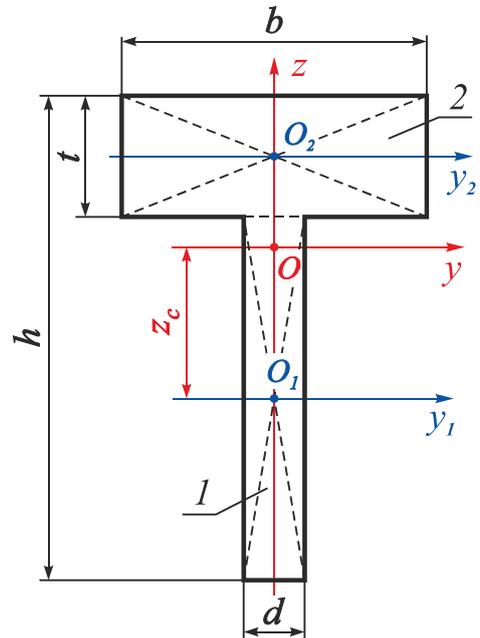


Рис. 24

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^2 S_{y_1}^{(i)}}{\sum_{i=1}^2 F_i} = \frac{S_{y_1}^{(1)} + S_{y_1}^{(2)}}{F_1 + F_2} = \frac{0 + bt \left( \frac{h-t}{2} + \frac{t}{2} \right)}{(h-t)d + bt} = \frac{10 \cdot 4 \cdot \frac{16}{2}}{12 \cdot 2 + 10 \cdot 4} = \frac{320}{64} = 5 \text{ см.}$$

2. Вычислим момент инерции относительно оси  $z$ :

$$I_z = I_z^{(1)} + I_z^{(2)} = \frac{(h-t)d^3}{12} + \frac{tb^3}{12} = \frac{(16-4) \cdot 2^3}{12} + \frac{4 \cdot 10^3}{12} = 341,333 \text{ см}^4.$$

3. Найдем момент инерции относительно оси  $y$ :

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} = 888 + 413,333 = 1301,333 \text{ см}^4;$$

$$I_y^{(1)} = I_{y_1}^{(1)} + z_c^2 F_1 = \frac{d(h-t)^3}{12} + z_c^2 (h-t)d =$$

$$= \frac{2(16-4)^3}{12} + 5^2(16-4) \cdot 2 = 888 \text{ см}^4;$$

$$I_y^{(2)} = I_{y_2}^{(2)} + \left( \frac{h}{2} - z_c \right)^2 F_2 = \frac{bt^3}{12} + \left( \frac{h}{2} - z_c \right)^2 bt =$$

$$= \frac{10 \cdot 4^3}{12} + \left( \frac{16}{2} - 5 \right)^2 \cdot 10 \cdot 4 = 413,333 \text{ см}^4.$$

### Пример 5

Определить осевые и центробежный моменты инерции полукруга радиусом  $r$  относительно осей  $y$  и  $z$  (рис. 24).

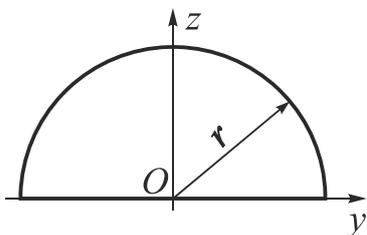


Рис. 25

Дано:  $r$ .

Необходимо найти  $I_y, I_z, I_{yz}$ .

### Решение

Дополним полукруг до круга (рис. 26). Для круглого поперечного сечения

$$I_y^{\circ} = I_z^{\circ} = \frac{\pi d^4}{64}; \quad I_{yz}^{\circ} = 0.$$

Тогда для полукруга как полуфигуры

$$I_y = I_z = \frac{I_y^{\circ}}{2} = \frac{I_z^{\circ}}{2} = \frac{\pi d^4}{128}; \quad I_{yz} = \frac{I_{yz}^{\circ}}{2} = 0.$$

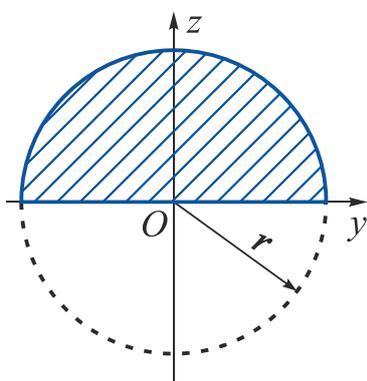


Рис. 26

### Замечания

1. Для сечения, имеющего одну или более **пару** взаимно перпендикулярных осей симметрии, удобно пользоваться понятием «**полуфигура**».

**Полуфигурой** называют фигуру, полученную путем рассечения плоской фигуры линией любой формы, но обратно симметричной осям симметрии; при этом при повороте полуфигуры на  $180^\circ$  вокруг центра тяжести всей фигуры она (полуфигура) совпадает со второй полуфигурой (рис. 27).

Главные центральные оси фигуры (см. рис. 27) являются главными осями их полуфигур. Это очевидно, если провести дополнительную линию  $A_1O$  (см. рис. 27, а, б, в, г), симметричную  $AO$ , дополнительную линию  $A_1C$  (см. рис. 27, д), симметричную  $AC$ . У полученных частей **I** и **II** полуфигуры ось  $y$  для части **I** и ось  $z$  для части **II** являются осями симметрии и, следовательно, для всей полуфигуры – главными осями инерции.

2. Моменты инерции полуфигуры относительно осей, являющихся главными центральными осями всей фигуры, равны половине

величины моментов инерции относительно соответствующих главных центральных осей всей фигуры.

Рассмотрим, например, прямоугольник на рис. 27, а:

$$I_y(\text{полуфигуры } ABCD) = I_y(KK_1CD) + I_y(KAO) - I_y(K_1BO).$$

Поскольку  $I_y(KAO) = I_y(K_1BO)$ , окончательно получим

$$I_y = I_y(KK_1CD) = \frac{1}{2} \cdot \frac{bh^3}{12} = \frac{bh^3}{24}; \quad I_z = \frac{1}{2} \cdot \frac{hb^3}{12} = \frac{hb^3}{24}.$$

$$\text{Для полуфигуры на рис. 27, в} \quad I_y = I_z = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi d^4}{128}.$$

$$\text{Для полуфигуры на рис. 27, г} \quad I_y = I_z = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^4}{12} = \frac{a^4}{24}.$$

$$\text{Для полуфигуры на рис. 27, д} \quad I_y = I_z = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{16} a^4 = \frac{5\sqrt{3}}{32} a^4.$$

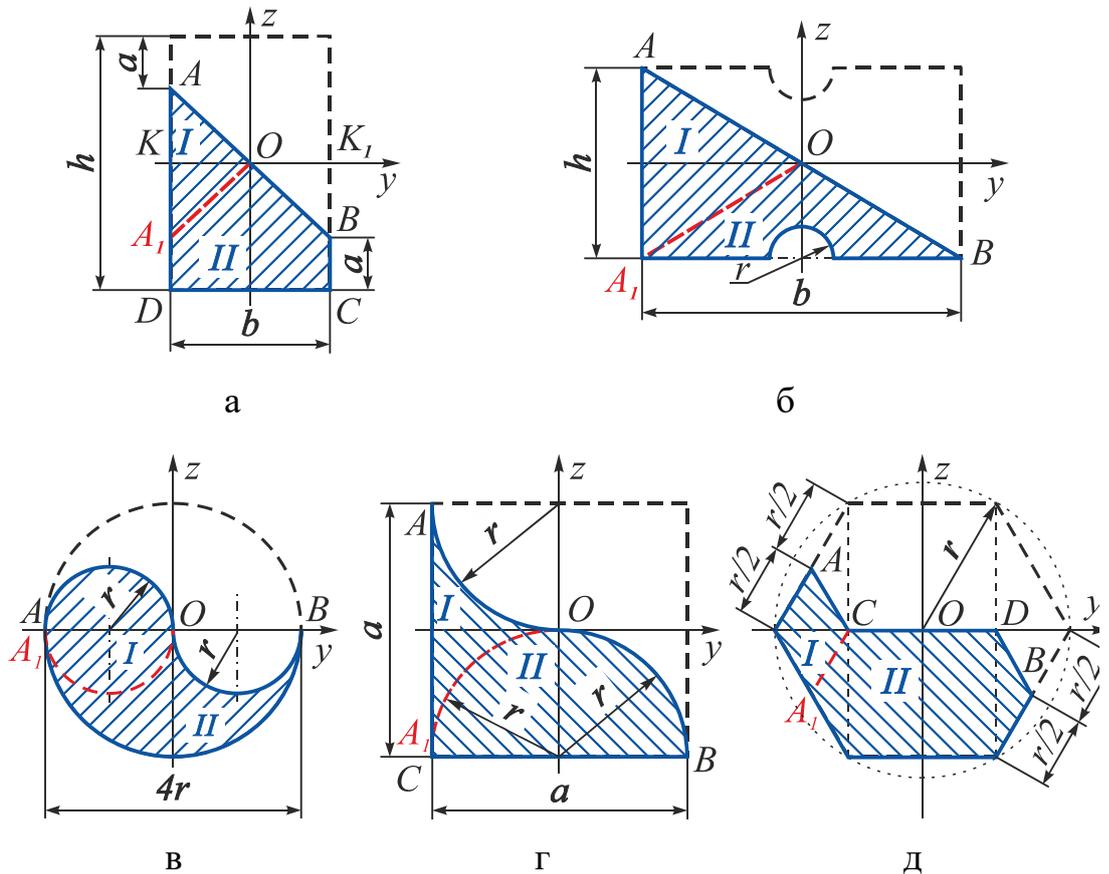


Рис. 27

3. Если фигура имеет две (см. рис. 27, г) и более (см. рис. 27, в, д) **пары** взаимно перпендикулярных осей симметрии, то любые две взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр тяжести всей фигуры, являются главными осями полуфигуры.

### Пример 6

Определить положение главных центральных осей инерции заданного сечения и величины главных моментов инерции в системе этих осей (рис. 28).

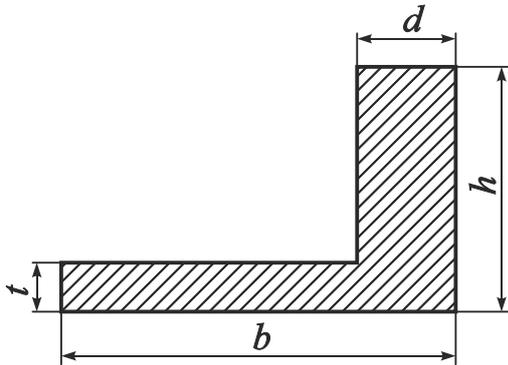


Рис. 28

**Дано:**  $h = 5$  см,  $b = 8$  см,  $d = 2$  см,  
 $t = 1$  см.

**Необходимо найти**  $y_c, z_c, \alpha_0, I_u, I_v$ .

### Решение

1. Выполним чертеж составного сечения в масштабе.

2. Разобьем сечение на простейшие части (прямоугольник размером  $b \times h$  с

вырезом  $(b - d) \times (h - t)$ ) и присвоим этим частям номера 1 и 2 (рис. 29).

3. В центре тяжести каждой из простейших частей сечения расположим центральные системы координат  $y_i O_i z_i$  (в нашем случае  $y_1 O_1 z_1$  и  $y_2 O_2 z_2$ ).

4. Найдем координаты центра тяжести составного сечения.

Выберем рабочую (базовую) систему координат, в которой будут определены координаты центра тяжести всего сечения. Примем в качестве рабочей систему осей  $y_1 O_1 z_1$ .

Тогда формулы для вычисления координат центра тяжести примут вид

$$y_c = \frac{S_{z_1}}{F} = \frac{\sum_{i=1}^2 S_{z_1}^{(i)}}{\sum_{i=1}^2 F_i}; \quad z_c = \frac{S_{y_1}}{F} = \frac{\sum_{i=1}^2 S_{y_1}^{(i)}}{\sum_{i=1}^2 F_i},$$

где площадь поперечного сечения

$$F_1 = bh = 8 \cdot 5 = 40 \text{ см}^2; \quad F_2 = (b - d)(h - t) = (8 - 2)(5 - 1) = 24 \text{ см}^2;$$

$$\sum_{i=1}^2 F_i = F = F_1 - F_2 = 40 - 24 = 16 \text{ см}^2;$$

статический момент относительно оси  $z_1$

$$S_{z_1} = \sum_{i=1}^2 S_{z_1}^{(i)} = S_{z_1}^{(1)} - S_{z_1}^{(2)} = F_1 \cdot 0 - F_2 \left(-\frac{d}{2}\right) = 0 - 24 \cdot (-1) = 24 \text{ см}^3;$$

статический момент относительно оси  $y_1$

$$S_{y_1} = \sum_{i=1}^2 S_{y_1}^{(i)} = S_{y_1}^{(1)} - S_{y_1}^{(2)} = F_1 \cdot 0 - F_2 \left(\frac{t}{2}\right) = 0 - 24 \cdot \frac{1}{2} = -12 \text{ см}^3.$$

### Замечания

1. При вычислении статических моментов необходимо учитывать знаки координат центров тяжести составных частей сечения в рабочей (базовой) системе координат.
2. Если в составном сечении есть вырез (отверстие), то геометрические характеристики этого выреза (площадь, статические моменты, моменты инерции) следует вычитать.

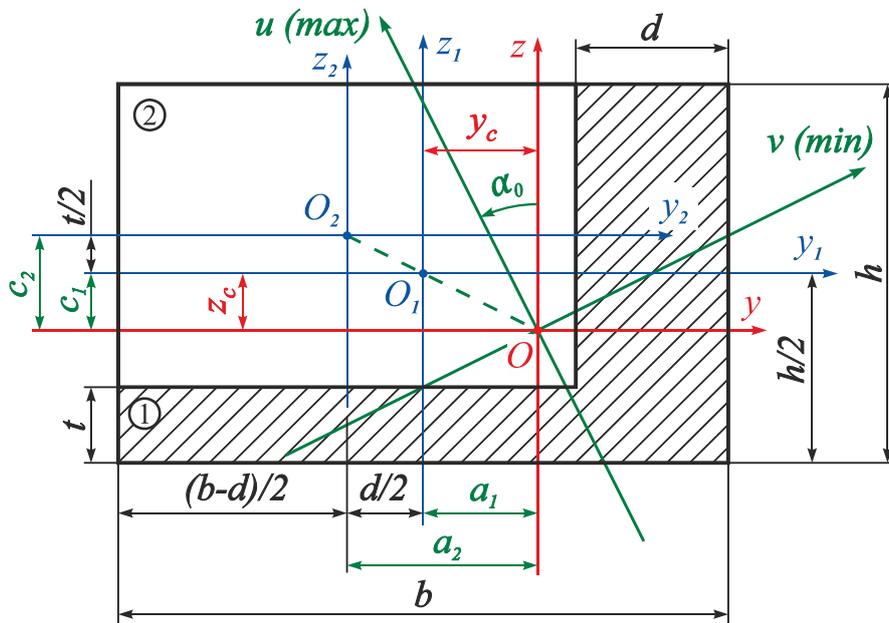


Рис. 29

Вычислим координаты центра тяжести  $O$  составного сечения в системе осей  $y_1O_1z_1$ :

$$y_c = \frac{S_{z_1}}{F} = \frac{24}{16} = 1,5 \text{ см}; \quad z_c = \frac{S_{y_1}}{F} = -\frac{12}{16} = -0,75 \text{ см}.$$

В соответствии с результатами вычислений покажем на рис. 29 систему центральных осей  $yOz$  и центр тяжести составного сечения – точку  $O$ .

Определим координаты центров тяжести составных частей сечения (точек  $O_1$  и  $O_2$ ) в системе центральных осей  $yOz$ :

$$a_1 = -y_c = -1,5 \text{ см}; \quad a_2 = -\left(y_c + \frac{d}{2}\right) = -\left(1,5 + \frac{2}{2}\right) = -2,5 \text{ см};$$
$$c_1 = |z_c| = 0,75 \text{ см}; \quad c_2 = |z_c| + \frac{t}{2} = |-0,75| + \frac{1}{2} = 1,25 \text{ см}.$$

### Проверка правильности определения центра тяжести

а) графическая проверка

Для проверки правильности нахождения центра тяжести соединим пунктиром точки  $O_1$  и  $O_2$ . Точка  $O$  должна лежать на этой линии.

**Замечание**

Центр тяжести составного сечения, состоящего из двух простых частей, *всегда лежит на линии, соединяющей центры тяжести простых частей*, и отношение расстояний от центра тяжести всей фигуры до центров тяжести составных частей обратно пропорционально отношению площадей составных частей.

В этом случае

$$\frac{|OO_1|}{|OO_2|} = \frac{F_2}{F_1};$$

$$|OO_1| = \sqrt{a_1^2 + c_1^2} = 1,677 \text{ см}; \quad |OO_2| = \sqrt{a_2^2 + c_2^2} = 2,795 \text{ см};$$

$$\frac{|OO_1|}{|OO_2|} = \frac{1,677}{2,795} = 0,6; \quad \frac{F_2}{F_1} = \frac{40}{24} = 0,6; \quad 0,6 = 0,6;$$

б) аналитическая проверка

Воспользуемся свойством центральных осей, согласно которому статический момент составного сечения относительно центральных осей равен нулю:

$$S_y = \sum_{i=1}^2 S_y^{(i)} = S_y^{(1)} - S_y^{(2)} = bh c_1 - (b-d)(h-t)c_2 = 60 - 60 = 0 \text{ см}^3;$$

$$S_z = \sum_{i=1}^2 S_z^{(i)} = S_z^{(1)} - S_z^{(2)} = bha_1 - (b-d)(h-t)a_2 = 30 - 30 = 0 \text{ см}^3.$$

Таким образом, положение центра тяжести составного сечения определено правильно.

5. Найдем моменты инерции составного сечения в системе центральных осей  $yOz$ .

Определим осевые и центробежный моменты инерции составных частей сечения:

для первого прямоугольника

$$I_{y_1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{8 \cdot 5^3}{12} = 83,333 \text{ см}^4;$$

$$I_{z_1} = \frac{hb^3}{12} = \frac{5 \cdot 8^3}{12} = 213,333 \text{ см}^4; \quad I_{y_1 z_1} = 0;$$

для второго прямоугольника

$$I_{y_2} = \frac{(b-d)(h-t)^3}{12} = \frac{6 \cdot 4^3}{12} = 32 \text{ см}^4;$$

$$I_{z_2} = \frac{(h-t)(b-d)^3}{12} = \frac{4 \cdot 6^3}{12} = 72 \text{ см}^4; \quad I_{y_2 z_2} = 0.$$

Сведем предварительно полученные результаты в табл. 1.

Таблица 1

Часть сечения	Геометрические характеристики					
	$F_i, \text{см}^2$	$I_{y_i}, \text{см}^4$	$I_{z_i}, \text{см}^4$	$I_{y_i z_i}, \text{см}^4$	$a_i, \text{см}$	$c_i, \text{см}$
1	40	83,333	213,333	0	-1,5	0,75
2	24	32	72	0	-2,5	1,25

**Замечание** | Все дальнейшие вычисления необходимо выполнять в системе *центральных осей*  $yOz$  составного сечения.

Найдем осевые и центробежный моменты инерции составного сечения в системе центральных осей  $yOz$ , используя формулы параллельного переноса:

$$I_y = I_y^{(1)} - I_y^{(2)} = 105,833 - 69,5 = 36,333 \text{ см}^4;$$

$$I_y^{(1)} = I_{y_1} + c_1^2 F_1 = 83,333 + 0,75^2 \cdot 40 = 105,833 \text{ см}^4;$$

$$I_y^{(2)} = I_{y_2} + c_2^2 F_2 = 32 + 1,25^2 \cdot 24 = 69,5 \text{ см}^4;$$

$$I_z = I_z^{(1)} - I_z^{(2)} = 303,333 - 222,0 = 81,333 \text{ см}^4;$$

$$I_z^{(1)} = I_{z_1} + a_1^2 F_1 = 213,333 + (-1,5)^2 \cdot 40 = 303,333 \text{ см}^4;$$

$$I_z^{(2)} = I_{z_2} + a_2^2 F_2 = 72 + (-2,5)^2 \cdot 24 = 222,0 \text{ см}^4;$$

$$I_{yz} = I_{yz}^{(1)} - I_{yz}^{(2)} = -45,0 - (-75,0) = 30,0 \text{ см}^4;$$

$$I_{yz}^{(1)} = I_{y_1 z_1} + a_1 c_1 F_1 = 0 + (-1,5) \cdot 0,75 \cdot 40 = -45,0 \text{ см}^4;$$

$$I_{yz}^{(2)} = I_{y_2 z_2} + a_2 c_2 F_2 = 0 + (-2,5) \cdot 1,25 \cdot 24 = -75,0 \text{ см}^4.$$

**Замечания** | 1. Величины осевых моментов инерции относительно центральных осей должны быть положительными, что следует из определения осевого момента инерции.  
2. Если большая площадь составного сечения находится в первой и третьей четвертях, то центробежный момент инерции будет положительным, если во второй и четвертой – отрицательным.

6. Вычислим положение главных осей инерции сечения:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y} = \frac{2 \cdot 30,0}{81,333 - 36,333} = 1,333;$$

$$2\alpha_0 = 53,123^\circ; \quad \alpha_0 = 26,5615^\circ = 26^\circ 34'.$$

Поскольку  $\alpha_0 > 0$ , то поворот осей  $y$  и  $z$  на этот угол необходимо выполнять против часовой стрелки в соответствии с принятым правилом знаков. Полученные в результате этого поворота оси и будут главными центральными осями инерции составного сечения.

7. Определим величины главных моментов инерции сечения:

$$I_{\min} = I_v = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{y_0z_0}^2} =$$

$$= \frac{36,333 + 81,333}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{81,333 - 36,333}{2}\right)^2 + 30,0^2} = 58,833 \pm 37,5 \text{ см}^4.$$

Отсюда

$$I_{\max} = I_u = 96,333 \text{ см}^4;$$

$$I_{\min} = I_v = 21,333 \text{ см}^4.$$

**Замечание** | Величины главных центральных моментов инерции должны быть положительными, что следует из определения осевого момента инерции.

По результатам проведенного расчета покажем на рис. 29 главные центральные оси инерции составного сечения – оси  $u$  и  $v$ .

Так как  $I_z > I_y$ , то максимальное значение осевой момент инерции сечения имеет относительно оси, находящейся на минимальном угловом расстоянии от оси  $z$ .

8. Проверим правильность решения задачи:

а) проверим выполнение соотношения

$$I_{\max} > I_z > I_y > I_{\min} \text{ (если } I_z > I_y) \text{ или } I_{\max} > I_y > I_z > I_{\min} \text{ (если } I_y > I_z).$$

В рассматриваемом случае

$$96,333 > 81,333 > 36,333 > 21,333;$$

б) проверим постоянство суммы величин осевых моментов при повороте осей:

$$I_{\max} + I_{\min} = I_z + I_y;$$

$$96,333 + 21,333 = 117,666; \quad 81,333 + 36,333 = 117,666;$$

$$117,666 = 117,666;$$

в) вычислим центробежный момент инерции относительно главных центральных осей, который заведомо должен равняться нулю:

$$\begin{aligned}
 I_{uv} &= I_{yz} \cos 2\alpha_0 + \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha_0 = \\
 &= 30,0 \cdot \cos(2 \cdot 26,5615) + \frac{36,333 - 81,333}{2} \cdot \sin(2 \cdot 26,5615) = \\
 &= 30,0 \cdot 0,6001 + (-22,5) \cdot 0,7999 = 18,003 - 17,9978 = 0,0052 \text{ м}^4.
 \end{aligned}$$

Погрешность вычислений

$$\Delta\% = \frac{0,0052}{18,003} \cdot 100\% = 0,0289\% \leq 1\%,$$

значит, задача решена правильно.

### Замечания

1. Данную задачу можно решать, используя различные варианты разбиения сечения на составные части (в примере 5 разд. 3 при определении координат центра тяжести использована другая разбивка).
2. Разбиение необходимо выполнять так, чтобы минимизировать объем вычислительной работы.
3. Окончательный результат решения при всех вариантах разбиения должен быть одинаков.
4. Если составное сечение состоит из двух одинаковых частей, повернутых на  $90^\circ$  относительно друг друга, то центр тяжести всего сечения будет лежать на середине линии, соединяющей центры тяжести составных частей, одна из главных центральных осей сечения будет совпадать с этой линией, а другая будет перпендикулярна ей (рис. 30).

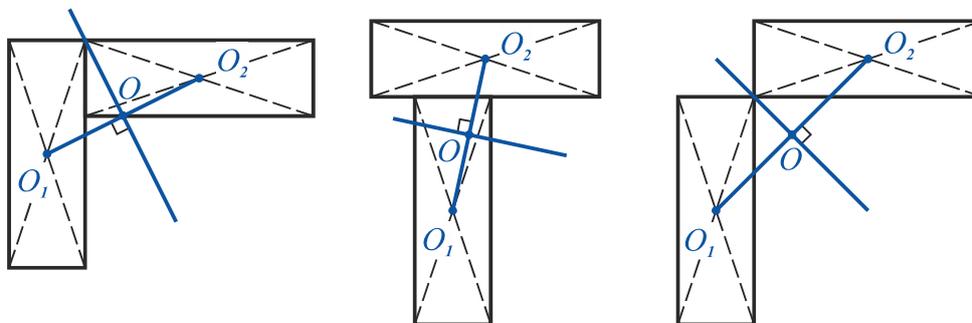


Рис. 30

### Пример 7

Определить положение главных центральных осей инерции заданного сечения и величины главных моментов инерции в системе этих осей (рис. 31).

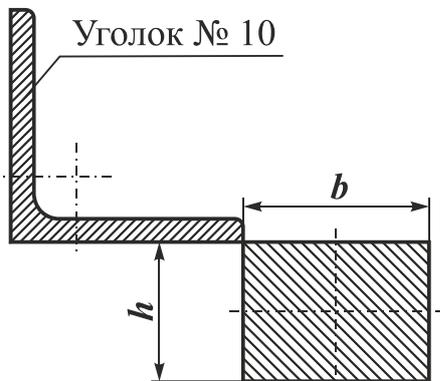


Рис. 31

**Дано:**  $h = 6$  см,  $b = 8$  см, уголок № 10.

**Необходимо найти**  $y_c, z_c, \alpha_0, I_u, I_v$ .

### Решение

1. Выполним чертеж составного сечения в масштабе.

2. Разобьем сечение на простейшие части (уголок и прямоугольник) и присвоим этим частям номера 1 и 2.

3. В центре тяжести каждой из простейших частей сечения расположим центральные системы координат  $y_i O_i z_i$  (в рассматриваемом случае  $y_1 O_1 z_1$  и  $y_2 O_2 z_2$ ).

4. Вычислим моменты инерции и площадь прямоугольника, а из таблиц сортамента выпишем геометрические характеристики уголка № 10, необходимые для решения этой задачи, и сведем их в табл. 2.

Таблица 2

Часть сечения	Геометрические характеристики							
	$h_i, \text{см}$	$b_i, \text{см}$	$F_i, \text{см}^2$	$I_{y_i}, \text{см}^4$	$I_{z_i}, \text{см}^4$	$I_{y_i z_i}, \text{см}^4$	$y_0, \text{см}$	$z_0, \text{см}$
1 (уголок)	10	10	19,24	178,95	178,95	-110	2,83	2,83
2 (прямоугольник)	6	8	48	144	256	0	0	0

Для прямоугольника

$$F_2 = bh = 8 \cdot 6 = 48 \text{ см}^2; \quad I_{y_2 z_2} = 0;$$

$$I_{y_2} = \frac{bh^3}{12} = \frac{8 \cdot 6^3}{12} = 144 \text{ см}^4; \quad I_{z_2} = \frac{hb^3}{12} = \frac{6 \cdot 8^3}{12} = 256 \text{ см}^4.$$

### Замечания

1. Если в составное сечение входят как простые части прокатные профили, то их геометрические характеристики выбирают из таблиц сортамента.

2. Для равнополочного уголка  $I_y = I_z$ .

3. Знак центробежного момента уголка определяется его взаиморасположением относительно собственных центральных осей (рис. 32).

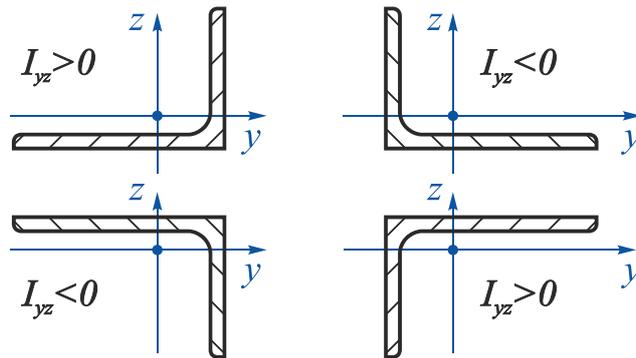


Рис. 32

5. Найдем координаты центра тяжести составного сечения.

Выберем рабочую (базовую) систему координат, в которой будут определены координаты центра тяжести всего сечения. Примем в качестве рабочей такую систему осей, чтобы все сечение находилось в первой четверти ( $y_3 O_3 z_3$ ) (рис. 33).

**Замечание**

Если рабочая (базовая) система координат выбрана таким образом, что сечение полностью находится в первой четверти, то статические моменты сечения относительно базовых осей и координаты его центра тяжести будут положительными, что уменьшает вероятность ошибки при нахождении положения центра тяжести.

Тогда формулы для определения координат центра тяжести примут вид

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^2 S_{z_3}^{(i)}}{\sum_{i=1}^2 F_i}; \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^2 S_{y_3}^{(i)}}{\sum_{i=1}^2 F_i},$$

где  $\sum_{i=1}^2 F_i = F = F_1 + F_2 = 19,24 + 48 = 67,24 \text{ см}^2;$

$$\begin{aligned} S_{z_3} &= \sum_{i=1}^2 S_{z_3}^{(i)} = S_{z_3}^{(1)} + S_{z_3}^{(2)} = F_1 \cdot y_0 + F_2 \left( b_1 + \frac{b_2}{2} \right) = \\ &= 19,24 \cdot 2,83 + 48 \cdot \left( 10 + \frac{8}{2} \right) = 726,449 \text{ см}^3; \end{aligned}$$

$$S_{y_3} = \sum_{i=1}^2 S_{y_3}^{(i)} = S_{y_3}^{(1)} + S_{y_3}^{(2)} = F_1 \cdot (h_2 + z_0) + F_2 \left( \frac{h_2}{2} \right) =$$

$$= 19,24 \cdot (6 + 2,83) + 48 \cdot \frac{6}{2} = 313,889 \text{ см}^3.$$

Вычислим координаты центра тяжести  $O$  составного сечения в системе осей  $y_3 O_3 z_3$ :

$$y_c = \frac{S_{z_3}}{F} = \frac{726,449}{67,24} = 10,804 \text{ см}; \quad z_c = \frac{S_{y_3}}{F} = \frac{313,889}{67,24} = 4,668 \text{ см}.$$

В соответствии с результатами вычислений покажем на рис. 33 систему центральных осей  $yOz$  и центр тяжести составного сечения – точку  $O$ .

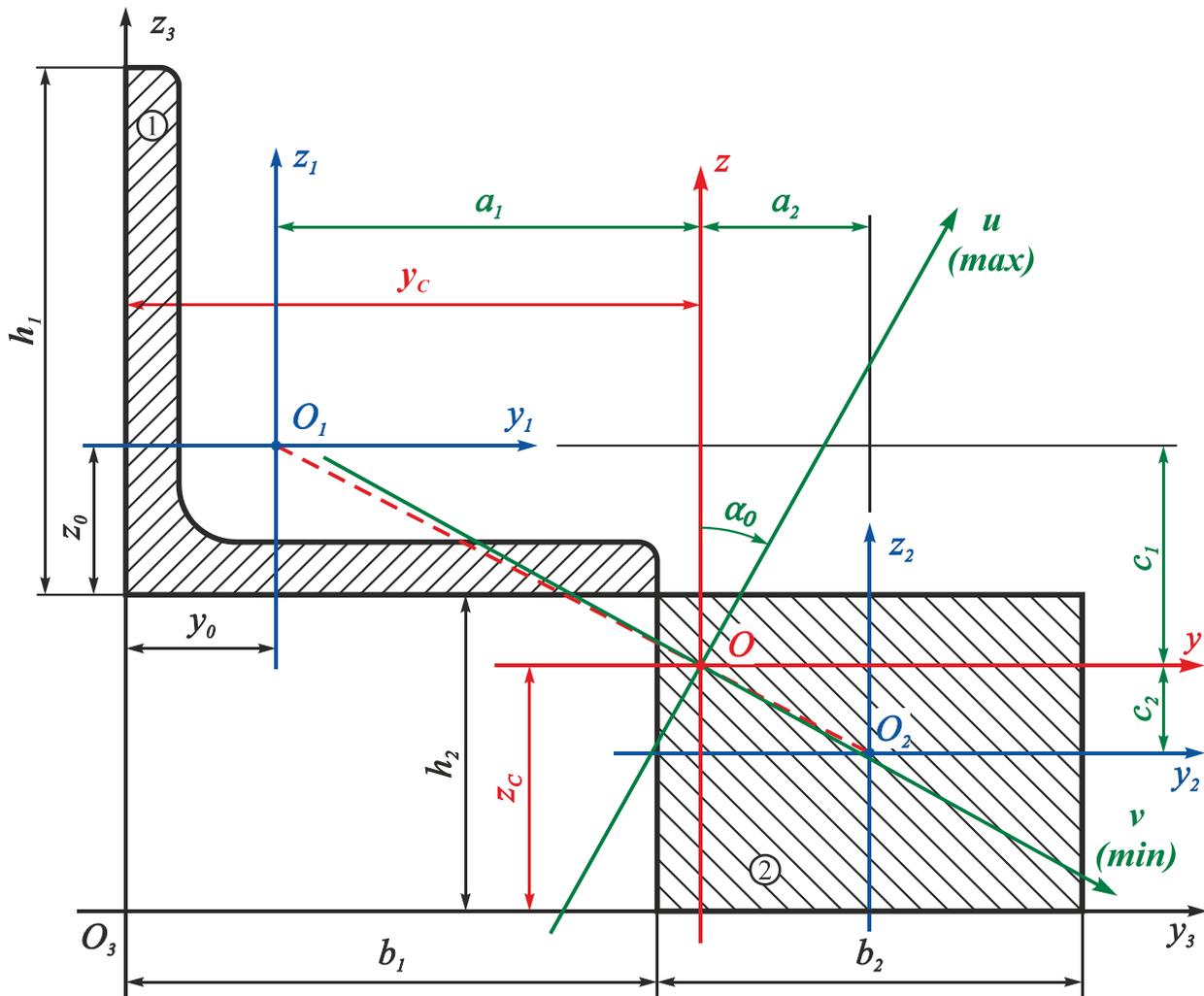


Рис. 33

Определим координаты центров тяжести составных частей сечения (точек  $O_1$  и  $O_2$ ) в системе центральных осей  $yOz$ :

$$a_1 = -(y_c - y_0) = -(10,804 - 2,83) = -7,974 \text{ см};$$

$$a_2 = b_1 + \frac{b_2}{2} - y_c = 10 + \frac{8}{2} - 10,804 = 3,196 \text{ см};$$

$$c_1 = h_2 + z_0 - z_c = 6 + 2,83 - 4,668 = 4,162 \text{ см};$$

$$c_2 = -\left(z_c - \frac{h_2}{2}\right) = -\left(4,668 - \frac{6}{2}\right) = -1,668 \text{ см}.$$

### Проверка правильности определения центра тяжести

#### а) графическая проверка

Для проверки правильности нахождения центра тяжести соединим пунктиром точки  $O_1$  и  $O_2$  (см. рис. 33). Точка  $O$  должна лежать на этой линии.

#### Замечание

Центр тяжести составного сечения, состоящего из двух простых частей, *всегда лежит на линии, соединяющей центры тяжести простых частей*. При этом точка  $O$  делит отрезок  $O_1O_2$  на части, обратно пропорциональные площадям простых частей сечения:

$$\frac{|OO_1|}{|OO_2|} = \frac{F_2}{F_1};$$

$$|OO_1| = \sqrt{a_1^2 + c_1^2} = 8,9976 \text{ см}; \quad |OO_2| = \sqrt{a_2^2 + c_2^2} = 3,6051 \text{ см};$$

$$\frac{|OO_1|}{|OO_2|} = \frac{8,9976}{3,6051} = 2,496; \quad \frac{F_2}{F_1} = \frac{48}{19,24} = 2,495; \quad 2,496 \approx 2,495;$$

#### б) аналитическая проверка

Воспользуемся свойством центральных осей, согласно которому статический момент составного сечения относительно центральных осей равен нулю:

$$S_y = \sum_{i=1}^2 S_y^{(i)} = S_y^{(1)} + S_y^{(2)} = F_1 c_1 + F_2 c_2 = 19,24 \cdot 4,162 + 48 \cdot (-1,668) = \\ = 80,077 - 80,064 = 0,013 \text{ см}^3.$$

Относительная погрешность

$$\Delta\% = \frac{0,013}{80,077} \cdot 100\% = 0,0162\% < 1\%; \quad [\Delta\%] \leq 1\%;$$

$$S_z = \sum_{i=1}^2 S_z^{(i)} = S_z^{(1)} + S_z^{(2)} = F_1 a_1 + F_2 a_2 = 19,24 \cdot (-7,974) + 48 \cdot 3,196 = \\ = -153,412 + 153,408 = -0,004 \text{ см}^3.$$

Относительная погрешность

$$\Delta\% = \left| \frac{-0,004}{153,408} \right| \cdot 100\% = 0,0026\% < 1\%; \quad [\Delta\%] \leq 1\%.$$

Таким образом, положение центра тяжести составного сечения определено правильно.

6. Найдем осевые и центробежный моменты инерции составного сечения в системе центральных осей  $yOz$ , используя формулы параллельного переноса:

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} = 512,230 + 280,769 = 792,999 \text{ см}^4;$$

$$I_y^{(1)} = I_{y_1} + c_1^2 F_1 = 178,95 + 4,162^2 \cdot 19,24 = 512,230 \text{ см}^4;$$

$$I_y^{(2)} = I_{y_2} + c_2^2 F_2 = 144 + (-1,668)^2 \cdot 48 = 280,769 \text{ см}^4;$$

$$I_z = I_z^{(1)} + I_z^{(2)} = 1402,319 + 746,292 = 2148,611 \text{ см}^4;$$

$$I_z^{(1)} = I_{z_1} + a_1^2 F_1 = 178,95 + (-7,974)^2 \cdot 19,24 = 1402,319 \text{ см}^4;$$

$$I_z^{(2)} = I_{z_2} + a_2^2 F_2 = 256 + (3,196)^2 \cdot 48 = 746,292 \text{ см}^4;$$

$$I_{yz} = I_{yz}^{(1)} + I_{yz}^{(2)} = -748,533 + (-255,885) = -1004,418 \text{ см}^4;$$

$$I_{yz}^{(1)} = I_{y_1 z_1} + a_1 c_1 F_1 = -110 + (-7,974) \cdot 4,162 \cdot 19,24 = -748,533 \text{ см}^4;$$

$$I_{yz}^{(2)} = I_{y_2 z_2} + a_2 c_2 F_2 = 0 + 3,196 \cdot (-1,668) \cdot 48 = -255,885 \text{ см}^4.$$

### Замечания

1. Величины осевых моментов инерции относительно центральных осей должны быть положительными, что следует из определения осевого момента инерции.
2. Если большая площадь составного сечения находится в первой и третьей четвертях, то центробежный момент инерции будет положительным, если во второй и четвертой – отрицательным.

7. Вычислим положение главных осей инерции сечения:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y} = \frac{2 \cdot (-1004,418)}{2148,611 - 792,999} = -1,482;$$

$$2\alpha_0 = -55,99^\circ; \quad \alpha_0 = -27,995^\circ = -27^\circ 59' 42''.$$

Поскольку  $\alpha_0 < 0$ , то поворот осей  $y$  и  $z$  на этот угол необходимо выполнять по часовой стрелке в соответствии с принятым правилом знаков. Полученные в результате этого поворота оси и будут главными центральными осями инерции составного сечения.

8. Определим величины главных моментов инерции сечения:

$$I_{\max} = I_u = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{y_0 z_0}^2} = \frac{792,999 + 2148,611}{2} \pm$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{2148,611 - 792,999}{2}\right)^2 + (-1004,418)^2} = 1470,805 \pm 1211,725 \text{ см}^4.$$

Отсюда

$$I_{max} = I_u = 2682,53 \text{ см}^4;$$
$$I_{min} = I_v = 259,08 \text{ см}^4.$$

**Замечание**

Величины главных центральных моментов инерции должны быть положительными, что следует из определения осевого момента инерции.

По результатам проведенного расчета покажем на рис. 33 главные центральные оси инерции составного сечения – оси  $u$  и  $v$ .

Так как  $I_z > I_y$ , то максимальное значение осевой момент инерции сечения имеет относительно оси, находящейся на минимальном угловом расстоянии от оси  $z$ .

9. Проверим правильность решения задачи:

а) проверим выполнение соотношения

$$I_{max} > I_z > I_y > I_{min} \text{ (если } I_z > I_y) \text{ или } I_{max} > I_y > I_z > I_{min} \text{ (если } I_y > I_z).$$

В рассматриваемом случае

$$2682,53 > 2148,611 > 792,999 > 259,08;$$

б) проверим постоянство суммы величин осевых моментов при повороте осей:

$$I_{max} + I_{min} = I_z + I_y;$$

$$2682,53 + 259,08 = 2941,61; \quad 2148,611 + 792,999 = 2941,61;$$

$$2941,61 = 2941,61;$$

в) вычислим центробежный момент инерции относительно главных центральных осей, который заведомо должен равняться нулю:

$$I_{uv} = I_{yz} \cos 2\alpha_0 + \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha_0 =$$
$$= -1004,418 \cdot \cos(2 \cdot (-27,995)) + \frac{792,999 - 2148,611}{2} \cdot \sin(2 \cdot (-27,995)) =$$
$$= -561,808 + 561,860 = 0,052 \text{ м}^4.$$

Погрешность вычислений

$$\Delta\% = \left| \frac{0,052}{561,860} \right| \cdot 100\% = 0,0093\% \leq 1\%,$$

значит, задача решена правильно.

### Пример 8

Определить положение главных центральных осей инерции заданного сечения и величины главных моментов инерции в системе этих осей (рис. 34).

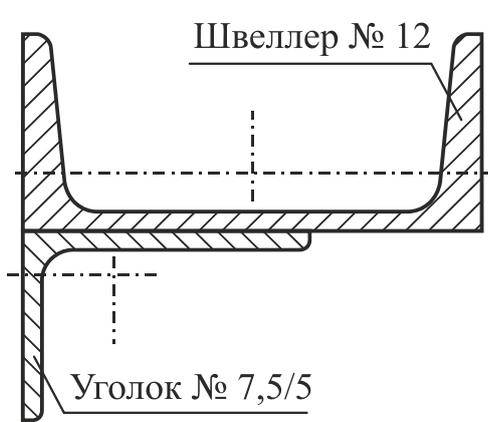


Рис. 34

**Дано:** швеллер № 12, уголок № 7,5/5.

**Необходимо найти**  $y_c, z_c, \alpha_0, I_u, I_v$ .

#### Решение

1. Выполним чертеж составного сечения в масштабе.

2. Разобьем сечение на простейшие части (швеллер и уголок) и присвоим этим частям номера соответственно 1 и 2.

3. В центре тяжести каждой из простейших частей сечения расположим центральные системы координат  $y_i O_i z_i$  (в рассматриваемом случае  $y_1 O_1 z_1$  и  $y_2 O_2 z_2$ ).

4. Из таблиц сортамента выпишем геометрические характеристики швеллера № 12 и уголка № 7,5/5, необходимые для решения задачи, и сведем их в табл. 3.

Таблица 3

Часть сечения	Геометрические характеристики							
	$h_i, \text{см}$	$b_i, \text{см}$	$F_i, \text{см}^2$	$I_{y_i}, \text{см}^4$	$I_{z_i}, \text{см}^4$	$I_{y_i z_i}, \text{см}^4$	$y_{0_i}, \text{см}$	$z_{0_i}, \text{см}$
1 (швеллер)	12,0	5,2	13,3	31,2	304,0	0	0	1,54
2 (уголок)	5,0	7,5	6,11	12,47	34,81	12,0	2,39	1,17

#### Замечания

1. Если в составное сечение входят как простые части прокатные профили, то их геометрические характеристики выбирают из таблиц сортамента. При этом следует учитывать расположение этих частей относительно собственных центральных осей.
2. Поскольку ось  $y_1$  является осью симметрии швеллера, то центробежный момент инерции швеллера  $I_{y_1 z_1} = 0$ .
3. Знак центробежного момента уголка определяется его взаиморасположением относительно собственных центральных осей (см. рис. 32).

5. Найдем координаты центра тяжести составного сечения.

Выберем рабочую (базовую) систему координат, в которой будут определены координаты центра тяжести всего сечения. Примем в качестве рабочей систему центральных осей швеллера  $y_1 O_1 z_1$ .

Тогда формулы для определения координат центра тяжести примут вид

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^2 S_{z_1}^{(i)}}{\sum_{i=1}^2 F_i}; \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^2 S_{y_1}^{(i)}}{\sum_{i=1}^2 F_i},$$

где  $\sum_{i=1}^2 F_i = F = F_1 + F_2 = 13,3 + 6,11 = 19,41 \text{ см}^2;$

$$\begin{aligned} S_{z_1} &= \sum_{i=1}^2 S_{z_1}^{(i)} = S_{z_1}^{(1)} + S_{z_1}^{(2)} = F_1 \cdot 0 + F_2 \left( -\left(\frac{h_1}{2} - y_{0_2}\right) \right) = \\ &= 13,3 \cdot 0 + 6,11 \cdot \left( -\left(\frac{12}{2} - 2,39\right) \right) = -22,057 \text{ см}^3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{y_1} &= \sum_{i=1}^2 S_{y_1}^{(i)} = S_{y_1}^{(1)} + S_{y_1}^{(2)} = F_1 \cdot 0 + F_2 \left( -(z_{0_1} + z_{0_2}) \right) = \\ &= 13,3 \cdot 0 + 6,11 \cdot -(1,54 + 1,17) = -16,558 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

Вычислим координаты центра тяжести  $O$  составного сечения в системе осей  $y_1 O_1 z_1$ :

$$y_c = \frac{S_{z_1}}{F} = \frac{-22,057}{19,41} = -1,136 \text{ см}; \quad z_c = \frac{S_{y_1}}{F} = \frac{-16,558}{19,41} = -0,853 \text{ см}.$$

В соответствии с результатами вычислений покажем на рис. 35 систему центральных осей  $yOz$  и центр тяжести составного сечения – точку  $O$ .

Определим координаты центров тяжести составных частей сечения (точек  $O_1$  и  $O_2$ ) в системе центральных осей  $yOz$ :

$$a_1 = |y_c| = 1,136 \text{ см};$$

$$a_2 = -\left(\frac{h_1}{2} - y_{0_2} - |y_c|\right) = -\left(\frac{12}{2} - 2,39 - 1,136\right) = -2,474 \text{ см};$$

$$c_1 = |z_c| = 0,853 \text{ см};$$

$$c_2 = -(z_{0_1} + z_{0_2} - |z_c|) = -(1,54 + 1,17 - 0,853) = -1,857 \text{ см}.$$

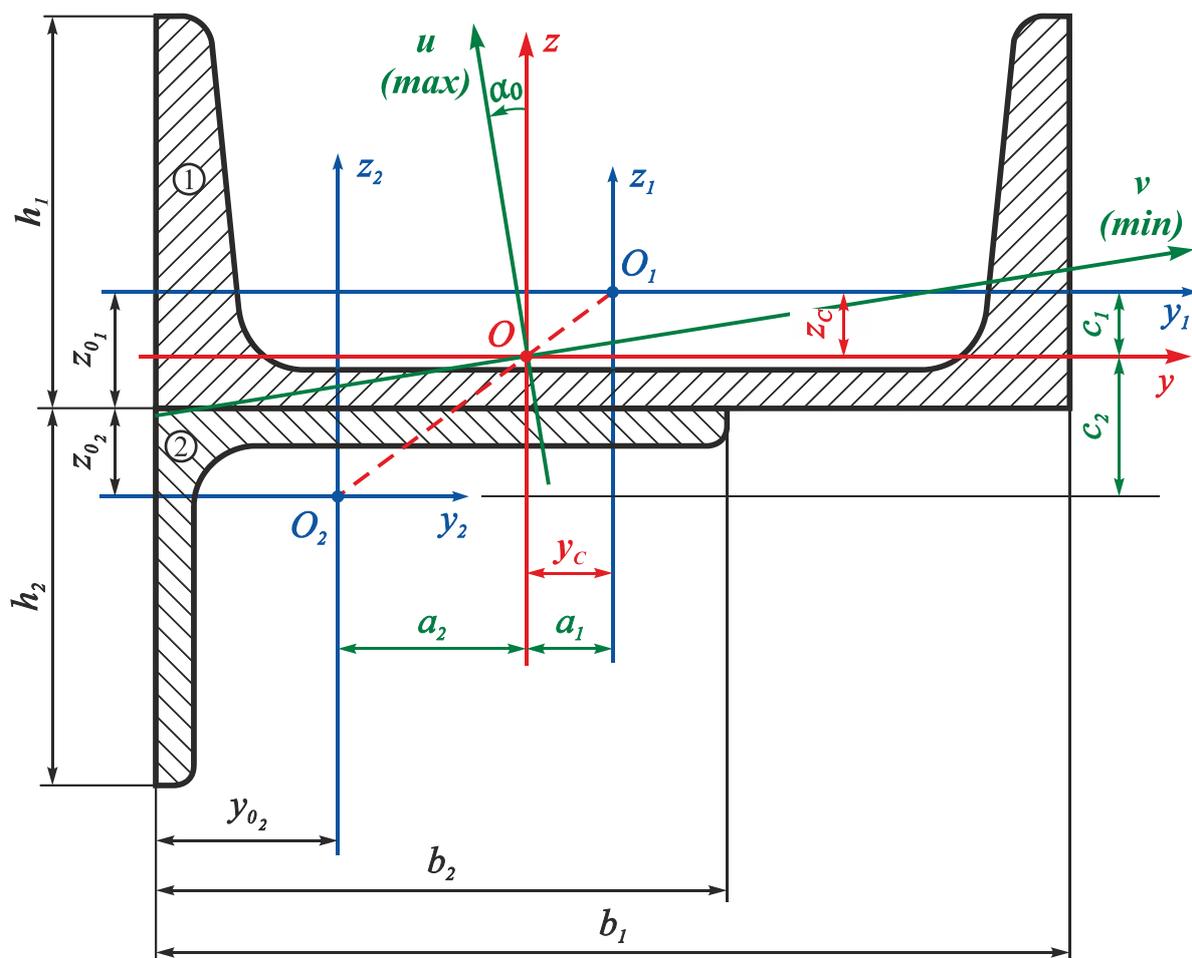


Рис. 35

**Проверка правильности определения центра тяжести:**

а) графическая проверка

Для проверки правильности нахождения центра тяжести соединим пунктиром точки  $O_1$  и  $O_2$ . Точка  $O$  должна лежать на этой линии.

**Замечание**

Центр тяжести составного сечения, состоящего из двух простых частей, *всегда лежит на линии, соединяющей центры тяжести простых частей*. При этом точка  $O$  делит отрезок  $O_1O_2$  на части, обратно пропорциональные площадям простых частей сечения:

$$\frac{|OO_1|}{|OO_2|} = \frac{F_2}{F_1};$$

$$|OO_1| = \sqrt{a_1^2 + c_1^2} = 1,421 \text{ см}; \quad |OO_2| = \sqrt{a_2^2 + c_2^2} = 3,094 \text{ см};$$

$$\frac{|OO_1|}{|OO_2|} = \frac{1,421}{3,094} = 0,4593; \quad \frac{F_2}{F_1} = \frac{6,11}{13,3} = 0,4994; \quad 0,4593 \approx 0,4994;$$

б) аналитическая проверка

Воспользуемся свойством центральных осей, согласно которому статический момент составного сечения относительно центральных осей равен нулю:

$$S_y = \sum_{i=1}^2 S_y^{(i)} = S_y^{(1)} + S_y^{(2)} = F_1 c_1 + F_2 c_2 = 13,3 \cdot 0,853 + 6,11 \cdot (-1,857) = \\ = 11,3449 - 11,3463 = -0,0014 \text{ см}^3.$$

Относительная погрешность

$$\Delta\% = \left| \frac{-0,0014}{11,3449} \right| \cdot 100\% = 0,01234\% < 1\%; \quad [\Delta\%] \leq 1\%;$$

$$S_z = \sum_{i=1}^2 S_z^{(i)} = S_z^{(1)} + S_z^{(2)} = F_1 a_1 + F_2 a_2 = 13,3 \cdot 1,136 + 6,11 \cdot (-2,474) = \\ = 15,1088 - 15,1161 = -0,0073 \text{ см}^3.$$

Относительная погрешность

$$\Delta\% = \left| \frac{-0,0073}{15,1088} \right| \cdot 100\% = 0,00483\% < 1\%; \quad [\Delta\%] \leq 1\%.$$

Таким образом, положение центра тяжести составного сечения определено правильно.

6. Найдем осевые и центробежный моменты инерции составного сечения в системе центральных осей  $yOz$ , используя формулы параллельного переноса:

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} = 40,977 + 33,540 = 74,517 \text{ см}^4;$$

$$I_y^{(1)} = I_{y_1} + c_1^2 F_1 = 31,3 + 0,853^2 \cdot 13,3 = 40,977 \text{ см}^4;$$

$$I_y^{(2)} = I_{y_2} + c_2^2 F_2 = 12,47 + (-1,857)^2 \cdot 6,11 = 33,540 \text{ см}^4;$$

$$I_z = I_z^{(1)} + I_z^{(2)} = 321,164 + 72,207 = 393,371 \text{ см}^4;$$

$$I_z^{(1)} = I_{z_1} + a_1^2 F_1 = 304,0 + 1,136^2 \cdot 13,3 = 321,164 \text{ см}^4;$$

$$I_z^{(2)} = I_{z_2} + a_2^2 F_2 = 34,81 + (-2,474)^2 \cdot 6,11 = 72,207 \text{ см}^4;$$

$$I_{yz} = I_{yz}^{(1)} + I_{yz}^{(2)} = 12,888 + 28,071 = 52,959 \text{ см}^4;$$

$$I_{yz}^{(1)} = I_{y_1 z_1} + a_1 c_1 F_1 = 0 + 1,136 \cdot 0,853 \cdot 13,3 = 12,888 \text{ см}^4;$$

$$I_{yz}^{(2)} = I_{y_2 z_2} + a_2 c_2 F_2 = 12 + (-2,474) \cdot (-1,857) \cdot 6,11 = 40,071 \text{ см}^4.$$

### Замечания

1. Величины осевых моментов инерции относительно центральных осей должны быть положительными, что следует из определения осевого момента инерции.
2. Если большая площадь составного сечения находится в первой и третьей четвертях, то центробежный момент инерции будет положительным, если во второй и четвертой – отрицательным.

7. Вычислим положение главных осей инерции сечения:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y} = \frac{2 \cdot 52,959}{393,371 - 74,517} = 0,332;$$

$$2\alpha_0 = 18,366^\circ; \quad \alpha_0 = 9,183^\circ = 9^\circ 10' 59''.$$

Поскольку  $\alpha_0 > 0$ , то поворот осей  $y$  и  $z$  на этот угол необходимо выполнять против часовой стрелки в соответствии с принятым правилом знаков. Полученные в результате этого поворота оси и будут главными центральными осями инерции составного сечения.

8. Определим величины главных моментов инерции сечения:

$$I_{\max} = I_u = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} = \frac{74,517 + 393,371}{2} \pm$$
$$\pm \sqrt{\left(\frac{393,371 - 74,517}{2}\right)^2 + (52,959)^2} = 233,944 \pm 167,993 \text{ см}^4.$$

Отсюда

$$I_{\max} = I_u = 401,937 \text{ см}^4;$$

$$I_{\min} = I_v = 65,951 \text{ см}^4.$$

### Замечание

Величины главных центральных моментов инерции должны быть положительными, что следует из определения осевого момента инерции.

По результатам проведенного расчета покажем на рис. 35 главные центральные оси инерции составного сечения – оси  $u$  и  $v$ .

Так как  $I_z > I_y$ , то максимальное значение осевой момент инерции сечения принимает относительно оси, находящейся на минимальном угловом расстоянии от оси  $z$ .

9. Проверим правильность решения задачи:

а) проверим выполнение соотношения

$$I_{\max} > I_z > I_y > I_{\min} \text{ (если } I_z > I_y) \text{ или } I_{\max} > I_y > I_z > I_{\min} \text{ (если } I_y > I_z).$$

В рассматриваемом случае

$$401,937 > 393,371 > 74,517 > 65,951;$$

б) проверим постоянство суммы величин осевых моментов при повороте осей:

$$I_{max} + I_{min} = I_z + I_y;$$

$$401,937 + 65,951 = 467,888; \quad 393,371 + 74,517 = 467,888;$$

$$467,888 = 467,888;$$

в) вычислим центробежный момент инерции относительно главных центральных осей, который заведомо должен равняться нулю:

$$\begin{aligned} I_{uv} &= I_{yz} \cos 2\alpha_0 + \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha_0 = \\ &= 52,959 \cdot \cos(2 \cdot 9,183) + \frac{74,517 - 393,371}{2} \cdot \sin(2 \cdot 9,188) = \\ &= 52,959 \cdot 0,949 - 159,427 \cdot 0,315 = 50,2581 - 50,2195 = -0,0386 \text{ м}^4. \end{aligned}$$

Погрешность вычислений

$$\Delta\% = \left| \frac{-0,0386}{50,2581} \right| \cdot 100\% = 0,077\% \leq 1\%,$$

значит, задача решена правильно.

### Пример 9

Найти центробежный момент инерции уголка № 7,5/5 относительно центральных осей, параллельных полкам (рис. 36), если известно положение главных центральных осей инерции сечения и величины главных моментов инерции в системе этих осей.

**Дано:** уголок № 7,5/5.

**Необходимо найти**  $I_{yz}$ .

### Решение

В некоторых справочниках не приведены данные для центробежного момента инерции относительно центральных осей, параллельных полкам (например ГОСТ 8510-72). Из этого ГОСТа выберем:

$$I_{min} = 7,24 \text{ см}^4; \quad I_y = 34,81 \text{ см}^4;$$

$$I_z = 12,47 \text{ см}^4; \quad \text{tg } \alpha = 0,436.$$

Для нахождения центробежного момента инерции  $I_{yz}$  воспользуемся формулой изменения центробежного момента инерции сечения при повороте осей (переход от главных осей к осям  $yOz$ ):

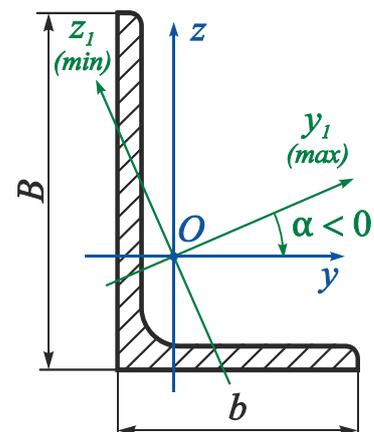


Рис. 36

$$I_{yz} = I_{y_1z_1} \cos 2\alpha + \frac{I_{max} - I_{min}}{2} \sin 2\alpha.$$

Значение  $I_{max}$  вычислим из условия инвариантности суммы осевых моментов инерции относительно поворота осей, т.е. из соотношения

$$I_{max} + I_{min} = I_y + I_z;$$

$$I_{max} + 7,24 = 34,81 + 12,47 \Rightarrow I_{max} = 40,04 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции уголка относительно главных центральных осей тождественно равен нулю ( $I_{y_1z_1} \equiv 0$ ).

Угол наклона главных центральных осей

$$\alpha = -\arctg 0,436 = -23,557^\circ.$$

Угол в этом случае отрицателен, так как кратчайшее совмещение оси максимального момента инерции с осью  $y$  происходит по часовой стрелке.

Таким образом, центробежный момент уголка (см. пример 8, табл. 3).

$$I_{yz} = 0 + \frac{40,04 - 7,24}{2} \sin(2 \cdot (-23,557^\circ)) = 16,4 \cdot (-0,7327) = -12,02 \text{ см}^4.$$

### Замечания

1. Ось максимального момента инерции равнополочного уголка является осью симметрии, следовательно,  $\alpha = 45^\circ$ .

2. Центробежный момент инерции неравнополочного уголка проще вычислить по формуле

$$I_{yz} = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha (I_z - I_y)}{2}.$$

3. В таблицах сортамента центробежный момент инерции приведен по модулю. Его знак можно определить, воспользовавшись рис. 32.

### Пример 10

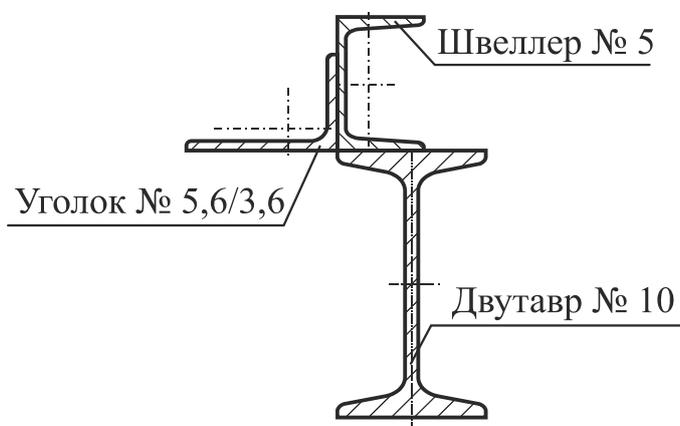


Рис. 37

Определить положение главных центральных осей инерции заданного сечения и величины главных моментов инерции в системе этих осей (рис. 37).

**Дано:** двутавр № 10, швеллер № 5, уголок № 5,6/3,6.

**Необходимо найти**  $y_c$ ,  $z_c$ ,  $\alpha_0$ ,  $I_u$ ,  $I_v$ .

### Решение

1. Выполним чертеж составного сечения в масштабе.
2. Разобьем сечение на простейшие части и присвоим этим частям такие номера: двутавр – 1, швеллер – 2, уголок – 3 (рис. 38).
3. В центре тяжести каждой из простейших частей сечения расположим центральные системы координат  $y_i O_i z_i$ .
4. Из таблиц сортамента выпишем геометрические характеристики двутавра № 10, швеллера № 5, уголка № 5,6/3,6 и сведем их в табл. 4.

Таблица 4

Часть сечения	Геометрические характеристики							
	$h_i, \text{см}$	$b_i, \text{см}$	$F_i, \text{см}^2$	$I_{y_i}, \text{см}^4$	$I_{z_i}, \text{см}^4$	$I_{y_i z_i}, \text{см}^4$	$y_{0_i}, \text{см}$	$z_{0_i}, \text{см}$
1 (двутавр)	10,0	5,5	12,0	198,0	17,9	0	0	0
2 (швеллер)	5,0	3,2	6,16	22,8	5,61	0	1,16	0
3 (уголок)	3,6	5,6	3,58	3,7	11,37	3,74	1,82	0,84

5. Найдем координаты центра тяжести составного сечения.

Выберем рабочую (базовую) систему координат, в которой будут определены координаты центра тяжести всего сечения. Примем в качестве рабочей систему центральных осей двутавра  $y_1 O_1 z_1$ .

Тогда формулы для определения координат центра тяжести примут вид

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^3 S_{z_1}^{(i)}}{\sum_{i=1}^3 F_i}; \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^3 S_{y_1}^{(i)}}{\sum_{i=1}^3 F_i},$$

где  $\sum_{i=1}^2 F_i = F = F_1 + F_2 + F_3 = 12,0 + 6,16 + 3,58 = 21,74 \text{ см}^2$ ;

$$\begin{aligned} S_{z_1} &= \sum_{i=1}^3 S_{z_1}^{(i)} = F_1 \cdot 0 + F_2 \left( -\left(\frac{b_1}{2} - y_{0_2}\right) \right) + F_3 \left( -\left(\frac{b_1}{2} + y_{0_3}\right) \right) = \\ &= 12,0 \cdot 0 + 6,16 \cdot \left( -\left(\frac{5,5}{2} - 1,16\right) \right) + 3,58 \cdot \left( -\left(\frac{5,5}{2} + 1,82\right) \right) = \\ &= -26,155 \text{ см}^3; \end{aligned}$$

$$S_{y_1} = \sum_{i=1}^3 S_{y_1}^{(i)} = F_1 \cdot 0 + F_2 \left( \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2} \right) + F_3 \left( \frac{h_1}{2} + z_{0_3} \right) =$$

$$= 12,0 \cdot 0 + 6,16 \cdot \left( \frac{10,0}{2} + \frac{5,0}{2} \right) + 3,58 \cdot \left( \frac{10,0}{2} + 0,84 \right) = 67,107 \text{ см}^3.$$

Вычислим координаты центра тяжести  $O$  составного сечения в системе осей  $y_1 O_1 z_1$ :

$$y_c = \frac{S_{z_1}}{F} = \frac{-26,155}{21,74} = -1,203 \text{ см}; \quad z_c = \frac{S_{y_1}}{F} = \frac{67,107}{21,74} = 3,087 \text{ см}.$$

В соответствии с результатами вычислений покажем на рис. 38 систему центральных осей  $yOz$  и центр тяжести составного сечения – точку  $O$ .

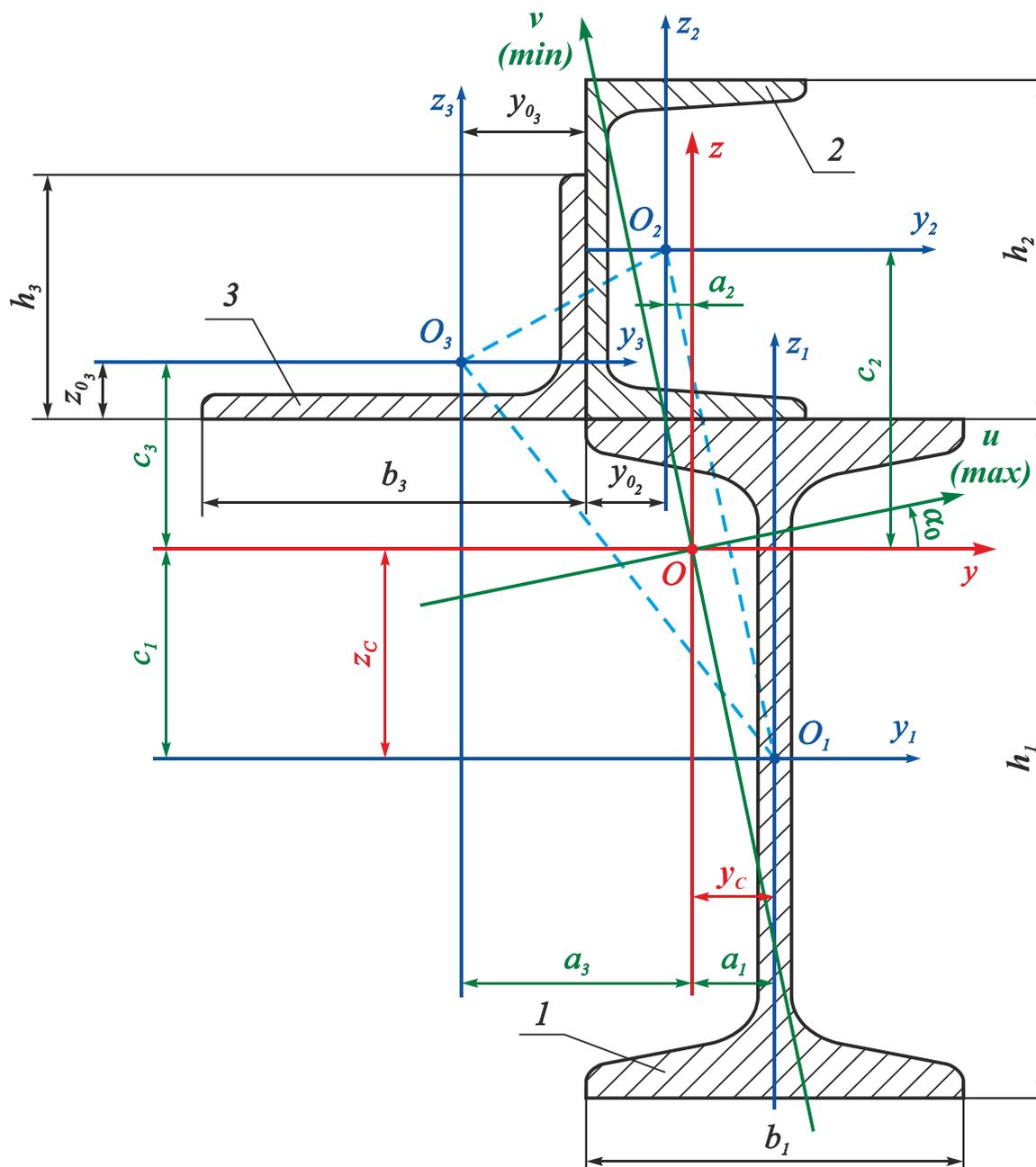


Рис. 38

**Замечание**

Центр тяжести сечения, состоящего из трех и более составных частей, расположен внутри области, ограниченной линиями, соединяющими центры тяжести составных частей (на рис. 38 – внутри треугольника  $O_1O_2O_3$ ).

Координаты центров тяжести составных частей сечения (точек  $O_1$ ,  $O_2$  и  $O_3$ ) в системе центральных осей  $yOz$ :

$$a_1 = |y_c| = 1,203 \text{ см};$$

$$a_2 = -\left(\frac{b_1}{2} - y_{0_2} - |y_c|\right) = -\left(\frac{5,5}{2} - 1,16 - 1,203\right) = -0,387 \text{ см};$$

$$a_3 = -\left(\frac{b_1}{2} + y_{0_3} - |y_c|\right) = -\left(\frac{5,5}{2} + 1,82 - 1,203\right) = -3,367 \text{ см};$$

$$c_1 = -z_c = -3,087 \text{ см};$$

$$c_2 = \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2} - z_c = \frac{10,0}{2} + \frac{5,0}{2} - 3,087 = 4,413 \text{ см};$$

$$c_3 = \frac{h_1}{2} + z_{0_3} - z_c = \frac{10,0}{2} + 0,84 - 3,087 = 2,753 \text{ см}.$$

**Проверка правильности определения центра тяжести**

Воспользуемся свойством центральных осей, согласно которому статический момент составного сечения относительно центральных осей равен нулю:

$$\begin{aligned} S_y &= \sum_{i=1}^2 S_y^{(i)} = S_y^{(1)} + S_y^{(2)} + S_y^{(3)} = F_1 c_1 + F_2 c_2 + F_3 c_3 = \\ &= 12,0 \cdot (-3,087) + 6,16 \cdot 4,413 + 3,58 \cdot 2,753 = \\ &= -37,044 + 27,184 + 9,856 = -0,004 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

Относительная погрешность

$$\Delta\% = \left| \frac{-0,004}{37,040} \right| \cdot 100\% = 0,0108\% < 1\%; \quad [\Delta\%] \leq 1\%;$$

$$\begin{aligned} S_z &= \sum_{i=1}^2 S_z^{(i)} = S_z^{(1)} + S_z^{(2)} + S_z^{(3)} = F_1 a_1 + F_2 a_2 + F_3 a_3 = \\ &= 12,0 \cdot 1,203 + 6,16 \cdot (-0,387) + 3,58 \cdot (-3,367) = \\ &= 14,436 - 2,384 - 12,054 = -0,002 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

Относительная погрешность

$$\Delta\% = \left| \frac{-0,002}{14,436} \right| \cdot 100\% = 0,0139\% < 1\%; \quad [\Delta\%] \leq 1\%.$$

Таким образом, положение центра тяжести составного сечения определено правильно.

6. Найдем осевые и центробежный моменты инерции составного сечения в системе центральных осей  $yOz$ , используя формулы параллельного переноса:

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} + I_y^{(3)} = 312,355 + 142,763 + 30,833 = 485,951 \text{ см}^4;$$

$$I_y^{(1)} = I_{y_1} + c_1^2 F_1 = 198,0 + (-3,087)^2 \cdot 12,0 = 312,355 \text{ см}^4;$$

$$I_y^{(2)} = I_{y_2} + c_2^2 F_2 = 22,8 + 4,413^2 \cdot 6,16 = 142,763 \text{ см}^4;$$

$$I_y^{(3)} = I_{y_3} + c_3^2 F_3 = 3,7 + 2,753^2 \cdot 3,58 = 30,833 \text{ см}^4;$$

$$I_z = I_z^{(1)} + I_z^{(2)} + I_z^{(3)} = 35,267 + 6,533 + 51,955 = 93,755 \text{ см}^4;$$

$$I_z^{(1)} = I_{z_1} + a_1^2 F_1 = 17,9 + 1,203^2 \cdot 12,0 = 35,267 \text{ см}^4;$$

$$I_z^{(2)} = I_{z_2} + a_2^2 F_2 = 5,61 + (-0,387)^2 \cdot 6,16 = 6,533 \text{ см}^4;$$

$$I_z^{(3)} = I_{z_3} + a_3^2 F_3 = 11,37 + (-3,367)^2 \cdot 3,58 = 51,955 \text{ см}^4;$$

$$I_{yz} = I_{yz}^{(1)} + I_{yz}^{(2)} + I_{yz}^{(3)} = -44,564 - 10,520 - 29,444 = -84,528 \text{ см}^4;$$

$$I_{yz}^{(1)} = I_{y_1 z_1} + a_1 c_1 F_1 = 0 + 1,203 \cdot (-3,087) \cdot 12,0 = -44,564 \text{ см}^4;$$

$$I_{yz}^{(2)} = I_{y_2 z_2} + a_2 c_2 F_2 = 0 + (-0,387) \cdot 4,413 \cdot 6,16 = -10,520 \text{ см}^4;$$

$$I_{yz}^{(3)} = I_{y_3 z_3} + a_3 c_3 F_3 = 3,74 + (-3,367) \cdot 2,753 \cdot 3,58 = -29,444 \text{ см}^4.$$

**Замечание**

Большая площадь составного сечения находится во второй и четвертой четвертях, значит центробежный момент инерции будет отрицательным.

7. Вычислим положение главных осей инерции сечения:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y} = \frac{2 \cdot (-84,528)}{93,755 - 485,951} = 0,431;$$

$$2\alpha_0 = 23,316^\circ; \quad \alpha_0 = 11,658^\circ = 11^\circ 39' 29''.$$

Поскольку  $\alpha_0 > 0$ , то поворот осей  $y$  и  $z$  на этот угол необходимо выполнить против часовой стрелки в соответствии с принятым правилом знаков. Полученные в результате этого поворота оси и будут главными центральными осями инерции составного сечения.

8. Определим величины главных моментов инерции сечения:

$$I_{\max} = I_u = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{y_0 z_0}^2} = \frac{485,951 + 93,755}{2} \pm$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{93,755 - 485,951}{2}\right)^2 + (-84,528)^2} = 289,853 \pm 213,540 \text{ см}^4.$$

Отсюда

$$I_{max} = I_u = 503,393 \text{ см}^4;$$

$$I_{min} = I_v = 76,313 \text{ см}^4.$$

По результатам проведенного расчета покажем на рис. 38 главные центральные оси инерции составного сечения – оси  $u$  и  $v$ .

Поскольку  $I_y > I_z$ , то максимальное значение осевой момент инерции сечения имеет относительно оси, находящейся на минимальном угловом расстоянии от оси  $y$ .

9. Проверим правильность решения задачи:

а) проверим выполнение соотношения

$$I_{max} > I_z > I_y > I_{min} \text{ (если } I_z > I_y) \text{ или } I_{max} > I_y > I_z > I_{min} \text{ (если } I_y > I_z).$$

В рассматриваемом случае

$$503,393 > 485,951 > 379,855 > 76,313;$$

б) проверим постоянство суммы осевых моментов при повороте осей:

$$I_{max} + I_{min} = I_y + I_z;$$

$$503,393 + 76,313 = 485,951 + 93,755;$$

$$579,706 = 579,706;$$

в) вычислим центробежный момент инерции относительно главных центральных осей, который заведомо должен равняться нулю ( $I_{uv} = 0$ ):

$$\begin{aligned} I_{uv} &= I_{yz} \cos 2\alpha_0 + \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha_0 = \\ &= (-84,528) \cdot \cos(2 \cdot 11,658^\circ) + \frac{485,951 - 93,755}{2} \cdot \sin(2 \cdot 11,658^\circ) = \\ &= -77,625 + 77,616 = -0,009 \text{ м}^4. \end{aligned}$$

Погрешность вычислений

$$\Delta\% = \left| \frac{-0,009}{77,616} \right| \cdot 100\% = 0,0116\% \leq 1\%,$$

значит задача решена правильно.

## Вопросы для самопроверки

1. Назовите основные геометрические характеристики поперечных сечений.
2. Для чего необходимы геометрические характеристики плоских сечений?
3. Что такое статический момент плоской фигуры относительно оси?
4. Какую размерность имеет статический момент?
5. Чему равен статический момент относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения?
6. Как определить координаты центра тяжести простого и сложного сечений?
7. Какие оси называют центральными осями?
8. Что называется осевым, полярным и центробежным моментами инерции сечения?
9. Какую размерность имеют моменты инерции сечения?
10. Почему осевые и полярные моменты инерции не могут быть отрицательными?
11. Относительно какой из параллельных осей осевой момент инерции будет наименьшим?
12. Какой вид имеют формулы перехода для вычисления моментов инерции при параллельном переносе осей?
13. С помощью каких выражений определяют величины главных моментов инерции и положение главных осей?
14. Какие оси называют главными осями инерции?
15. Какие оси называют главными центральными осями инерции?
16. Какие свойства имеют главные центральные моменты инерции сечения?
17. Чему равен центробежный момент инерции относительно главных центральных осей?
18. Положение главных осей каких сечений можно указать без вычислений?
19. Изменяется ли сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей при повороте этих осей?
20. Чему равны осевые моменты инерции круга и кольца относительно осей, проходящих через их центры тяжести?
21. Чему равны осевые моменты инерции прямоугольника и прямоугольного треугольника относительно осей, проходящих через их центры тяжести?
22. Как определяется знак центробежного момента инерции прямоугольного треугольника и уголка относительно осей, параллельных основаниям?

## Порядок выполнения задания и варианты

1. Выполнить чертеж составного сечения в масштабе.
2. Разбить сечение на простейшие части.
3. В центре тяжести каждой из простейших частей сечения расположить центральные системы координат  $y_i O_i z_i$ .
4. Из таблиц сортамента выбрать геометрические характеристики прокатных профилей (задача 1).

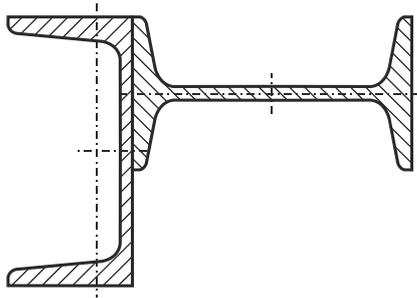
Вычислить геометрические характеристики простейших геометрических фигур (задача 2).

<b>Замечания к задаче 2</b>	1. Геометрические размеры простейших фигур приведены в сантиметрах.
	2. Все треугольники – прямоугольные либо равнобедренные.

5. Найти координаты центра тяжести составного сечения. Проверить правильность вычисления положения центра тяжести.
6. Определить осевые и центробежные моменты инерции составного сечения в системе центральных осей  $yOz$ .
7. Вычислить положение главных центральных осей инерции сечения, т.е. угол, на который необходимо повернуть центральные оси, чтобы они стали главными.
8. Определить главные центральные моменты инерции сечения.
9. Проверить правильность решения.

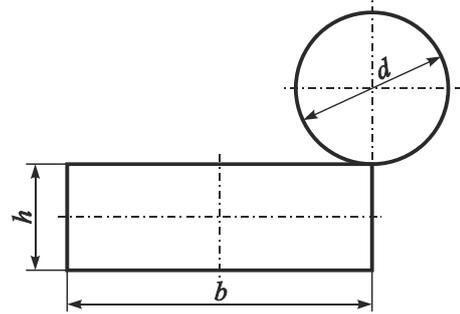
**Вариант 1**

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ $\Gamma$	14	14a	16	16a	18	18a	20	20a
№ $\Pi$	10	12	14	16	18	20	20a	22

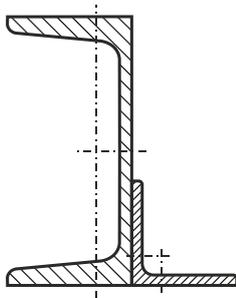
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ $b$	20	16	12	10	8	14	18	24
№ $h$	4	6	4	2	3	4	5	6
№ $d$	6	5	6	4	5	8	10	8

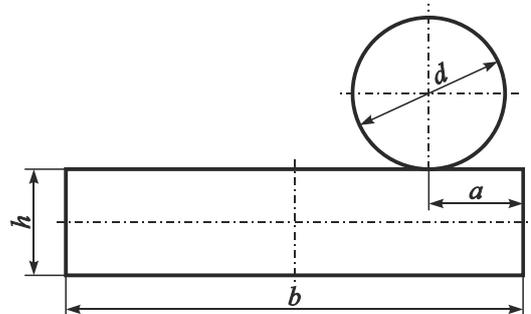
**Вариант 2**

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ $\Gamma$	5	6,5	8	10	12	14	14a	16
№ $L$	2	3	3,5	4	4,5	5	6,5	7,5

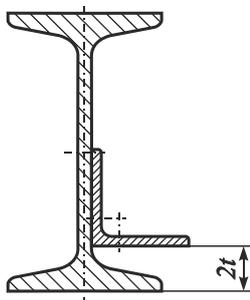
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ $b$	24	20	10	14	12	16	18	12
№ $h$	6	5	3	4	3	6	4	6
№ $d$	8	10	6	5	8	7	8	6
№ $a$	3	2	1	2	1	2	2	3

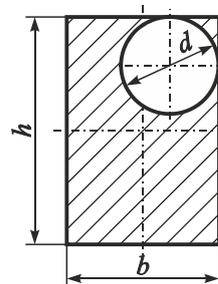
**Вариант 3**

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ $\Pi$	10	12	14	16	18	20	20a	22
№ $L$	3,5	4	4,5	5	6	6,5	7,5	8

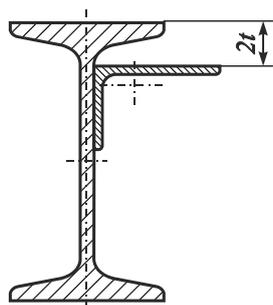
Задача 2



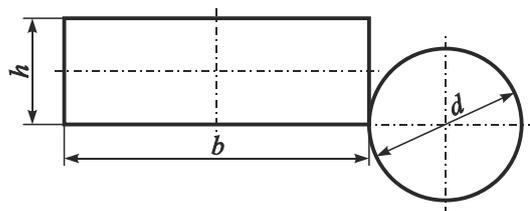
№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ $b$	8	10	14	16	12	18	15	20
№ $h$	12	5	16	16	16	24	20	30
№ $d$	4	4	6	5	8	10	8	12

### Вариант 4

Задача 1



Задача 2

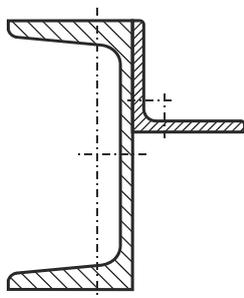


№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ I	10	12	14	16	18	20	20a	22
№ L	5/3,2	6,3/4	7/4,5	7,5/5	8/5	9/5,6	11/7	14/9

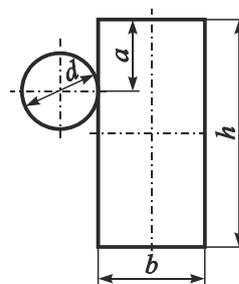
№	1	2	3	4	5	6	7	8
b	10	12	9	18	15	8	10	20
h	4	3	5	4	6	2	3	6
d	6	5	7	8	10	5	8	10

### Вариант 5

Задача 1



Задача 2

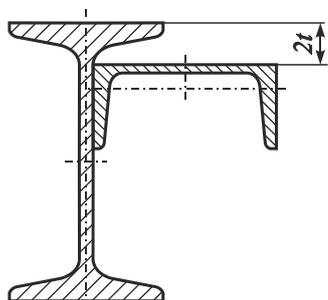


№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ C	5	6,5	8	10	12	14	14a	18
№ L	2	2,5	3,5	4,5	5	6	6,5	7,5

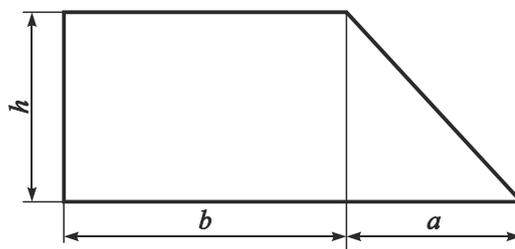
№	1	2	3	4	5	6	7	8
b	2	6	4	3	5	4	5	6
h	8	10	9	10	12	14	16	15
d	6	8	7	6	8	6	6	8
a	1	2	3	1	1	2	4	2

### Вариант 6

Задача 1



Задача 2

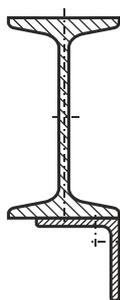


№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ C	5	6,5	8	10	12	14	14a	16
№ I	10	12	14	16	18	20	20a	22

№	1	2	3	4	5	6	7	8
b	8	10	14	7	12	10	11	16
h	9	12	9	6	12	15	15	18
a	6	9	9	7,5	6	9	7,5	15

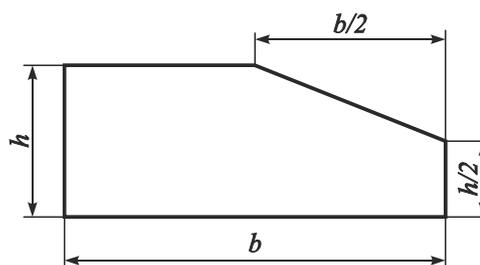
### Вариант 7

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ I	10	12	14	16	18	20	20a	22
№ L	4	4,5	5	6	7	7,5	8	9

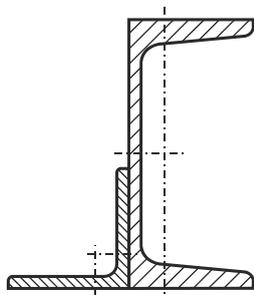
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
$h$	6	12	15	24	15	12	18	24
$b$	9	9	18	18	12	6	12	15

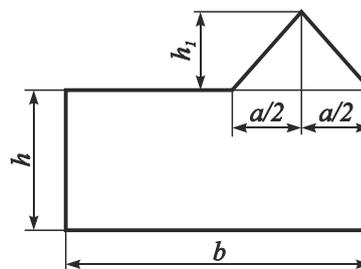
### Вариант 8

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ I	8	10	12	14	14a	16	16a	18
№ L	4	4,5	6	6,3	7,5	8	9	10

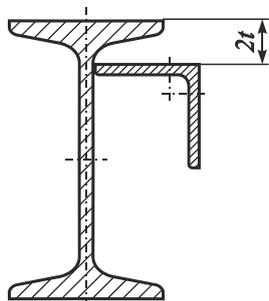
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
$a$	8	4	5	6	8	6	10	12
$b$	10	8	12	14	12	12	19	20
$h$	6	3	4	4	3	5	6	5
$h_1$	6	6	9	9	6	12	12	15

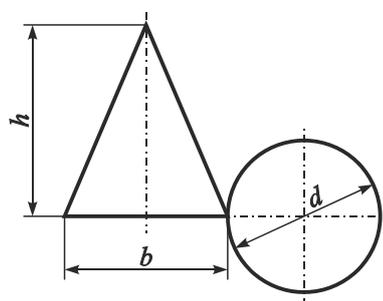
### Вариант 9

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ I	10	12	14	16	18	20	20a	22
№ L	3,5	4,5	5	6	6,3	7,5	8	9

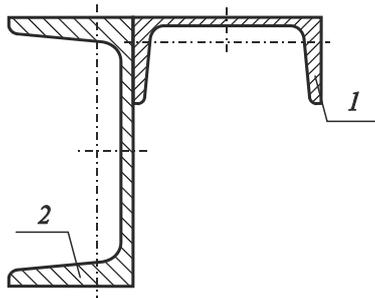
Задача 2



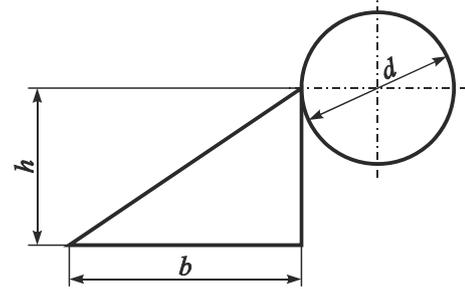
№	1	2	3	4	5	6	7	8
$h$	10	12	9	9	6	15	18	21
$b$	8	10	9	8	4	10	12	15
$d$	8	6	7	8	5	8	10	14

**Вариант 10**

Задача 1



Задача 2

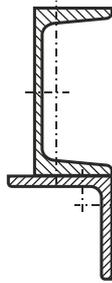


№	1	2	3	4	5	6	7	8
№1 $\square$	5	6,5	8	10	12	14	14a	16
№2 $\square$	6,5	8	10	12	14	14a	16	16a

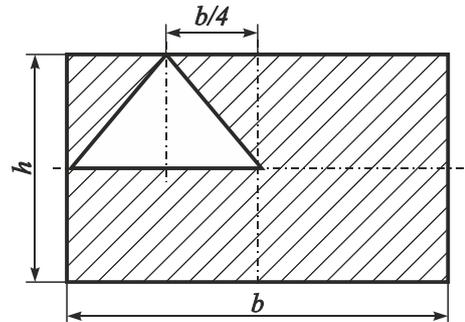
№	1	2	3	4	5	6	7	8
$h$	6	9	12	15	12	18	6	18
$b$	9	6	9	9	15	12	6	15
$d$	8	6	8	10	9	14	5	10

**Вариант 11**

Задача 1



Задача 2

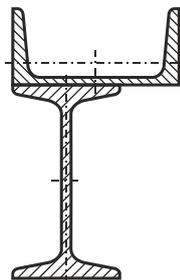


№	1	2	3	4	5	6	7	8
№1 $\square$	5	6,5	8	10	12	14	14a	16
№2 $\square$	3,5	4	4,5	5	6	6,3	7,5	8

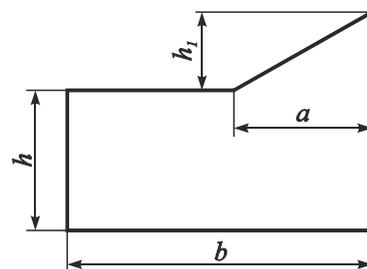
№	1	2	3	4	5	6	7	8
$h$	9	12	12	15	18	18	6	24
$b$	8	12	16	10	16	20	8	18

**Вариант 12**

Задача 1



Задача 2

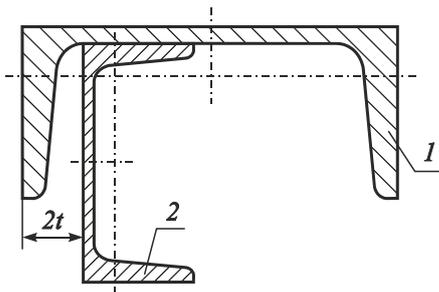


№	1	2	3	4	5	6	7	8
№1 $\square$	10	12	14	14a	16	16a	18	18a
№2 $\square$	10	12	14	16	18	20	20a	22

№	1	2	3	4	5	6	7	8
$h$	2	4	3	5	4	3	5	6
$b$	8	10	8	12	14	10	15	17
$a$	6	6	9	9	7,5	7,5	9	12
$h_1$	6	9	6	9	9	7,5	12	9

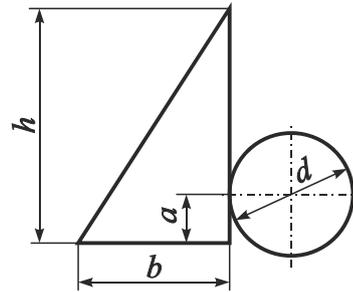
**Вариант 13**

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№1 $\square$	8	10	12	14	14a	16	16a	18
№2 $\square$	6,5	8	10	12	5	14	14a	16

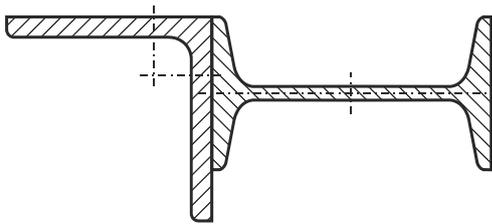
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
$h$	6	15	12	9	7,5	15	18	21
$b$	6	9	15	6	6	12	9	15
$a$	1	3	2	2	1	3	4	3
$d$	5	7	8	6	4	6	10	10

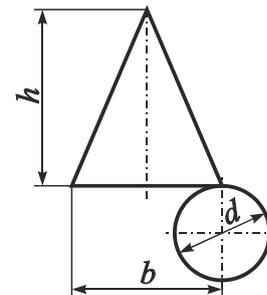
**Вариант 14**

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ I	10	12	14	16	18	20	20a	22
№ L	7,5	8	9	10	12,5	14	16	18

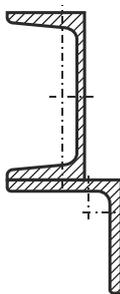
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
$h$	18	16	15	10	12	14	20	10
$b$	12	8	10	10	9	8	8	14
$d$	10	10	12	8	9	6	10	6

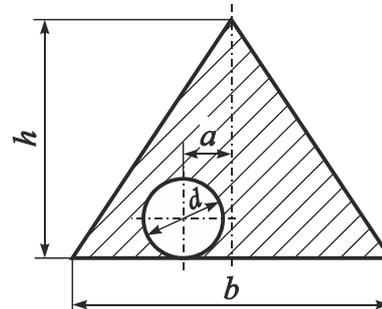
**Вариант 15**

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ $\square$	5	6,5	8	10	12	14	14a	16
№ L	4,5	5	6	6,3	7,5	8	9	10

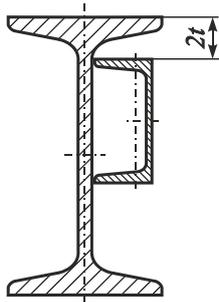
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
$h$	8	10	12	14	15	16	9	18
$b$	6	12	8	12	10	12	9	12
$a$	1	1	1	2	1	1	1,5	2
$d$	2	4	3	4	4	5	3	5

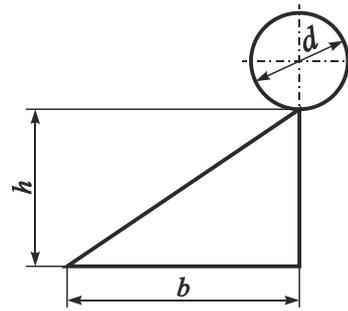
**Вариант 16**

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ I	10	12	14	16	18	20	20a	22
№ L	5	6,5	8	10	12	14	14a	16

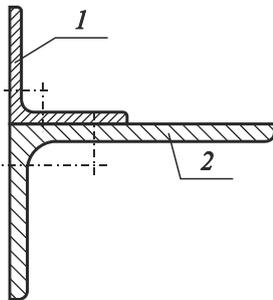
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
<i>b</i>	9	6	9	7,5	9	12	15	18
<i>h</i>	6	6	9	6	7,5	6	9	12
<i>d</i>	6	8	8	7	5	8	10	10

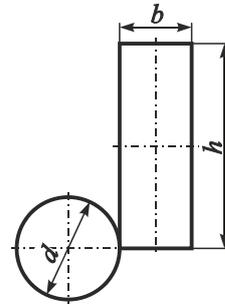
**Вариант 17**

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№1 L	3	3,5	4	4,5	5	6	6,3	7,5
№2 L	3,2/2	4/2,5	5/3,2	6,3/4	7/4,5	8/5	9/5,6	11/7

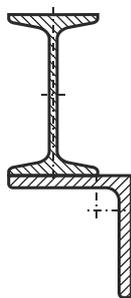
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
<i>b</i>	8	10	8	12	14	14	15	16
<i>h</i>	4	4	2	5	6	4	6	5
<i>d</i>	8	6	6	10	8	9	12	8

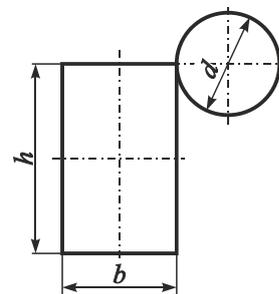
**Вариант 18**

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ I	10	12	14	16	18	20	20a	22
№ L	7,5	8	9	10	12,5	14	16	18

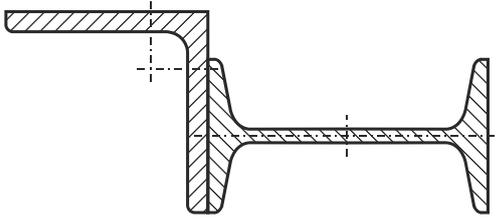
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
<i>h</i>	6	8	10	14	12	16	18	20
<i>b</i>	4	3	4	6	4	5	6	8
<i>d</i>	6	6	8	8	6	10	8	10

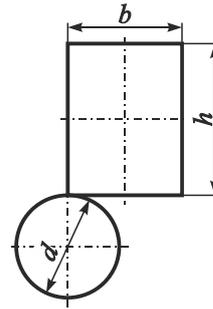
**Вариант 19**

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ Ц	10	12	14	16	18	20	20a	22
№ I	7,5	8	9	10	12,5	14	16	18

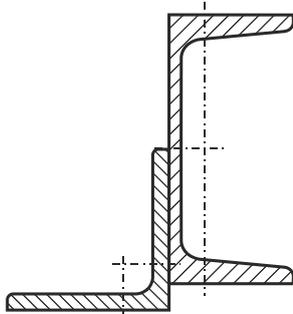
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
$h$	10	8	12	14	6	6	8	18
$b$	4	2	4	5	8	4	8	8
$d$	6	5	6	8	6	8	6	12

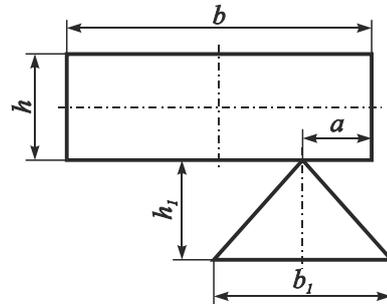
**Вариант 20**

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ Ц	5	6,5	8	10	12	14	14a	18
№ L	2,5	3	3,5	4	4,5	5	6	6,3

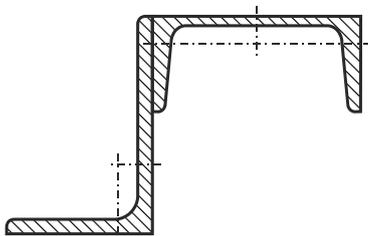
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
$h$	2	3	4	6	5	4	8	3
$b$	10	8	14	10	12	12	10	10
$h_1$	6	3	6	9	7,5	7,5	12	6
$b_1$	4	6	8	6	8	6	8	6
$a$	2	1	3	2	3	1	2	1

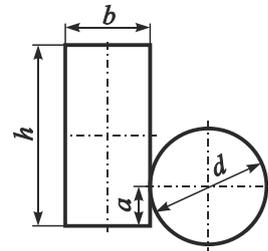
**Вариант 21**

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ Ц	5	6,5	8	10	12	14	14a	16
№ L	4/2,5	5/3,2	6,3/4	7/4,5	7,5/5	8/5	9/5,6	11/7

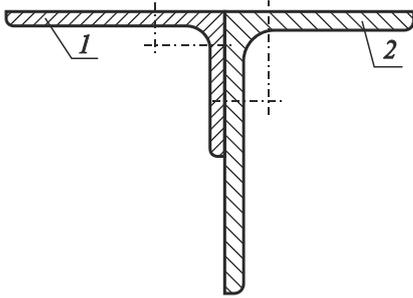
Задача 2



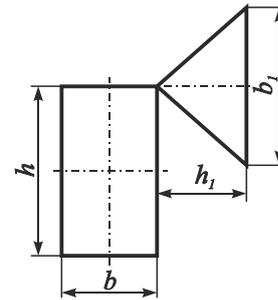
№	1	2	3	4	5	6	7	8
$h$	10	12	12	8	6	14	15	18
$b$	6	4	7	5	8	6	4	6
$d$	4	6	5	6	8	6	8	10
$a$	1	2	3	2	1	3	2	4

**Вариант 22**

Задача 1



Задача 2

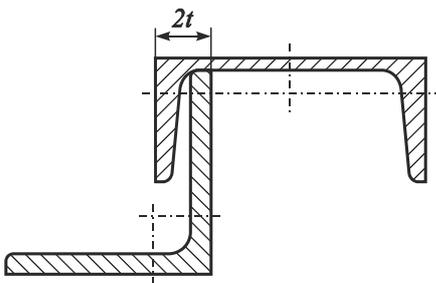


№	1	2	3	4	5	6	7	8
№1 L	3,2/2	4/2,5	5/3,2	6,3/4	7/4,5	8/5	9/5,6	11/7
№2 L	5/3,2	6,3/4	7/4,5	7,5/5	8/5	9/5,6	11/7	14/9

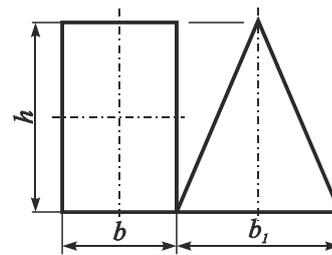
№	1	2	3	4	5	6	7	8
$h$	6	8	10	9	12	10	7	16
$b$	6	4	5	4	5	10	4	6
$h_1$	6	6	7,5	9	9	6	6	9
$b_1$	6	8	8	10	6	12	8	12

**Вариант 23**

Задача 1



Задача 2

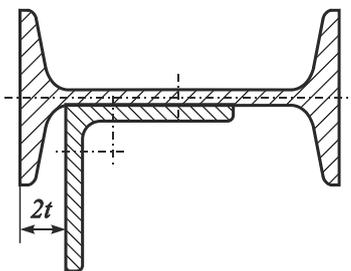


№	1	2	3	4	5	6	7	8
№1 I	5	6,5	8	10	12	14	14a	16
№2 L	5	6	6,3	7,5	8	9	10	12

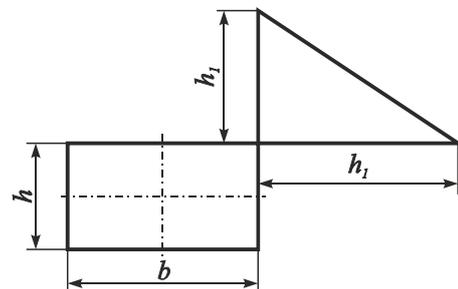
№	1	2	3	4	5	6	7	8
$h$	6	9	12	6	15	18	21	24
$b$	4	8	5	8	4	6	10	8
$b_1$	6	6	8	10	10	12	10	12

**Вариант 24**

Задача 1



Задача 2

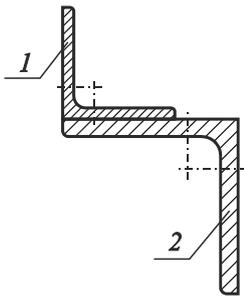


№	1	2	3	4	5	6	7	8
№1 I	10	12	14	16	18	20	20a	22
№2 L	4	4,5	5	6	6,3	7,5	8	9

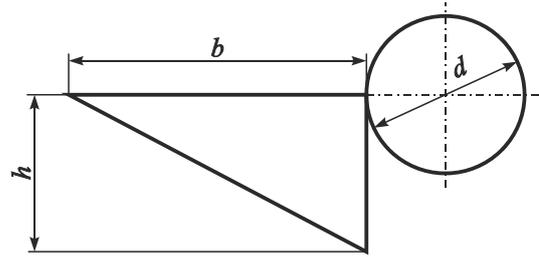
№	1	2	3	4	5	6	7	8
$h$	4	5	6	4	3	2	6	8
$b$	10	10	14	8	10	8	16	20
$h_1$	6	9	9	6	6	3	9	12
$b_1$	6	6	12	3	9	6	9	15

**Вариант 25**

Задача 1



Задача 2

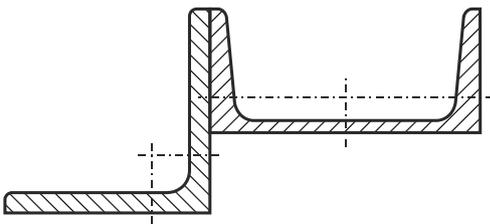


№	1	2	3	4	5	6	7	8
№1 L	4	4,5	5	6	6,3	7,5	8	9
№2 L	6	6,3	7,5	8	9	10	12,5	14

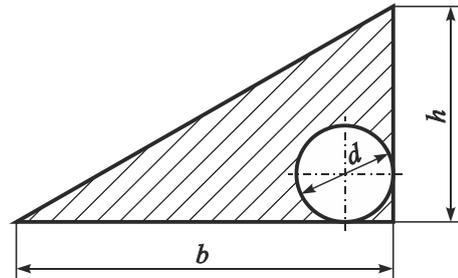
№	1	2	3	4	5	6	7	8
$h$	12	15	9	12	15	18	24	6
$b$	9	9	6	18	12	15	15	9
$d$	8	8	6	14	10	12	16	8

**Вариант 26**

Задача 1



Задача 2

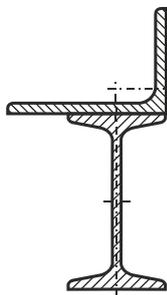


№	1	2	3	4	5	6	7	8
№1 U	5	6,5	8	10	12	14	14a	16
№2 L	5	6	6,3	7,5	8	9	10	12,5

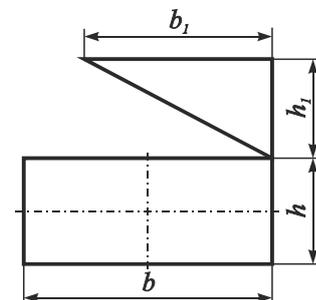
№	1	2	3	4	5	6	7	8
$h$	6	9	9	12	15	18	9	15
$b$	9	9	12	6	12	12	15	18
$d$	3	4	5	4	5	7	5	9

**Вариант 27**

Задача 1



Задача 2

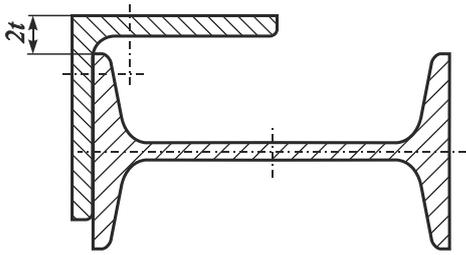


№	1	2	3	4	5	6	7	8
№1 T	10	12	14	16	18	20	20a	22
№2 L	6,3/4	7/4,5	7,5/5	8/5	9/5,6	11/7	14/9	19/10

№	1	2	3	4	5	6	7	8
$h$	4	4	5	8	6	5	6	8
$b$	10	8	9	12	12	10	10	16
$h_1$	6	5	6	12	9	5	6	9
$b_1$	6	6	9	12	9	6	12	12

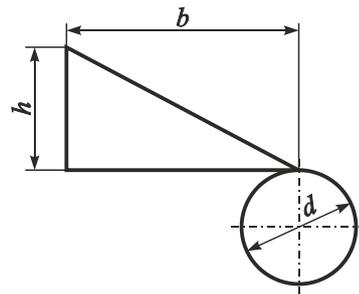
**Вариант 28**

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ I	10	12	14	16	18	20	20a	22
№ L	8	9	10	12,5	14	16	18	20

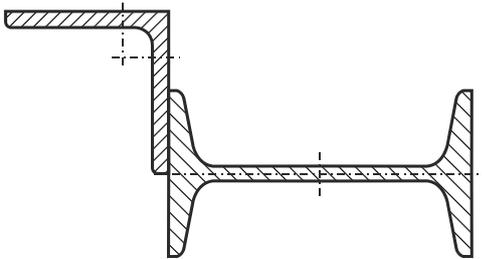
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
$h$	12	12	9	9	6	12	12	15
$b$	18	15	12	9	9	6	9	9
$d$	8	10	8	6	8	8	10	10

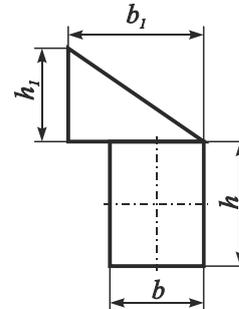
**Вариант 29**

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ I	10	12	14	16	18	20	20a	22
№ L	7,5	8	9	10	12,5	14	16	18

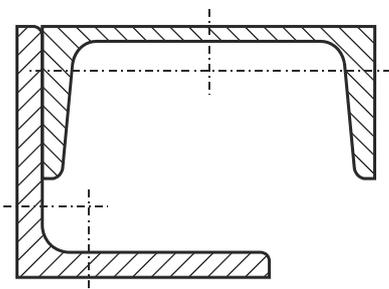
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
$h$	6	5	7	8	10	9	12	16
$b$	4	5	5	6	4	8	8	10
$h_1$	3	6	6	6	9	9	9	15
$b_1$	6	7	9	12	9	15	12	18

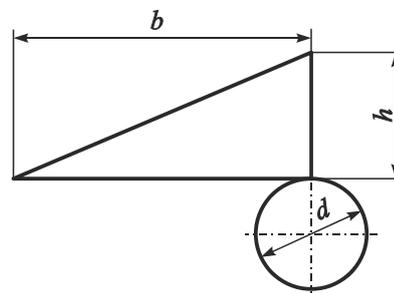
**Вариант 30**

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ I	5	6,5	8	10	12	14	14a	16
№ L	5	6	6,3	7,5	8	9	10	12,5

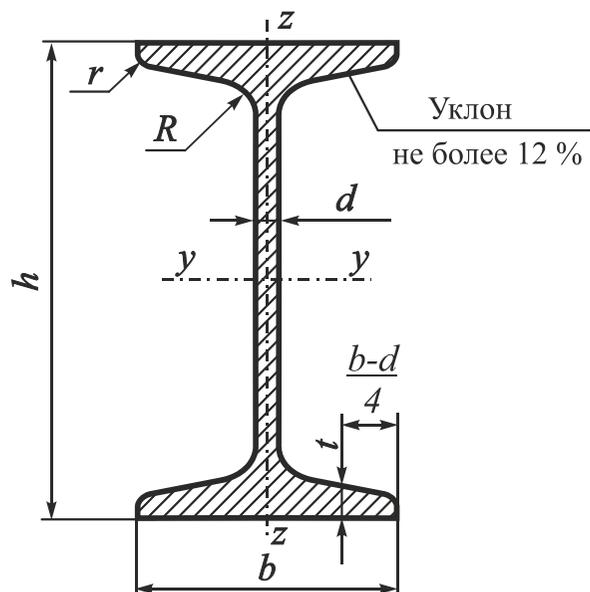
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
$h$	6	6	3	9	9	6	6	9
$b$	6	3	6	6	9	9	12	12
$d$	4	5	4	5	8	7	8	9

**Сортамент горячекатаной стали.  
Балки двутавровые. ГОСТ 8239-89**

70



Примечания:

1. Площадь поперечного сечения и масса 1 м двутавра вычислены по номинальным размерам; плотность стали принята равной  $7,85 \text{ г/см}^3$ .
2. Величины радиусов закругления, уклона внутренних граней полков, толщины полков, указанные на рисунке и в табл. П.1, приведены для построения калибров и на готовом прокате не контролируются.

3. В таблице использованы обозначения:

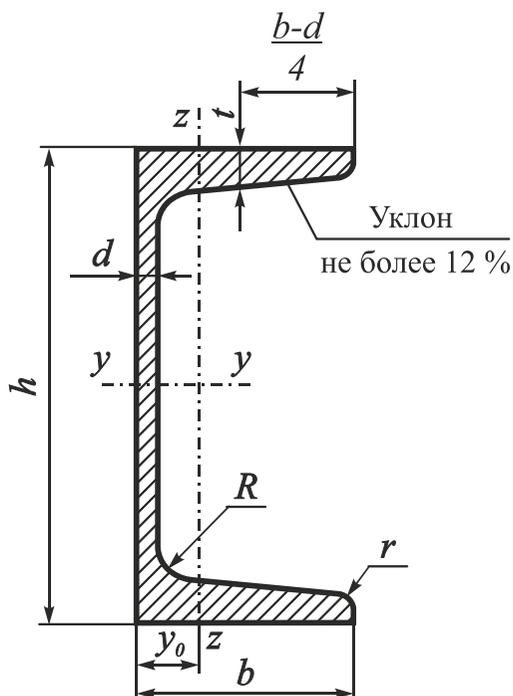
- h*** – высота балки;
- b*** – ширина полки;
- d*** – толщина стенки;
- t*** – средняя толщина полки;
- R*** – радиус внутреннего закругления;
- F*** – площадь поперечного сечения;
- r*** – радиус закругления полки;
- I*** – момент инерции;
- W*** – момент сопротивления;
- S*** – статический момент полусечения;
- i*** – радиус инерции.

4. Двутавры от № 24 до № 60 не рекомендуется применять в новых разработках.

Таблица П.1.1

Номер	Размеры, мм						$F$ , см <sup>2</sup>	Масса $1 м$ , кг	Справочные данные для осей						
	$h$	$b$	$d$	$t$	$R$	$r$			$y - y$				$z - z$		
									$I_y$ , см <sup>4</sup>	$W_y$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см	$S_y$ , см <sup>3</sup>	$I_z$ , см <sup>4</sup>	$W_z$ , см <sup>3</sup>	$i_z$ , см
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	11,5	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	13,7	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	15,9	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,4	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	9,0	3,5	25,4	19,9	1430	159,0	7,51	89,8	114,0	22,8	2,12
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,0	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,1	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	9,5	4,0	28,9	22,7	2030	203,0	8,37	114,0	155,0	28,2	2,32
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,0	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,6	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	10,0	4,0	32,8	25,8	2790	254,0	9,22	143,0	206,0	34,3	2,50
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,3	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,5	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	10,5	4,0	37,5	29,4	3800	317,0	10,10	178,0	260,0	41,6	2,63
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,5	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,5	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	11,0	4,5	43,2	33,9	5500	407,0	11,30	229,0	337,0	50,0	2,80
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	36,5	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,9	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	12,0	5,0	49,9	39,2	7780	518,0	12,50	292,0	436,0	60,1	2,95
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,2	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	48,6	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,1	2,89
40	400	155	8,5	13,0	15,0	6,0	72,6	57,0	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,1	3,03
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	66,5	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,0	3,09
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	78,5	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,0	3,23
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	92,6	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,0	3,39
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	108,0	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,0	3,54

**Сортамент горячекатаной стали.  
Швеллеры с уклоном внутренних граней полок. ГОСТ 8240-89**



Примечания:

1. Площадь поперечного сечения и масса 1 м швеллера вычислены по номинальным размерам; плотность стали принята равной  $7,85 \text{ г/см}^3$ .
2. Величины радиусов закругления, уклона внутренних граней полок, толщины полок, указанные на рисунке и в табл. П.2, приведены для построения калибров и на готовом прокате не контролируются.

3. В таблице использованы обозначения:

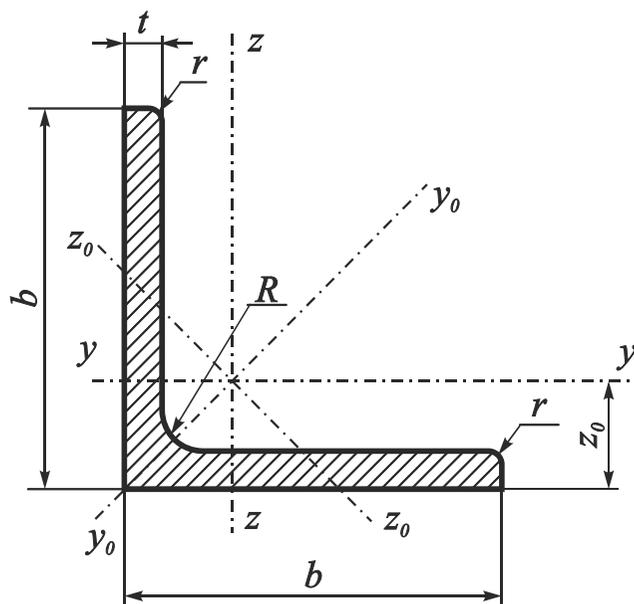
- h*** – высота балки;
- b*** – ширина полки;
- d*** – толщина стенки;
- t*** – средняя толщина полки;
- R*** – радиус внутреннего закругления;
- r*** – радиус закругления полки;
- F*** – площадь поперечного сечения;
- I*** – момент инерции;
- W*** – момент сопротивления;
- i*** – радиус инерции;
- S*** – статический момент полусечения;
- y<sub>0</sub>*** – расстояние от оси ***z – z*** до наружной грани стенки

Таблица П.2.1

Номер	Размеры, мм						F, см <sup>2</sup>	Масса 1 м, кг	Справочные данные для осей							У <sub>0</sub> , см
	h	b	d	t	R	r			y – y				z – z			
									I <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> , см	S <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	I <sub>z</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>z</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>z</sub> , см	
5	50	32	4,4	7,0	6,0	2,5	6,16	4,84	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	6,0	2,5	7,51	5,90	48,6	15,0	2,54	9,0	8,7	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	7,0	3,0	10,9	8,59	174,0	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	7,5	3,0	13,3	10,4	304,0	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	8,0	3,0	15,6	12,3	491,0	70,2	5,6	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	140	62	4,9	8,7	8,0	3,0	17,0	13,3	545,0	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,1	14,2	747,0	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8
16a	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,5	15,3	823,0	103,0	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,0
18	180	70	5,1	8,7	9,0	3,5	20,7	16,3	1090,0	121,0	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	9,0	3,5	22,2	17,4	1190,0	132,0	7,32	76,1	105,0	20,0	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	9,5	4,0	23,4	18,4	1520,0	152,0	8,07	87,8	113,0	20,5	2,20	2,07
20a	200	80	5,2	9,7	9,5	4,0	25,2	19,8	1670,0	167,0	8,15	95,9	139,0	24,2	2,35	2,28
22	220	82	5,4	9,5	10,0	4,0	26,7	21,0	2110,0	192,0	8,89	110,0	151,0	25,1	2,37	2,21
22a	220	87	5,4	10,2	10,0	4,0	28,8	22,6	2330,0	212,0	8,99	121,0	187,0	30,0	2,55	2,46
24	240	90	5,6	10,0	10,5	4,0	30,6	24,0	2900,0	242,0	9,73	139,0	208,0	31,6	2,6	2,42
24a	240	95	5,6	10,7	10,5	4,0	32,9	25,8	3180,0	265,0	9,84	151,0	254,0	37,2	2,78	2,67
27	270	95	6,0	10,5	11,0	4,5	35,2	27,7	4160,0	308,0	10,9	178,0	262,0	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	12,0	5,0	40,5	31,8	5810,0	387,0	12,0	224,0	327,0	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	13,0	5,0	46,5	36,5	7980,0	484,0	13,1	281,0	410,0	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	14,0	6,0	53,4	41,9	10820,0	601,0	14,2	350,0	513,0	61,7	3,1	2,68
40	400	115	8,0	13,5	15,0	6,0	61,5	48,3	15220,0	761,0	15,7	444,0	642,0	73,4	3,23	2,75

**Сортамент горячекатаной стали.  
Сталь прокатная угловая равнополочная. ГОСТ 8509-93**

74



Примечания:

1. Площадь поперечного сечения и масса 1 м уголка вычислены по номинальным размерам; плотность стали принята равной  $7,85 \text{ г/см}^3$ .
2. Величины радиусов закругления, уклона внутренних граней полок, толщины полок, указанные на рисунке и в табл. П.3, приведены для построения калибров и на готовом прокате не контролируются.
3. В таблицах использованы обозначения:
  - $b$  – ширина полки;
  - $t$  – толщина полки;
  - $R$  – радиус внутреннего закругления;
  - $r$  – радиус закругления полки;
  - $F$  – площадь поперечного сечения;
  - $I$  – момент инерции;
  - $W$  – момент сопротивления;
  - $i$  – радиус инерции;
  - $z_0$  – расстояние от центра тяжести до наружной грани полки.

Таблица П.3.1

Номер	Размеры, мм				F, см <sup>2</sup>	Масса 1 м, кг	Справочные данные для осей									I <sub>yz</sub> , см <sup>4</sup>	z <sub>0</sub> , см
							y – y			y <sub>0</sub> – y <sub>0</sub>		z <sub>0</sub> – z <sub>0</sub>					
	b	t	R	r			I <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> , см	I <sub>y0max</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>y0max</sub> , см	I <sub>z0min</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>z</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>z0min</sub> , см			
2	20	3	3,5	1,2	1,13	0,89	0,40	0,28	0,59	0,63	0,75	0,17	0,20	0,39	0,23	0,60	
		4			1,46	1,15	0,50	0,37	0,58	0,78	0,73	0,22	0,24	0,38	0,28	0,64	
2,5	25	3	3,5	1,2	1,43	1,12	0,81	0,46	0,75	1,29	0,95	0,34	0,33	0,49	0,47	0,73	
		4			1,86	1,46	1,03	0,59	0,74	1,62	0,93	0,44	0,41	0,48	0,59	0,76	
2,8	28	3	4,0	1,3	1,62	1,27	1,16	0,58	0,85	1,84	1,07	0,48	0,42	0,55	0,68	0,80	
3	30	3	4,0	1,3	1,74	1,36	1,45	0,67	0,91	2,30	1,15	0,60	0,53	0,59	0,85	0,85	
		4			2,27	1,78	1,84	0,87	0,80	2,92	1,13	0,77	0,61	0,58	1,08	0,89	
3,2	32	3	4,5	1,5	1,86	1,46	1,77	0,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,59	0,63	1,03	0,89	
		4			2,43	1,91	2,26	1,00	0,96	3,58	1,21	0,94	0,71	0,62	1,32	0,94	
3,5	35	3	4,5	1,5	2,04	1,60	2,35	0,93	1,07	3,72	1,35	0,97	0,71	0,69	1,37	0,97	
		4			2,17	2,10	3,01	1,21	1,06	4,76	1,33	1,25	0,88	0,68	1,75	1,01	
		5			3,28	2,58	3,61	1,47	1,05	5,71	1,32	1,52	1,02	0,68	2,10	1,05	
4	40	3	5,0	1,7	2,35	1,85	3,55	1,22	1,23	5,63	1,55	1,47	0,95	0,79	2,08	1,09	
		4			3,08	2,42	4,58	1,60	1,22	7,26	1,53	1,90	1,19	0,78	2,68	1,13	
		5			3,79	2,98	5,53	1,95	1,21	8,75	1,52	2,30	1,39	0,78	3,22	1,17	
4,5	45	3	5,0	1,7	2,65	2,08	5,13	1,56	1,39	8,13	1,75	2,12	1,24	0,89	3,00	1,21	
		4			3,48	2,73	6,63	2,04	1,38	10,52	1,74	2,74	1,54	0,89	3,89	1,26	
		5			4,29	3,37	8,03	2,51	1,37	12,74	1,72	3,33	1,81	0,88	4,71	1,30	
5	50	3	5,5	1,8	2,96	2,32	7,11	1,94	1,55	11,27	1,95	2,95	1,57	1,00	4,16	1,33	
		4			3,89	3,05	9,21	2,54	1,54	14,63	1,94	3,80	1,95	0,99	5,42	1,38	
		5			4,80	3,77	11,20	3,13	1,53	17,77	1,92	4,63	2,30	0,98	6,57	1,42	
		6			5,69	4,47	13,07	3,69	1,52	20,72	1,91	5,43	2,63	0,98	7,65	1,46	
5,6	56	4	6,0	2,0	4,38	3,44	13,10	3,21	1,73	20,79	2,18	5,41	2,52	1,11	7,69	1,52	
		5			5,41	4,25	15,97	3,96	1,72	25,36	2,16	6,59	2,97	1,10	9,41	1,57	

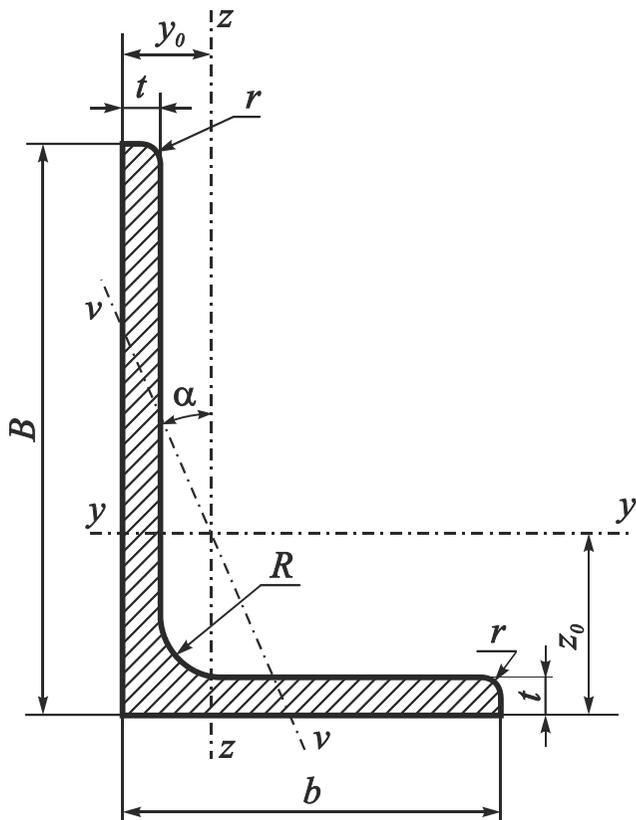
Номер	Размеры, мм				F, см <sup>2</sup>	Масса 1 м, кг	Справочные данные для осей									I <sub>yz</sub> , см <sup>4</sup>	z <sub>0</sub> , см
	b	t	R	r			y – y			y <sub>0</sub> – y <sub>0</sub>		z <sub>0</sub> – z <sub>0</sub>					
							I <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> , см	I <sub>y<sub>0</sub>max</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>y<sub>0</sub>max</sub> , см	I <sub>z<sub>0</sub>min</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>z</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>z<sub>0</sub>min</sub> , см			
6	60	4	7,0	2,3	4,72	3,71	16,21	3,70	1,85	25,69	2,33	6,72	2,93	1,19	9,48	1,62	
		5			5,83	4,58	19,79	4,56	1,84	31,40	2,32	8,18	3,49	1,18	11,61	1,66	
		6			6,92	5,43	23,21	5,40	1,83	36,81	2,31	9,60	3,99	1,18	13,60	1,70	
		8			9,40	7,10	29,55	7,00	1,81	46,77	2,27	12,34	4,90	1,17	17,22	1,78	
		10			11,08	8,70	35,32	8,52	1,79	55,64	2,24	15,00	5,70	1,16	20,32	1,85	
6,3	63	4	7,0	2,3	4,69	3,90	18,86	4,09	1,95	29,90	2,45	7,81	3,26	1,25	11,00	1,69	
		5			6,13	4,81	23,10	5,05	1,94	36,80	2,44	9,52	3,87	1,25	13,70	1,74	
		6			7,28	5,72	27,06	5,98	1,93	42,91	2,43	11,18	4,44	1,24	15,90	1,78	
7	70	4,5	8,0	2,7	6,20	4,87	29,04	5,67	2,16	46,03	2,72	12,04	4,53	1,39	17,00	1,88	
		5			6,86	5,38	31,94	6,27	2,16	50,67	2,72	13,22	4,92	1,39	18,70	1,90	
		6			8,15	6,39	37,58	7,43	2,15	59,64	2,71	15,52	5,66	1,38	22,10	1,94	
		7			9,42	7,39	42,98	8,57	2,14	68,19	2,69	17,77	6,31	1,37	25,20	1,99	
		8			10,67	8,37	48,16	9,68	2,12	76,35	2,68	19,97	6,99	1,37	28,20	2,02	
7,5	75	5	9,0	3,0	7,39	5,80	39,53	7,21	2,31	62,65	2,91	16,41	5,74	1,49	23,10	2,02	
		6			8,78	6,89	46,57	8,57	2,30	73,87	2,90	19,28	6,62	1,48	27,30	2,06	
		7			10,15	7,96	53,34	9,89	2,29	84,61	2,89	22,07	7,43	1,47	31,20	2,10	
		8			11,50	9,02	59,84	11,18	2,28	94,89	2,87	24,80	8,16	1,47	35,00	2,15	
		9			12,83	10,07	66,10	12,43	2,27	104,72	2,86	27,48	8,91	1,46	38,60	2,188	
8	80	5,5	9,0	3,0	8,63	6,78	52,68	9,03	2,47	83,56	3,11	21,80	7,10	1,59	30,90	2,17	
		6			9,38	7,36	56,97	9,80	2,47	90,40	3,11	23,54	7,60	1,58	33,40	2,19	
		7			10,85	8,51	65,31	11,32	2,45	103,60	3,09	26,97	8,55	1,58	38,30	2,23	
		8			12,30	9,65	73,36	12,80	2,44	116,39	3,08	30,32	9,44	1,57	43,00	2,27	

Номер	Размеры, мм				F, см <sup>2</sup>	Масса 1 м, кг	Справочные данные для осей									I <sub>yz</sub> , см <sup>4</sup>	z <sub>0</sub> , см
	b	t	R	r			y – y			y <sub>0</sub> – y <sub>0</sub>		z <sub>0</sub> – z <sub>0</sub>					
							I <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> , см	I <sub>y0max</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>y0max</sub> , см	I <sub>z0min</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>z</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>z0min</sub> , см			
9	90	6	10,0	3,3	10,61	8,33	82,10	12,49	2,78	130,00	3,50	33,97	9,88	1,79	48,10	2,43	
		7			12,28	9,64	94,30	14,45	2,77	149,67	3,49	38,94	11,15	1,78	55,40	2,47	
		8			13,93	10,93	106,11	16,36	2,76	168,42	3,48	43,80	12,34	1,77	62,30	2,51	
		9			15,60	12,20	118,00	18,29	2,75	186,00	3,46	48,60	13,48	1,77	68,00	2,55	
10	100	6,5	12,0	4,0	12,82	10,06	122,10	16,69	3,09	193,46	3,89	50,73	13,38	1,99	71,40	2,68	
		7			13,75	10,79	130,59	17,90	3,08	207,01	3,88	54,16	14,13	1,98	76,40	2,71	
		8			15,60	12,25	147,19	20,30	3,07	233,46	3,87	60,92	15,66	1,98	86,30	2,75	
		10			19,24	15,10	178,95	24,97	3,05	283,83	3,84	74,08	18,51	1,96	110,00	2,83	
		12			22,80	17,90	208,90	29,47	3,03	330,95	3,81	86,84	21,10	1,95	122,00	2,91	
		14			26,28	20,63	237,15	33,83	3,00	374,98	3,78	99,32	23,49	1,94	138,00	2,99	
11	110	7	12,0	4,0	15,15	11,89	175,61	21,83	3,40	278,54	4,29	72,68	17,36	2,19	106,00	2,96	
		8			17,20	13,50	198,17	24,77	3,39	314,51	4,28	81,83	19,29	2,18	116,00	3,00	
12,5	125	8	14,0	4,6	19,69	15,46	294,36	32,20	3,87	466,76	4,87	121,98	25,67	2,49	172,00	3,36	
		9			22,00	17,30	327,48	36,00	3,86	520,00	4,86	135,88	28,26	2,48	192,00	3,40	
		10			24,33	19,10	359,82	39,74	3,85	571,04	4,84	148,59	30,45	2,47	211,00	3,45	
		12			28,89	22,68	422,23	47,06	3,82	670,02	4,82	174,43	34,94	2,46	248,00	3,53	
		14			33,37	26,20	481,76	54,17	3,80	763,90	4,78	199,62	39,10	2,45	282,00	3,61	
		16			37,77	29,65	538,56	61,09	3,78	852,84	4,75	224,29	43,10	2,44	315,00	3,68	
14	140	9	14,0	4,6	24,72	19,41	465,72	45,55	4,34	739,42	5,47	192,03	35,92	2,79	274,00	3,78	
		10			27,33	21,45	512,29	50,32	4,33	813,62	5,46	210,96	39,05	2,78	301,00	3,82	
		12			32,49	25,50	602,49	59,66	4,31	956,98	5,43	248,01	44,97	2,76	354,00	3,90	

Номер	Размеры, мм				F, см <sup>2</sup>	Масса 1 м, кг	Справочные данные для осей									I <sub>yz</sub> , см <sup>4</sup>	z <sub>0</sub> , см
	b	t	R	r			y – y			y <sub>0</sub> – y <sub>0</sub>		z <sub>0</sub> – z <sub>0</sub>					
							I <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> , см	I <sub>y0max</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>y0max</sub> , см	I <sub>z0min</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>z</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>z0min</sub> , см			
16	160	10	16,0	5,3	31,43	24,67	774,24	66,19	4,96	1229,10	6,25	319,38	52,52	3,19	455,00	4,30	
		11			34,42	27,02	844,21	72,44	4,95	1340,06	6,24	347,77	56,53	3,18	496,00	4,35	
		12			37,39	28,35	912,89	78,62	4,94	1450,00	6,23	375,78	60,53	3,17	537,00	4,39	
		14			43,57	33,97	1046,47	90,77	4,92	1662,13	6,20	430,81	68,15	3,16	615,00	4,47	
		16			49,07	38,52	1175,19	102,64	4,89	1865,73	6,17	484,64	75,92	3,14	690,00	4,55	
		18			54,79	43,01	1290,24	114,24	4,87	2061,03	6,13	537,46	82,08	3,13	771,00	4,63	
		20			60,40	47,44	1418,85	125,60	4,85	2248,26	6,10	589,43	90,02	3,12	830,00	4,70	
18	180	11	16,0	5,3	38,80	30,47	1216,44	92,47	5,60	1933,10	7,06	499,78	72,86	3,59	716,00	4,85	
		12			42,19	33,12	1316,62	100,41	5,59	2092,78	7,04	540,45	78,15	3,58	776,00	4,89	
20	200	12	18,0	6,0	47,10	36,97	1822,78	124,61	6,22	2896,16	7,84	749,40	98,68	3,99	1073,00	5,37	
		13			50,85	39,92	1960,77	134,44	6,21	3116,18	7,83	805,35	105,07	3,98	1156,00	5,42	
		14			54,60	42,80	2097,00	144,17	6,20	3333,00	7,81	861,00	111,50	3,97	1236,00	5,46	
		16			61,98	48,65	2362,57	163,37	6,17	3755,39	7,78	969,74	123,77	3,96	1393,00	5,54	
		20			76,54	60,08	2871,47	200,73	6,12	4560,42	7,72	1181,92	146,62	3,93	1689,00	5,70	
		25			94,29	74,02	3466,21	245,59	6,06	5494,04	7,63	1438,38	172,68	3,91	2028,00	5,89	
22	220	14	21,0	7,0	60,38	47,40	2814,36	175,18	6,83	4470,15	8,60	1158,56	138,62	4,38	1655,00	5,91	
		16			68,58	53,83	3175,44	198,71	6,80	5045,37	8,58	1305,52	153,34	4,36	1869,00	5,83	
25	250	16	24,0	8,0	78,40	61,55	4717,10	258,43	7,76	7492,10	9,78	1942,09	203,45	4,98	2775,00	6,75	
		18			87,72	68,86	5247,24	288,82	7,73	8336,69	9,75	2157,78	233,39	4,96	3089,00	6,83	
		20			96,96	76,11	5764,87	318,76	7,71	9159,73	9,72	2370,01	242,52	4,94	3395,00	6,91	
		22			106,12	83,31	6270,32	348,26	7,69	9961,60	9,69	2579,04	260,52	4,93	3691,00	7,00	
		25			119,71	93,97	7006,39	391,72	7,65	11125,52	9,64	2887,26	287,14	4,91	4119,00	7,11	
		28			133,12	104,50	7713,86	434,25	7,61	12243,84	9,59	3189,89	311,98	4,90	4527,00	7,23	
		30			141,96	111,44	8176,52	462,11	7,59	12964,66	9,56	3388,98	327,82	4,89	4788,00	7,31	

**Сортамент горячекатаной стали.  
Сталь прокатная угловая неравнополочная. ГОСТ 8510-86**

6/9



Примечания:

1. Площадь поперечного сечения и масса 1 м уголка вычислены по номинальным размерам; плотность стали принята равной  $7,85 \text{ г/см}^3$ .
2. Величины радиусов закругления, уклона внутренних граней полок, толщины полок, указанные на рисунке и в табл. П.4, приведены для построения калибров и на готовом прокате не контролируются.
3. В таблицах использованы обозначения:  
 **$B, b$**  – ширина большей и меньшей полки;  
 **$t$**  – толщина полки;  
 **$R$**  – радиус внутреннего закругления;  
 **$r$**  – радиус закругления полки;  
 **$F$**  – площадь поперечного сечения;  
 **$I$**  – момент инерции;  
 **$W$**  – момент сопротивления;  
 **$i$**  – радиус инерции;  
 **$z_0, y_0$**  – расстояние от центра тяжести до наружных граней полок;  
 **$\text{tg } \alpha$**  – угол наклона оси.

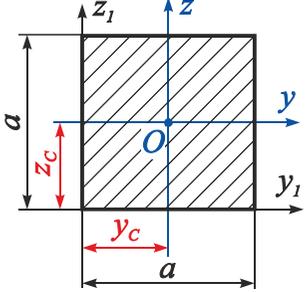
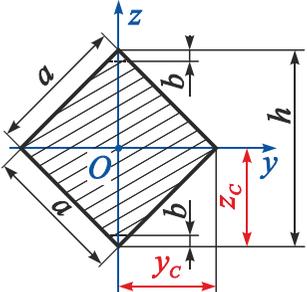
Таблица П.4.1

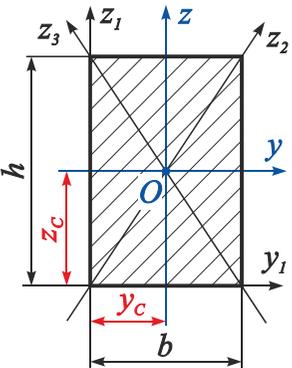
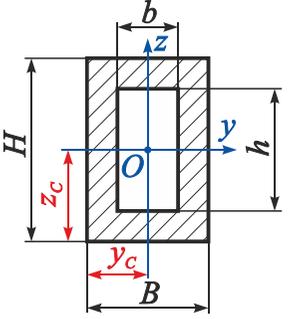
Номер уголка	Размеры, мм					F, см <sup>2</sup>	Масса 1 м, кг	Справочные данные для осей									y <sub>0</sub> , см	z <sub>0</sub> , см	I <sub>yz</sub> , см <sup>4</sup>	tg α
	B	b	t	R	r			y – y			z – z			v – v						
								I <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> , см	I <sub>z</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>z</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>z</sub> , см	I <sub>v min</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>v</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>v min</sub> , см				
2,5/1,6	25	16	3	3,5	1,2	1,16	0,91	0,70	0,43	0,78	0,22	0,19	0,44	0,13	0,16	0,34	0,42	0,86	0,22	0,392
3,2/2	32	20	3	3,5	1,2	1,49	1,17	1,52	0,72	1,01	0,46	0,30	0,55	0,28	0,25	0,43	0,49	1,08	0,47	0,382
			4			1,94	1,52	1,93	0,93	1,00	0,57	0,39	0,54	0,35	0,33	0,43	0,53	1,12	0,59	0,374
4/2,5	40	25	3	4,0	1,3	1,89	1,48	3,06	1,14	1,27	0,93	0,49	0,70	0,56	0,41	0,54	0,59	1,32	0,96	0,385
			4			2,47	1,94	3,93	1,49	1,26	1,18	0,63	0,69	0,71	0,52	0,54	0,63	1,37	1,22	0,281
			5			3,03	2,37	4,73	1,82	1,25	1,41	0,77	0,68	0,86	0,64	0,53	0,66	1,41	1,44	0,374
4,5/2,8	45	28	3	5,0	1,7	2,14	1,68	4,41	1,45	1,48	1,32	0,61	0,79	0,79	0,52	0,61	0,64	1,47	1,38	0,382
			4			2,80	2,20	5,68	1,90	1,42	1,69	0,80	0,78	1,02	0,67	0,60	0,68	1,51	1,77	0,379
5/3,2	50	32	3	5,5	1,8	2,42	1,90	6,18	1,82	1,60	1,99	0,81	0,91	1,18	0,68	0,70	0,72	1,60	2,01	0,403
			4			3,17	2,40	7,98	2,38	1,59	2,56	1,05	0,90	1,52	0,88	0,69	0,76	1,65	2,59	0,401
5,6/3,6	56	36	4	6,0	2,0	3,58	2,81	11,37	3,01	1,78	3,70	1,34	1,02	2,19	1,13	0,78	0,84	1,82	3,74	0,406
			5			4,41	3,46	13,82	3,70	1,77	4,48	1,65	1,01	2,65	1,37	0,78	0,88	1,87	4,50	0,404
6,3/4	63	40	4	7,0	2,3	4,04	3,17	16,33	3,83	2,01	5,16	1,67	1,13	3,07	1,41	0,87	0,91	2,03	5,25	0,397
			5			4,98	3,91	19,91	4,72	2,00	6,26	2,05	1,12	3,73	1,72	0,86	0,95	2,08	6,41	0,396
			6			5,90	4,63	23,31	5,58	1,99	7,29	2,42	1,11	4,36	2,02	0,86	0,99	2,12	7,44	0,393
			8			7,68	6,03	29,60	7,22	1,96	9,15	3,12	1,09	5,58	2,60	0,85	1,07	2,20	9,27	0,386
7/4,5	70	45	5	7,5	2,5	5,59	4,39	27,76	5,88	2,23	9,05	2,62	1,27	5,34	2,20	0,98	1,05	2,28	9,12	0,406
7,5/5	75	50	5	8,0	2,7	6,11	4,79	34,81	6,81	2,39	12,47	3,25	1,43	7,24	2,73	1,09	1,17	2,39	12,00	0,436
			6			7,25	5,69	40,92	8,08	2,38	14,60	3,85	1,42	8,48	3,21	1,08	1,21	2,44	14,10	0,435
			8			9,47	7,43	52,38	10,52	2,35	18,52	4,88	1,40	10,87	4,14	1,07	1,29	2,52	17,80	0,430
8/5	80	50	5	8,0	2,7	6,36	4,49	41,64	7,71	2,56	12,68	3,28	1,41	7,57	2,75	1,00	1,13	2,60	13,20	0,387
			6			7,55	5,92	48,98	9,15	2,55	14,85	3,88	1,40	8,88	3,24	1,08	1,17	2,65	15,50	0,386

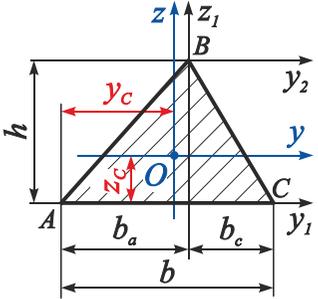
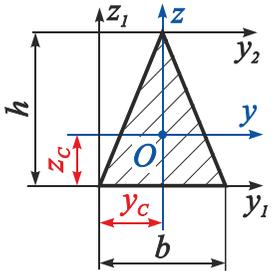
Номер уголка	Размеры, мм					F, см <sup>2</sup>	Масса 1 м, кг	Справочные данные для осей									y <sub>0</sub> , см	z <sub>0</sub> , см	I <sub>yz</sub> , см <sup>4</sup>	tg α
	B	b	t	R	r			y – y			z – z			v – v						
								I <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> , см	I <sub>z</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>z</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>z</sub> , см	I <sub>v min</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>v</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>v min</sub> , см				
9/5,6	90	56	5,5	9,0	3,0	7,86	6,17	65,28	10,74	2,88	19,67	4,53	1,58	11,77	3,81	1,22	1,26	2,92	20,54	0,384
			6			8,54	6,70	70,58	11,66	2,88	21,22	4,91	1,58	12,70	4,12	1,22	1,28	2,95	22,23	0,384
			8			11,18	8,77	90,87	15,24	2,85	27,08	6,39	1,56	16,29	5,32	1,21	1,36	3,04	28,33	0,380
10/6,3	100	63	6	10,0	3,3	9,58	7,53	98,29	14,52	3,20	30,58	6,27	1,79	18,20	5,27	1,38	1,42	3,23	31,50	0,393
			7			11,09	8,70	112,86	16,78	3,19	34,99	7,23	1,78	20,83	6,06	1,37	1,46	3,28	36,10	0,392
			8			12,57	9,87	126,96	19,01	3,18	39,21	8,17	1,77	23,38	6,82	1,36	1,50	3,32	40,50	0,391
			10			15,47	12,14	153,95	23,32	3,15	47,18	9,99	1,75	28,34	8,31	1,35	1,58	3,40	48,60	0,387
11/7	110	70	6,5	10,0	3,3	11,45	8,98	142,42	19,11	3,53	45,61	8,42	2,00	26,94	7,05	1,53	1,58	3,55	46,80	0,402
			8			13,93	10,93	171,54	23,22	3,51	54,64	10,20	1,98	32,31	8,50	1,52	1,64	3,61	55,90	0,400
12,5/8	125	80	7	11,0	3,7	14,06	11,04	226,53	26,67	4,01	73,73	11,89	2,29	43,40	9,96	1,76	1,80	4,01	74,70	0,407
			8			15,98	12,58	225,98	30,26	4,00	80,95	13,47	2,28	48,82	11,25	1,75	1,84	4,05	84,10	0,406
			10			19,70	15,47	311,61	37,27	3,98	100,47	16,52	2,26	59,33	13,74	1,74	1,92	4,14	102,00	0,404
			12			23,36	18,34	364,79	44,07	3,95	116,84	19,46	2,24	69,47	16,11	1,72	2,00	4,22	118,00	0,400
14/9	140	90	8	12,0	4,0	18,00	14,13	363,68	38,25	4,49	119,79	17,19	2,58	70,27	14,39	1,58	2,03	4,49	121,00	0,411
			10			22,24	17,46	444,45	47,19	4,47	145,54	21,14	2,58	85,51	17,58	1,96	2,12	4,58	147,00	0,409
16/10	160	100	9	13,0	4,3	22,87	17,96	605,97	56,04	5,15	186,03	23,96	2,85	110,40	20,01	2,20	2,24	5,19	194,00	0,391
			10			25,28	19,85	666,59	61,91	5,13	204,09	26,42	2,84	121,16	22,02	2,19	2,28	5,23	213,00	0,390
			12			30,04	23,58	784,22	73,42	5,11	238,75	31,23	2,82	142,14	25,93	2,18	2,36	5,32	249,00	0,388
			14			34,72	27,26	897,19	84,65	5,08	271,60	35,89	2,80	162,49	29,75	2,16	2,43	5,40	282,00	0,385
18/11	180	110	10	14	4,7	28,33	22,20	952,28	78,59	5,80	276,37	32,27	3,12	165,44	26,96	2,42	2,44	5,88	295,00	0,376
			12			33,69	26,40	1122,56	93,33	5,77	324,09	38,20	3,10	194,28	31,83	2,40	2,52	5,97	348,00	0,374
20/12,5	200	125	11	14,0	4,7	34,87	27,37	1449,02	107,31	6,45	446,36	45,98	3,58	263,84	38,27	2,75	2,79	6,50	465,00	0,392
			12			37,89	29,74	1568,19	116,51	6,43	481,93	49,85	3,57	285,04	41,45	2,74	2,83	6,54	503,00	0,392
			14			43,87	34,43	1800,83	134,64	6,41	550,77	57,43	3,54	326,54	47,57	2,73	2,91	6,62	575,00	0,390
			16			49,77	39,07	2026,08	152,41	6,38	616,66	64,83	3,52	366,99	53,56	2,72	2,99	6,71	643,00	0,388

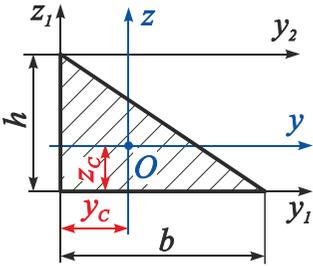
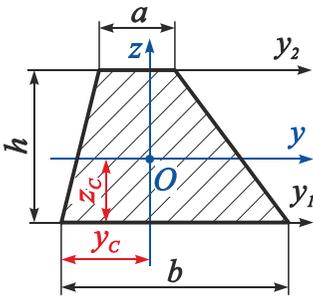
Геометрические характеристики плоских фигур

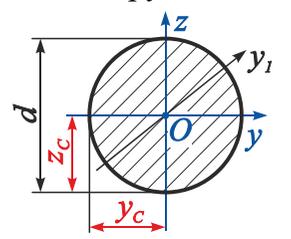
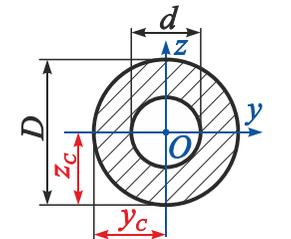
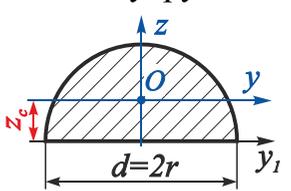
Таблица П.5.1

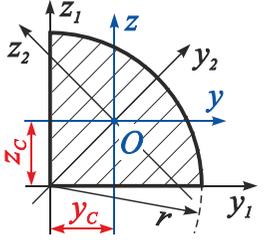
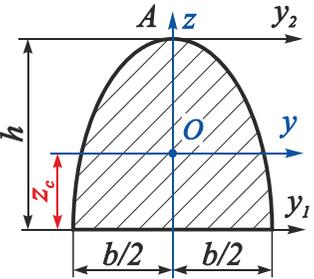
Форма поперечного сечения	Площадь сечения	Положение центра тяжести	Моменты инерции	Моменты сопротивления	Радиусы инерции
<p>Квадрат</p>  <p>Оси <math>y</math> и <math>z</math> – главные центральные</p>	$F = a^2$	$y_c = z_c = \frac{a}{2}$	$I_y = I_z = \frac{a^4}{12}; \quad I_{yz} = 0;$ $I_{y_1} = I_{z_1} = \frac{a^4}{3}; \quad I_{y_1 z_1} = \frac{a^4}{4};$ $I_{\rho O} = \frac{a^4}{6}; \quad I_K = 0,1406a^4$	$W_y = W_z = \frac{a^3}{6};$ $W_K = 0,208a^3$	$i_x = i_y = \frac{a}{\sqrt{12}} =$ $= 0,289a$
<p>Квадрат, поставленный на ребро</p>  <p>Оси <math>y</math> и <math>z</math> – главные центральные</p>	$F = a^2$	$y_c = z_c = \frac{h}{2} =$ $= \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}} =$ $= 0,71a$	$I_y = I_z = \frac{a^4}{12} = \frac{h^4}{48};$ $I_{yz} = 0$	$W_y = W_z = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$ При срезе верхнего и нижнего углов на $b = \frac{1}{18} h$ $W_y$ достигает максимума: $W_{y_{срез}} = 0,124a^3 =$ $= 0,044h^3$	$i_x = i_y = \frac{a}{\sqrt{12}} =$ $= 0,289a$

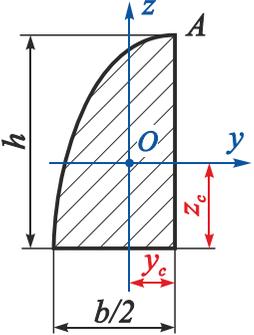
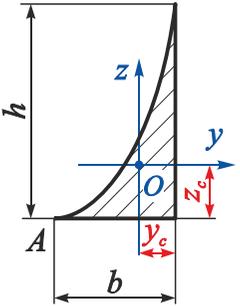
Форма поперечного сечения	Площадь сечения	Положение центра тяжести	Моменты инерции	Моменты сопротивления	Радиусы инерции
<p>Прямоугольник</p>  <p>Оси <math>y</math> и <math>z</math> – главные центральные</p>	$F = bh$	$y_c = \frac{b}{2};$  $z_c = \frac{h}{2}$	$I_y = \frac{bh^3}{12}; \quad I_z = \frac{hb^3}{12}; \quad I_{yz} = 0;$  $I_{y_1} = \frac{bh^3}{3}; \quad I_{z_1} = \frac{hb^3}{3};$  $I_{y_1z_1} = \frac{b^2h^2}{4};$  $I_{\rho O} = \frac{bh}{12}(b^2 + h^2);$  $I_{z_2} = I_{z_3} = \frac{b^3h^3}{6(b^2 + h^2)}$	$W_y = \frac{bh^3}{6};$  $W_z = \frac{hb^3}{6}$	$i_y = 0,289h;$  $i_z = 0,289b$
<p>Полый прямоугольник</p>  <p>Оси <math>y</math> и <math>z</math> – главные центральные</p>	$F = BH - bh$	$y_c = \frac{B}{2};$  $z_c = \frac{H}{2}$	$I_y = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12};$  $I_z = \frac{HB^3}{12} - \frac{hb^3}{12};$  $I_{yz} = 0;$  $I_{\rho O} = I_y + I_z$	$W_y = \frac{BH^3 - bh^3}{6H};$  $W_z = \frac{HB^3 - hb^3}{6B}$	$i_y = \sqrt{\frac{BH^3 - bh^3}{12(BH - bh)}};$  $i_z = \sqrt{\frac{HB^3 - hb^3}{12(BH - bh)}}$

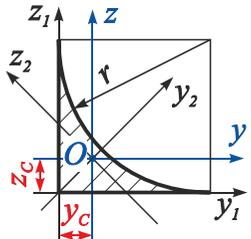
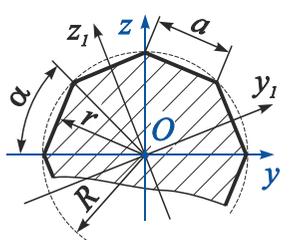
Форма поперечного сечения	Площадь сечения	Положение центра тяжести	Моменты инерции	Моменты сопротивления	Радиусы инерции
<p>Треугольник</p>  <p>Оси <math>y</math> и <math>z</math> – центральные</p>	$F = \frac{bh}{2}$	$y_c = \frac{b + b_a}{3};$ $z_c = \frac{h}{3}$	$I_y = \frac{bh^3}{36}; \quad I_z = \frac{bh}{36}(b^2 - b_a b_c);$ $I_{yz} = \frac{bh^2}{72}(b - 2b_c);$ $I_{y_1} = \frac{bh^3}{12}; \quad I_{y_2} = \frac{bh^3}{4};$ $I_{z_1} = \frac{h}{12}(b_a^3 + b_c^3);$ $I_{y_1 z_1} = \frac{bh^2}{24}(3b - 2b_c);$ $I_{\rho_o} = \frac{bh}{36}(h^2 + b_a^2 + b_a b_c + b_c^2);$ $I_{\rho_B} = \frac{h}{12}(3bh^2 + b_a^3 + b_c^3)$	<p>Для верхних волокон</p> $W_y = \frac{bh^2}{24};$ <p>для нижних волокон</p> $W_y = \frac{hb^2}{12}$	$i_y = \frac{h}{3\sqrt{2}};$ $i_z = \frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{b^2 - b_a b_c}$
<p>Равнобедренный треугольник</p>  <p>Оси <math>y</math> и <math>z</math> – главные центральные</p>	$F = \frac{bh}{2}$	$y_c = \frac{b}{2};$ $z_c = \frac{h}{3}$	$I_y = \frac{bh^3}{36}; \quad I_z = \frac{hb^3}{48};$ $I_{yz} = 0; \quad I_{\rho_o} = \frac{bh}{12}\left(\frac{h^2}{3} + \frac{b^2}{4}\right);$ $I_{y_1} = \frac{bh^3}{12}; \quad I_{z_1} = \frac{hb^3}{12};$ $I_{y_1 z_1} = \frac{b^2 h^2}{12}; \quad I_{y_2} = \frac{bh^3}{4}$ <p>(в равностороннем треугольнике <math>h = b\sqrt{3}/2</math>)</p>	<p>Для верхних волокон</p> $W_y = \frac{bh^2}{24};$ <p>для нижних волокон</p> $W_y = \frac{hb^2}{12}$	$i_y = \frac{h}{3\sqrt{2}};$ $i_z = \frac{b}{2\sqrt{6}}$

Форма поперечного сечения	Площадь сечения	Положение центра тяжести	Моменты инерции	Моменты сопротивления	Радиусы инерции
<p>Прямоугольный треугольник</p>  <p>Оси <math>y</math> и <math>z</math> – центральные</p>	$F = \frac{bh}{2}$	$y_c = \frac{b}{3};$ $z_c = \frac{h}{3}$	$I_y = \frac{bh^3}{36}; \quad I_z = \frac{hb^3}{36};$ $I_{yz} = -\frac{b^2h^2}{72}; \quad I_{\rho O} = \frac{bh}{36}(h^2 + b^2);$ $I_{y_1} = \frac{bh^3}{12}; \quad I_{z_1} = \frac{hb^3}{12};$ $I_{yz} = \frac{b^2h^2}{24}; \quad I_{\rho O} = \frac{bh}{36}(h^2 + b^2);$ $I_{y_2} = \frac{bh^3}{4}$	<p>Для верхних волокон</p> $W_y = \frac{bh^2}{24};$ <p>для нижних волокон</p> $W_y = \frac{hb^2}{12}$	$i_y = \frac{h}{3\sqrt{2}};$ $i_z = \frac{b}{3\sqrt{2}}$
<p>Трапеция</p>  <p>Оси <math>y</math> и <math>z</math> – центральные</p>	$F = \frac{(a+b)}{2}h$	$y_c = \frac{h(2b+a)}{3(a+b)};$ $z_c = \frac{h(b+2a)}{3(a+b)}$	$I_y = \frac{h^3(b^2 + 4ab + a^2)}{36(a+b)};$ $I_{y_1} = \frac{h^3(b+3a)}{12};$ $I_{y_2} = \frac{h^3(3b+a)}{12}$	<p>Для верхних волокон</p> $W_y = \frac{h^2}{12} \times \frac{(b^2 + 4ab + a^2)}{(2b+a)};$ <p>для нижних волокон</p> $W_y = \frac{h^2}{12} \times \frac{(b^2 + 4ab + a^2)}{(b+2a)}$	$i_y = \frac{h}{6(a+b)} \times \sqrt{2(b^2 + 4ab + a^2)}$

Форма поперечного сечения	Площадь сечения	Положение центра тяжести	Моменты инерции	Моменты сопротивления	Радиусы инерции
<p>Круг</p>  <p>Оси <math>y</math> и <math>z</math> – главные центральные</p>	$F = \frac{\pi d^2}{4}$	$y_c = z_c = \frac{d}{2}$	$I_y = I_z = I_{y_1} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4};$ $I_{yz} = 0;$ $I_{\rho_o} = I_y + I_z = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi r^4}{2}$	$W_y = W_z = W_{y_1} = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi r^3}{4};$ $W_{\rho_o} = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi r^3}{2}$	$i_y = i_z = i_{y_1} = \frac{d}{4} = \frac{r}{2}$
<p>Кольцо</p>  <p>Оси <math>y</math> и <math>z</math> – главные центральные</p>	$F = \frac{\pi D^2}{4} \times (1 - \alpha^2)$ $\alpha = \frac{d}{D}$	$y_c = z_c = \frac{D}{2}$	$I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4);$ $I_{yz} = 0;$ $I_{\rho_o} = I_y + I_z = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4)$	$W_y = W_z = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4);$ $W_{\rho_o} = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4)$	$i_y = i_z = \frac{1}{4} \sqrt{D^2 + d^2} = \frac{D}{4} \sqrt{1 + \alpha^2}$
<p>Полукруг</p>  <p>Оси <math>y</math> и <math>z</math> – главные центральные</p>	$F = \frac{\pi d^2}{8} = \frac{\pi r^2}{2}$	$y_c = \frac{d}{2} = r;$ $z_c = \frac{2}{3} \cdot \frac{d}{\pi} = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}$	$I_y = \frac{d^4}{16} \left( \frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right);$ $I_{y_1} = I_z = \frac{\pi d^4}{128} = \frac{\pi r^4}{8};$ $I_{yz} = I_{y_1 z} = 0$	<p>Для верхних волокон</p> $W_y \approx 0,0239d^3;$ <p>для нижних волокон</p> $W_y \approx 0,0324d^3;$ $W_z = \frac{\pi d^3}{64} = \frac{\pi r^3}{8}$	$i_y \approx 0,132d;$ $i_z = \frac{d}{4}$

Форма поперечного сечения	Площадь сечения	Положение центра тяжести	Моменты инерции	Моменты сопротивления	Радиусы инерции
<p>Четверть круга</p>  <p>Оси <math>y_2</math> и <math>z_2</math> – главные центральные;</p>	$F = \frac{\pi r^2}{4}$	$y_c = z_c = \frac{4r}{3\pi}$	$I_{y_2 \max} \approx 0,0714r^4;$ $I_{z_2 \min} \approx 0,0384r^4;$ $I_y = I_z \approx 0,0549r^4;$ $I_{yz} = -0,0165r^4;$ $I_{y_1} = I_{z_1} = \frac{\pi r^4}{16} \approx 0,196r^4;$ $I_{y_1 z_1} = \frac{r^4}{8}$	<p>Для верхних и правых волокон</p> $W_y = W_z \approx 0,923r^3;$ <p>для нижних и левых волокон</p> $W_y = W_z \approx 1,245r^3$	$i_{y \max} \approx 0,302r;$ $i_{z \max} \approx 0,221r$
<p>Параболический сегмент</p>  <p>Оси <math>y</math> и <math>z</math> – главные центральные;  <math>A</math> – вершина параболы</p>	$F = \frac{2}{3}bh$	$z_c = \frac{2}{5}h$	$I_y = \frac{8}{175}bh^3;$ $I_{y_1} = \frac{16}{105}bh^3;$ $I_{y_2} = \frac{2}{7}bh^3;$ $I_z = \frac{1}{30}bh^3$	<p>Для верхних волокон</p> $W_y = \frac{8}{105}bh^2;$ <p>для нижних волокон</p> $W_y = \frac{4}{35}bh^2;$ $W_z = \frac{1}{15}bh^2$	$i_y = \frac{2}{5}h \sqrt{\frac{3}{7}};$ $i_z = \frac{b}{2\sqrt{5}}$

Форма поперечного сечения	Площадь сечения	Положение центра тяжести	Моменты инерции	Моменты сопротивления	Радиусы инерции
<p>Параболический полусегмент</p>  <p>Оси <math>y</math> и <math>z</math> – центральные; <math>A</math> – вершина параболы</p>	$F = \frac{bh}{3}$	$y_c = \frac{3}{16}b;$ $z_c = \frac{2}{5}h$	$I_y = \frac{4}{175}bh^3;$ $I_z = \frac{19}{3840}hb^3$	<p>Для нижних и правых волокон</p> $W_{y_{min}} = \frac{2}{35}bh^2;$ $W_{z_{min}} = \frac{19}{48}hb^2$	$i_y = \frac{2}{5}h\sqrt{\frac{3}{7}}$
<p>Параболический треугольник</p>  <p>Оси <math>y</math> и <math>z</math> – центральные; <math>A</math> – вершина параболы</p>	$F = \frac{bh}{3}$	$y_c = \frac{1}{4}b;$ $z_c = \frac{3}{10}h$	$I_y = \frac{1}{21}bh^3;$ $I_z = \frac{1}{5}hb^3$	<p>Для нижних и правых волокон</p> $W_{y_{min}} = \frac{10}{63}bh^2;$ $W_{z_{min}} = \frac{4}{5}hb^2$	$i_y = h\sqrt{\frac{1}{7}}$

Форма поперечного сечения	Площадь сечения	Положение центра тяжести	Моменты инерции	Моменты сопротивления	Радиусы инерции
Круговой треугольник  Оси $y_2$ и $z_2$ – главные центральные	$F = 0,215r^2$	$y_c = z_c = 0,223r$	$I_y = I_z = 0,00755r^4;$ $I_{y_1} = I_{z_1} = 0,0181r^4;$ $I_{y_2} = 0,003r^4;$ $I_{z_2} = 0,0121r^4$	$W_{z_2 \min} = 0,0097r^3$	$i_{z_2 \min} = 0,187r$
Правильный многоугольник с $n$ сторонами  Оси $y$ , $y_1$ , $z$ и $z_1$ – главные центральные	$F = \frac{1}{4}na^2 \times$ $\times \operatorname{ctg} \alpha =$ $= nr^2 \operatorname{tg} \alpha =$ $= \frac{nar}{2}$	$R = \frac{2}{2 \sin \alpha};$ $r = \frac{2}{2 \operatorname{tg} \alpha}$	$I_y = I_z = I_{y_1} = I_{z_1} =$ $= \frac{nar}{48} (6R^2 - a^2) =$ $= \frac{nar}{96} (12r^2 + a^2)$	–	$i_y = i_z =$ $= \sqrt{\frac{12r^2 + a^2}{48}};$ $i_{y_1} = i_{z_1} =$ $= \sqrt{\frac{6R^2 - a^2}{24}}$

Примечание. Радиус инерции  $i = \sqrt{I/F}$ .

## Библиографический список

Тимошенко, С. П. Сопротивление материалов. В 2 т. Т. 1. Элементарная теория и задачи / С. П. Тимошенко. – М.: Физматгиз, 1960. – 379 с.

Сопротивление материалов / Г. С. Писаренко, В. А. Агарев, А. Л. Квитка и др. – Киев: Вища шк., 1986. – 775 с.

Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М.: Наука, 1986. – 512 с.

Работнов, Ю. Н. Сопротивление материалов / Ю. Н. Работнов. – М.: Физматгиз, 1962. – 455 с.

Беляев, Н. М. Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. – М.: Гостехиздат, 1953. – 856 с.

Сборник задач по сопротивлению материалов / Н. М. Беляев, Л. А. Белявский, Я. И. Кипнис и др.; под ред. В. К. Качурина. – М.: Наука, 1970. – 432 с.

Пособие к решению задач по сопротивлению материалов / И. Н. Миролубов, С. А. Енгальчев, Н. Д. Сергиевский и др. – М.: Высш. шк., 1967. – 484 с.

Справочник по сопротивлению материалов / Е. Ф. Винокуров, М. К. Балыкин, И. А. Голубев и др. – Мн.: Наука и техника, 1988. – 464 с.

## Содержание

Введение .....	3
Основные обозначения .....	3
1. Статические моменты сечения .....	4
2. Центральные оси и центр тяжести сечения .....	4
3. Примеры определения координат центра тяжести простых сечений .....	7
4. Осевые, полярный и центробежный моменты инерции сечения .....	12
5. Связь между величинами $I_\rho$ , $I_y$ и $I_z$ .....	13
6. Примеры определения моментов инерции простейших геометрических фигур .....	14
7. Изменение осевых и центробежных моментов инерции сечения при параллельном переносе осей .....	20
8. Изменение осевых и центробежных моментов инерции сечения при повороте осей .....	22
9. Инвариантность суммы осевых моментов инерции сечения относительно поворота осей .....	24
10. Главные оси и главные моменты инерции сечения .....	24
11. Примеры решения типовых задач .....	28
Вопросы для самопроверки .....	58
Порядок выполнения задания и варианты .....	59
Приложение 1. Сортамент горячекатаной стали. Балки двутавровые. ГОСТ 8239-89 .....	70
Приложение 2. Сортамент горячекатаной стали. Швеллеры с уклоном внутренних граней полок. ГОСТ 8240-89 .....	72
Приложение 3. Сортамент горячекатаной стали. Сталь прокатная угловая равнополочная. ГОСТ 8509-93 .....	74
Приложение 4. Сортамент горячекатаной стали. Сталь прокатная угловая неравнополочная. ГОСТ 8510-86 .....	79
Приложение 5. Геометрические характеристики плоских фигур .....	82
Библиографический список .....	90

Навчальне видання

**Гребенніков Михайло Миколайович  
Пекельний Микола Іванович**

**ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ  
ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ**

(Російською мовою)

Редактор В. М. Коваль

Зв. план, 2015

Підписано до видання 10.06.2015

Формат 60×84 1/16. Папір офс. №2. Офс. друк

Ум. друк. арк. 5,1. Обл.-вид. арк. 5,75. Наклад 100 пр.

Замовлення 193. Ціна вільна

---

Видавець і виготовлювач

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського  
«Харківський авіаційний інститут»  
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17  
<http://www.khai.edu>

Видавничий центр «ХАІ»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17  
[izdat@khai.edu](mailto:izdat@khai.edu)

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи  
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів  
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001

